Elementos de electromagnetismo

Tercera edición

Matthew N. O. Sadiku

Elementos de electromagnetismo

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Elementos de electromagnetismo

Tercera edición

Matthew N. O. Sadiku

Traducción
Enrique Cruz Mercado González

Revisión técnica
Eduardo Ramírez Grycuk

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Antonio Caso 142, Col. San Rafael,
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06470, México, D.F.
Tel.: 5592-4277, Fax: 5705-3738, e-mail: oxford@oupmex.com.mx

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford.
Promueve el objetivo de la Universidad relativo a la excelencia en la investigación, erudición
y educación mediante publicaciones en todo el mundo en

Oxford México

Auckland Bangkok Buenos Aires Calcuta Chennai
Ciudad del Cabo Dar-es-Salaam Delhi Estambul Hong Kong
Karachi Kuala Lumpur Madrid Melbourne Mumbai Nairobi Nueva York
São Paulo Shanghai Taipei Tokio Toronto

Oxford es una marca registrada de Oxford University Press en el Reino Unido y otros países.
Publicado en México por Oxford University Press México, S.A. de C.V.

División: Ciencia y Tecnología
Área: Ingeniería

Sponsor editor: Diana Servín Chávez
Edición: Ester Alizeri Fernández
Sergio Gerardo López Hernández
Producción: Jorge A. Martínez Jiménez
Paula Sosa Jiménez

ELEMENTOS DE ELECTROMAGNETISMO

ISBN 970-613-672-X

Traducido de la tercera edición en inglés de
ELEMENTS OF ELECTROMAGNETICS

ISBN 0-19-513477-X

This translation of Elements of Electromagnetics, Third Edition, originally published in English in 2000, is published by arrangement with Oxford University Press Inc.

Esta edición en español de Elements of Electromagnetics, Third Edition, publicada originalmente en inglés en el 2000, se tradujo con autorización de Oxford University Press Inc.

Impreso en México Printed in Mexico
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 7 0 6 0 5 0 4 0 3

En la composición de esta obra realizada en
Servicios Editoriales 6Ns, S. A. de C. V.
1ra. cerrada de Av. 5 No. 9 Col. Granjas San Antonio
09070, México, D. F.,
se usaron tipos Óptima (40, 19, 14 y 8 pts.), Times Ten (10/12, 9/11 y 8/10 pts.)
Mathematical pi (9/11 y 10/12 pts.), Symbol (9/11 y 10/12) y Univers 67 (16/18 pts.).
Se terminó de imprimir
en el mes de mayo de 2003 en
Impresora y Editora Rodríguez, S. A. de C. V.,
Viveros de la Colina No. 352-A
Col. Viveros de la Loma, 54080, Tlalnepantla, Edo. de México,
sobre papel Bond Editor Alta Opacidad de 60 g

El tiraje fue de 3000 ejemplares.

A mi esposa, Christianah Yemisi,

y a nuestras hijas,

Ann Tomi y *Joyce Bolu*

Índice de contenido

Prefacio

El objetivo fundamental de este libro sigue siendo el mismo de la primera edición: presentar los conceptos del electromagnetismo en forma más clara e interesante que en los textos anteriores. Tal objetivo se cumple de esta manera:

1. Para no complicar la exposición con el tratamiento simultáneo de conceptos electromagnéticos y matemáticos, el análisis vectorial se describe al principio del libro y se aplica gradualmente a lo largo del texto. Este método evita interrumpir repetidas veces la argumentación con fundamentos adicionales de análisis vectorial y permite separar el tratamiento de teoremas matemáticos y conceptos físicos, lo que facilita al estudiante la comprensión de las generalidades de tales teoremas.
2. En la breve introducción de cada capítulo se hace una presentación del mismo y de su relación con el resto del libro. Así, se informa al estudiante del propósito del capítulo y de su vinculación con el capítulo anterior. En el desarrollo de la exposición se insiste en los conceptos principales para llamar la atención del lector, y se retoman en el resumen final.
3. Se destaca la definición de los términos básicos para asegurar su comprensión. Las fórmulas esenciales aparecen en recuadro para que el estudiante las identifique rápidamente.
4. Cada capítulo contiene abundantes ejemplos con soluciones. Puesto que los ejemplos forman parte del texto, se les explica con toda claridad, sin solicitar la intervención del lector para completarlos. De este modo, los estudiantes adquieren confianza para resolver problemas y aplicar conceptos, uno de los objetivos primordiales de la enseñanza de la ingeniería. Después de cada ejemplo se incluye un problema, o "ejercicio", con su respuesta.
5. Al final de cada capítulo aparecen 10 preguntas de repaso, en forma de cuestionario objetivo de opción múltiple. Se ha comprobado que la mayoría de los estudiantes pasan por alto los cuestionarios sin respuestas opcionales, pese a que el propósito de éstos sea estimular la reflexión. En cambio, los cuestionarios objetivos de opción múltiple despiertan el interés de los alumnos y les permiten obtener retroalimentación inmediata.

Luego de las preguntas de repaso se proponen numerosos problemas, en el mismo orden temático del texto. Un asterisco identifica a los problemas de grado intermedio de dificultad, y dos a los problemas más difíciles. El profesor puede elegir como ejemplos al-

gunos problemas y asignar otros como tarea. El apéndice *C* contiene las respuestas de los problemas de número impar.

6. En razón de que la mayor parte de las aplicaciones prácticas suponen campos variables en el tiempo, a ellos se dedican seis capítulos. Sin embargo, los campos estáticos también reciben suficiente atención, ya que representan casos especiales de campos dinámicos. El amplio uso de la electrostática en grandes industrias manufactureras como las de fotocopiadoras y dispositivos periféricos de computadoras vuelve inaceptable el desconocimiento de esa área.

7. El último capítulo, sobre métodos numéricos con aplicaciones prácticas y programas de computación, debe su importancia al hecho de que casi todos los problemas prácticos sólo pueden resolverse con técnicas numéricas.

8. El texto incluye más de 130 ejemplos y 400 figuras. En los apéndices se ofrecen recursos didácticos adicionales, como fórmulas e identidades matemáticas básicas. Después de este prefacio los estudiantes hallarán un mensaje dirigido a ellos.

Esta edición ha sido aumentada con un nuevo capítulo sobre temas contemporáneos, como microondas, interferencia y compatibilidad electromagnéticas y fibra óptica. Asimismo, los códigos de Fortran de ediciones anteriores fueron sustituidos por códigos de Matlab, lenguaje de programación con el que hoy los alumnos están más familiarizados.

Aunque la intención es que este libro se explique por sí solo y sea de utilidad al estudiante autodidacta, en él no se ha olvidado el contacto personal, indispensable en la enseñanza. El profesor puede elegir los temas de su preferencia y concederles mayor o menor importancia. Si considera, por ejemplo, que en esta obra se dedica demasiado espacio al análisis vectorial o los campos estáticos, puede omitir estos temas, que aun así los estudiantes podrán consultar. De igual forma, tras exponer los capítulos 1 a 3 podría pasar a los capítulos 9 a 15. Si no cree conveniente abordar al principio del curso el cálculo aplicado a vectores, puede pasar del capítulo 2 al 4 y volver al 3 cuando lo juzgue necesario. Este libro fue ideado para un curso de dos semestres. En cursos de un semestre es posible obviar, explicar brevemente o asignar como tarea las secciones marcadas con el signo de cruz (†).

En la página siguiente se propone el programa del curso para un semestre de cuatro horas semanales.

Agradecimientos

Agradezco a Peter Gordon y al personal editorial y de producción de Oxford University Press por su excelente labor. Esta edición se benefició de los agudos comentarios de los revisores siguientes: Leo C. Kempel, de la Michigan State University; Andrew Dienes, de la University of California, Davis; George W. Hanson, de la University of Wisconsin-Milwaukee; Samir El-Ghazaly, de la Arizona State University, y Sadasiva M. Rao, de la Auburn University. Muchas gracias a Raymond García, Jerry Sagliocca y al doctor Oladega Soriyan por su ayuda en el manual de soluciones, y al doctor Saroj Biswas en Matlab. Agradezco a la Temple University la licencia que me otorgó en el otoño de 1998 para la revisión de este libro. Gracias en particular a los doctores Keya Sadeghipour, director administrativo del College of Engineering, y John Helferty, director del Department of Electrical and Computer Engineering, por su constante apoyo. Y como siempre, muchas gracias a mi esposa, Chris, y a nuestras hijas Ann y Joyce, por su paciencia, plegarias y apoyo incondicional.

Como ya es costumbre, agradeceré todos los comentarios, sugerencias y correcciones de este libro.

MATTHEW N. O. SADIKU

Propuesta de programa del curso de electromagnetismo

Capítulo	*Título*	*Número aproximado de horas*
1	Álgebra vectorial	2
2	Sistemas de coordenadas y su transformación	2
3	Cálculo aplicado a vectores	4
4	Campos electrostáticos	6
5	Campos eléctricos en el espacio material	4
6	Problemas de electrostática con valor en la frontera	5
7	Campos magnetostáticos	4
8	Fuerzas, materiales y dispositivos magnéticos	6
9	Ecuaciones de Maxwell	4
10	Propagación de ondas electromagnéticas	5
11	Líneas de transmisión	5
12	Guías de ondas	4
13	Antenas	5
14	Temas actuales	(3)
15	Métodos numéricos	(6)
	Exámenes	4
	Total	60

Al estudiante

La mayoría de los alumnos consideran la teoría electromagnética como uno de los cursos más difíciles de física o ingeniería eléctrica. Pero el lector descubrirá la falsedad de esa idea si toma algunas previsiones. Las sugerencias siguientes, extraídas de la experiencia, le permitirán obtener el máximo provecho de este libro:

1. Preste particular atención a la parte I, *Análisis vectorial*, ya que esta herramienta matemática es indispensable en el presente curso. Sin una clara comprensión de esa parte, tendrá problemas con el resto del libro.

2. No intente memorizar demasiadas fórmulas. Sólo memorice las básicas, las cuales aparecen en recuadro, e intente deducir de ellas todas las demás. Indague las relaciones entre ellas. Es obvio que no existe una fórmula general que permita resolver todos los problemas. Cualquier fórmula tiene algunas limitaciones a causa de los supuestos en que se apoya. Conozca esos supuestos y use la fórmula en consecuencia.

3. Identifique los términos clave de una definición o ley. Comprender el significado de esos términos resulta esencial para aplicar correctamente la definición o ley de que se trate.

4. Resuelva tantos problemas como pueda. Sin la práctica no adquirirá habilidad. Resolver problemas es el mejor modo de comprender las fórmulas y asimilar el contenido de este libro. Realice al menos el ejercicio que aparece después de cada ejemplo. Antes de resolverlo matemáticamente, elabore un diagrama; esto le permitirá comprenderlo mejor, pues le obligará a simplificar y organizar sus ideas, y le facilitará, por tanto, resolver el problema. A menos que se indique otra cosa, todas las distancias referidas en el texto corresponden a metros. Así, (2, –1, 5) significa (2 m, –1 m, 5 m).

En el apéndice *D* se incluyen una tabla de potencias de 10 y otra del alfabeto griego, de uso frecuente en el texto; el apéndice *A*, contiene importantes fórmulas de cálculo, vectores y análisis complejo, y el apéndice *C* las respuestas a los problemas de número impar.

I ANÁLISIS VECTORIAL

1 Álgebra vectorial

En mi ya larga vida he aprendido que, en comparación con la realidad, toda nuestra ciencia es ingenua y primitiva, y aun así es nuestro bien más preciado.

ALBERT EINSTEIN

1.1. Introducción

El electromagnetismo puede ser visto como el estudio de las interacciones entre cargas eléctricas en reposo y en movimiento. Así, supone el análisis, la síntesis, interpretación física y aplicación de campos eléctricos y magnéticos.

El **electromagnetismo** es la rama de la física o ingeniería eléctrica que estudia los fenómenos eléctricos y magnéticos.

Los principios del electromagnetismo se aplican en disciplinas afines como microondas, antenas, maquinaria eléctrica, comunicaciones satelitales, bioelectromagnetismo, plasmas, investigación nuclear, fibra óptica, interferencia y compatibilidad electromagnéticas, conversión de energía electromecánica, meteorología por radar y detección remota.[1,2] En medicina, por ejemplo, se usa potencia electromagnética —en forma de ondas cortas o microondas— para calentar tejidos profundos y estimular ciertas reacciones fisiológicas a fin de aliviar algunas condiciones patológicas. Campos electromagnéticos se emplean en calentadores por inducción para operaciones de fundición, forja, temple, endurecimiento de superficie y soldadura. En equipo dieléctrico de calefacción se utilizan ondas cortas para unir o sellar finas hojas de materiales plásticos. La energía electromagnética ofrece múltiples posibilidades novedosas e interesantes en la agricultura. Ya se le usa, por ejemplo, para modificar el sabor de ciertos vegetales reduciendo su acidez.

Entre los dispositivos electromagnéticos se cuentan transformadores, relevadores eléctricos, radios y televisores, teléfonos, motores eléctricos, líneas de transmisión, guías de ondas, antenas, fibra óptica, radares y rayos láser. El diseño de estos dispositivos implica un conocimiento detallado de las leyes y los principios del electromagnetismo.

---

[1] Para numerosas aplicaciones de la electrostática, véase J. M. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1986.

[2] Para otras áreas de aplicación del electromagnetismo, véase, por ejemplo, D. Teplitz (ed.), *Electromagnetism: Paths to Research*, Plenum Press, Nueva York, 1982.

†1.2. Presentación del libro

Los fenómenos electromagnéticos que se estudian en este libro pueden resumirse en las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.4}$$

donde ∇ = el operador diferencial del vector
$\mathbf{D}$ = la densidad del flujo eléctrico
$\mathbf{B}$ = la densidad del flujo magnético
$\mathbf{E}$ = la intensidad del campo eléctrico
$\mathbf{H}$ = la intensidad del campo magnético
ρ_v = la densidad de la carga de volumen
y $\mathbf{J}$ = la densidad de la corriente.

Maxwell basó estas ecuaciones en resultados conocidos, tanto experimentales como teóricos. Al observarlas salta a la vista que trataremos con cantidades vectoriales. Es lógico, entonces, que en la parte I del libro hayan de examinarse las herramientas matemáticas indispensables para este curso. La deducción de las ecuaciones (1.1) a (1.4) respecto de condiciones invariables en el tiempo y la significación física de las cantidades **D**, **B**, **E**, **H**, **J** y ρ_v serán nuestro propósito en las partes II y III. En la parte IV reexaminaremos estas ecuaciones en relación con situaciones variables en el tiempo y las aplicaremos al estudio de dispositivos electromagnéticos prácticos.

1.3. Escalares y vectores

El análisis vectorial es la herramienta matemática más práctica para expresar y comprender los conceptos electromagnéticos. Pero para aplicarlo eficazmente es preciso conocer primero sus reglas y técnicas. En éste y en los dos capítulos siguientes dedicaremos considerable atención a este tema, dado su generalizado desconocimiento entre los estudiantes del curso de electromagnetismo.[3] En este capítulo se presentarán sólo los conceptos básicos del álgebra vectorial en coordenadas cartesianas, mientras que en el siguiente nos ocuparemos de otros sistemas de coordenadas.

Una cantidad puede ser un escalar o un vector.

† Este símbolo indica que la sección respectiva puede omitirse, explicarse brevemente o asignarse como tarea si el contenido de este libro debe estudiarse en un solo semestre.

[3] El lector que no necesite repasar el álgebra vectorial puede avanzar al capítulo siguiente.

Un escalar es una cantidad que sólo posee magnitud.

Cantidades como tiempo, masa, distancia, temperatura, entropía, potencial eléctrico y población son escalares.

Un vector es una cantidad que posee tanto magnitud como dirección.

Velocidad, fuerza, desplazamiento e intensidad del campo eléctrico son cantidades vectoriales. Los *tensores* son otra clase de cantidades físicas, de las que escalares y vectores son casos especiales. Aquí nos interesaremos casi exclusivamente en escalares y vectores.[4]

Para distinguir entre vectores y escalares, los primeros suelen representarse con una letra rematada por una flecha, como $\vec{A}$ y $\vec{B}$, o en negritas, como **A** y **B**, mientras que los escalares se representan con una letra en cursivas, como A, B, U y V.

La teoría electromagnética consiste, en esencia, en el estudio de ciertos campos particulares.

Un campo es una función que especifica una cantidad particular en cualquier parte de una región.

Si la cantidad es escalar (o vectorial), se dice que el campo correspondiente es un campo escalar (o vectorial). Ejemplos de campos escalares son la distribución de temperaturas en un edificio, la intensidad del sonido en un teatro, el potencial eléctrico en una región y el índice de refracción de un medio estratificado. La fuerza gravitacional sobre un cuerpo en el espacio y la velocidad de las gotas de lluvia en la atmósfera son, a su vez, ejemplos de campos vectoriales.

1.4. Vector unitario

Un vector **A** posee tanto magnitud como dirección. La *magnitud* de **A** es un escalar, el cual se escribe A o $|\mathbf{A}|$. Un *vector unitario* $\mathbf{a}_A$ a lo largo de **A** es un vector cuya magnitud equivale a la unidad (es decir, 1) y cuya dirección sigue la dirección de **A**, esto es,

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}} \tag{1.5}$$

Si se tiene en cuenta que $|\mathbf{a}_A| = 1$, **A** podría expresarse como

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a}_A \tag{1.6}$$

lo que especifica completamente a **A** en términos de su magnitud A y su dirección $\mathbf{a}_A$.

Un vector **A** en coordenadas cartesianas (o rectangulares) puede representarse como

$$(A_x, A_y, A_z) \quad \text{o} \quad A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \tag{1.7}$$

[4] Para un tratamiento elemental de los tensores, véase, por ejemplo, A. I. Borisenko e I. E. Tarapor, *Vector and Tensor Analysis with Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.

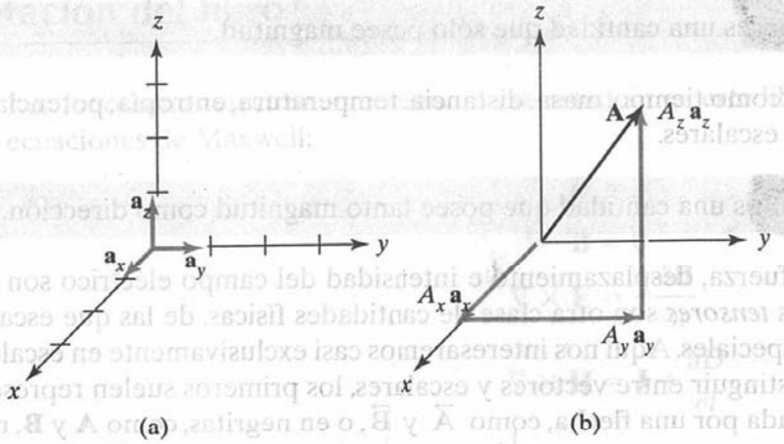


Figura 1.1. **(a)** Vectores unitarios $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$, **(b)** componentes de **A** a lo largo de $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$.

donde A_x, A_y y A_z se llaman las *componentes de* **A** en las direcciones x, y y z, respectivamente, y $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$ son vectores unitarios en las direcciones x, y y z, respectivamente. Por ejemplo, $\mathbf{a}_x$ es un vector adimensional de magnitud uno en la dirección del incremento del eje x. Los vectores unitarios $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$ se muestran en la figura 1.1*(a)*, y las componentes de **A** a lo largo de los ejes de las coordenadas se ilustran en la figura 1.1*(b)*. La magnitud del vector **A** está dada por

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \tag{1.8}$$

y el vector unitario a lo largo de **A** por

$$\mathbf{a}_A = \frac{A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \tag{1.9}$$

†1.5. Adición y sustracción de vectores

Dos vectores **A** y **B** pueden sumarse para dar otro vector **C**; esto es,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1.10}$$

La adición de vectores se efectúa componente por componente. Así, si $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$,

$$\mathbf{C} = (A_x + B_x)\mathbf{a}_x + (A_y + B_y)\mathbf{a}_y + (A_z + B_z)\mathbf{a}_z \tag{1.11}$$

La sustracción de vectores se realiza en forma similar

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \\ &= (A_x - B_x)\mathbf{a}_x + (A_y - B_y)\mathbf{a}_y + (A_z - B_z)\mathbf{a}_z\end{aligned} \tag{1.12}$$

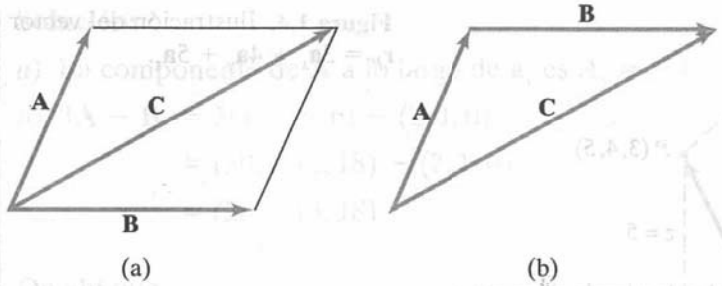


Figura 1.2. Adición de vectores $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$: **(a)** regla del paralelogramo, **(b)** regla del triángulo (de punta a cola).

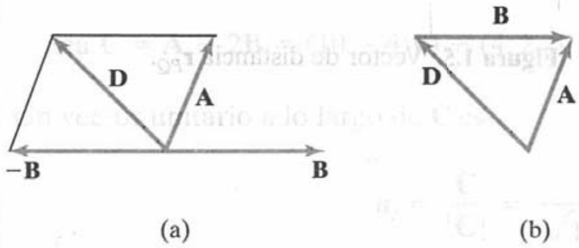


Figura 1.3. Sustracción de vectores $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$: **(a)** regla del paralelogramo, **(b)** regla del triángulo (de punta a cola).

Gráficamente, la adición y sustracción de vectores se obtiene ya sea mediante la regla del paralelogramo o la regla del triángulo (de punta a cola), como se observa en las figuras 1.2 y 1.3, respectivamente.

Cualesquiera vectores dados **A**, **B** y **C** obedecen estas tres leyes algebraicas básicas:

Ley	*Adición*	*Multiplicación*
Conmutativa	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k$
Asociativa	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	$k(\ell\mathbf{A}) = (k\ell)\mathbf{A}$
Distributiva	$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$	

donde k y ℓ son escalares. La multiplicación de vectores se explicará en la sección 1.7.

1.6. Vectores de posición y de distancia

Un punto P en coordenadas cartesianas puede representarse con (x, y, z).

El **vector de posición $\mathbf{r}_P$** (o **radiovector**) del punto P es la distancia dirigida del origen O a P; es decir,

$$\mathbf{r}_P = OP = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \tag{1.13}$$

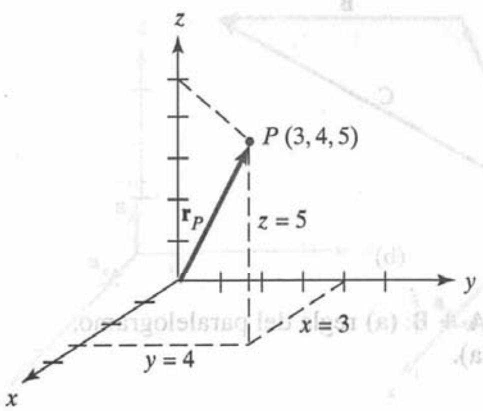


Figura 1.4. Ilustración del vector de posición $\mathbf{r}_P = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$.

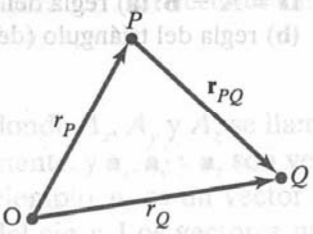


Figura 1.5. Vector de distancia $\mathbf{r}_{PQ}$.

El vector de posición del punto P es útil para definir la posición de éste en el espacio. Por ejemplo, el punto (3, 4, 5) y su vector de posición $3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ se muestran en la figura 1.4.

El **vector de distancia** es el desplazamiento de un punto a otro.

Si dos puntos P y Q están dados por (x_P, y_P, z_P) y (x_Q, y_Q, z_Q), el *vector de distancia* (o *vector de separación*) es el desplazamiento de P a Q, como se indica en la figura 1.5; esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{PQ} &= r_Q - r_P \\ &= (x_Q - x_P)\mathbf{a}_x + (y_Q - y_P)\mathbf{a}_y + (z_Q - z_P)\mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{1.14}$$

Cabe señalar la diferencia entre un punto P y un vector $\mathbf{A}$. Aunque tanto P como $\mathbf{A}$ también pueden representarse como (x, y, z) y (A_x, A_y, A_z), respectivamente, el punto P no es un vector; sólo su vector de posición $\mathbf{r}_P$ es un vector. En cambio, el vector $\mathbf{A}$ puede depender del punto P. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y - xz^2\mathbf{a}_z$ y P es $(2, -1, 4)$, entonces $\mathbf{A}$ en P sería $-4\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 32\mathbf{a}_z$. Se dice que un campo vectorial es *constante* o *uniforme* si no depende de variables espaciales x, y y z. Por ejemplo, el vector $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ es un vector uniforme, mientras que el vector $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y - xz^2\mathbf{a}_z$ no lo es, puesto que $\mathbf{B}$ es igual en cualquier parte en tanto que $\mathbf{A}$ varía de un punto a otro.

Ejemplo 1.1 Si $\mathbf{A} = 10\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$, halle: *a)* la componente de $\mathbf{A}$ a lo largo de $\mathbf{a}_y$, *b)* la magnitud de $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$, *c)* un vector unitario a lo largo de $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

Solución:

a) La componente de **A** a lo largo de $\mathbf{a}_y$ es $A_y = -4$.

b) $3\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3(10, -4, 6) - (2, 1, 0)$

$$= (30, -12, 18) - (2, 1, 0)$$
$$= (28, -13, 18)$$

De ahí que

$$|3\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{28^2 + (-13)^2 + (18)^2} = \sqrt{1277}$$
$$= 35.74$$

c) Sea $\mathbf{C} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B} = (10, -4, 6) + (4, 2, 0) = (14, -2, 6)$.

Un vector unitario a lo largo de **C** es

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{(14, -2, 6)}{\sqrt{14^2 + (-2)^2 + 6^2}}$$

o

$$\mathbf{a}_c = 0.9113\mathbf{a}_x - 0.1302\mathbf{a}_y + 0.3906\mathbf{a}_z$$

Nótese que $|\mathbf{a}_c| = 1$, como era de esperar.

Ejercicio 1.1

Dados los vectores $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$, determine

a) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$

b) $5\mathbf{A} - \mathbf{B}$

c) La componente de **A** a lo largo de $\mathbf{a}_y$.

d) Un vector unitario paralelo a $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Respuestas: *a)* 7, *b)* $(0, -2, 21)$, *c)* 0 y *d)* $\pm(0.9117, 0.2279, 0.3419)$.

Ejemplo 1.2

Los puntos P y Q se localizan en $(0, 2, 4)$ y $(-3, 1, 5)$. Calcule

a) El vector de posición P.

b) El vector de distancia de P a Q.

c) La distancia entre P y Q.

d) Un vector paralelo a PQ de magnitud 10.

Solución:

a) $\mathbf{r}_P = 0\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z = 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (-3, 1, 5) - (0, 2, 4) = (-3, -1, 1)$ o $\mathbf{r}_{PQ} = -3\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$

c) Puesto que $\mathbf{r}_{PQ}$ es el vector de distancia de P a Q, la distancia entre P y Q es la magnitud de este vector; esto es,

$$d = |\mathbf{r}_{PQ}| = \sqrt{9 + 1 + 1} = 3.317$$

Alternativamente,

$$d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 1 + 1} = 3.317$$

d) Sea $\mathbf{A}$ el vector requerido; así

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a}_A$$

donde $A = 10$ es la magnitud de $\mathbf{A}$. Puesto que $\mathbf{A}$ es paralelo a PQ, debe tener el mismo vector unitario que $\mathbf{r}_{PQ}$ o $\mathbf{r}_{QP}$. En consecuencia,

$$\mathbf{a}_A = \pm\frac{\mathbf{r}_{PQ}}{|\mathbf{r}_{PQ}|} = \pm\frac{(-3, -1, 1)}{3.317}$$

y

$$A = \pm\frac{10(-3, -1, -1)}{3.317} = \pm(-9.045\mathbf{a}_x - 3.015\mathbf{a}_y + 3.015\mathbf{a}_z)$$

Ejercicio 1.2

Dados los puntos $P(1, -3, 5)$, $Q(2, 4, 6)$ y $R(0, 3, 8)$, halle: *a)* los vectores de posición de P y R, y *b)* el vector de distancia $\mathbf{r}_{QR}$.

Respuestas: *a)* $\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$, $3\mathbf{a}_y + 8\mathbf{a}_z$ y *b)* $-2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$.

Ejemplo 1.3

Un río corre al sureste a 10 km/h y una lancha flota en él con la proa hacia la dirección del desplazamiento. Un hombre camina en la cubierta a 2 km/h en una dirección a la derecha y perpendicular a la del movimiento de la lancha. Encuentre la velocidad del hombre respecto a la tierra.

Solución:

En la figura 1.6 se ilustra este problema. La velocidad de la lancha es

$$\mathbf{u}_b = 10(\cos 45°\ \mathbf{a}_x - \text{sen } 45°\ \mathbf{a}_y)$$
$$= 7.071\mathbf{a}_x - 7.071\mathbf{a}_y \text{ km/h}$$

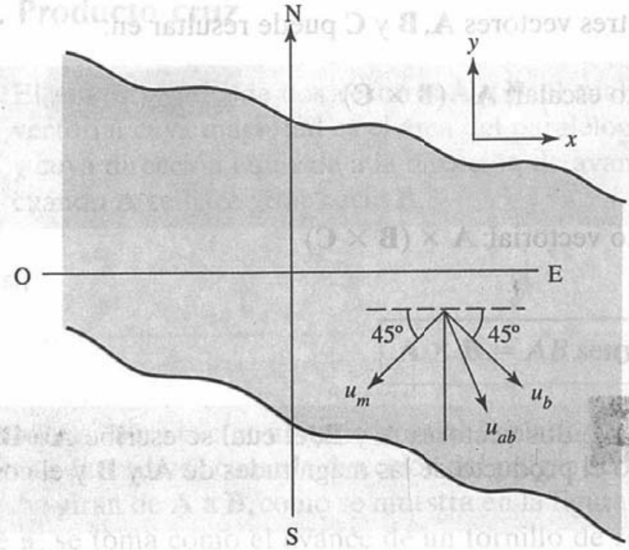


Figura 1.6. Para el ejemplo 1.3.

La velocidad del hombre respecto de la lancha (velocidad relativa) es

$$\mathbf{u}_m = 2(-\cos 45^\circ\, \mathbf{a}_x - \text{sen } 45^\circ\, \mathbf{a}_y)$$
$$= -1.414\mathbf{a}_x - 1.414\mathbf{a}_y \text{ km/h}$$

Así, la velocidad absoluta del hombre es

$$\mathbf{u}_{ab} = \mathbf{u}_m + \mathbf{u}_b = 5.657\mathbf{a}_x - 8.485\mathbf{a}_y$$
$$|\mathbf{u}_{ab}| = 10.2 \ \underline{/-56.3^\circ}$$

esto es, 10.2 km/h a 56.3° al sur del este.

Ejercicio 1.3

Un avión tiene una velocidad de 350 km/h en dirección al oeste. Si el viento sopla al noroeste a 40 km/h, calcule la velocidad real del aire y la verdadera orientación del avión.

Respuesta: 379.3 km/h, 4.275° al norte del oeste.

1.7. Multiplicación de vectores

Cuando dos vectores **A** y **B** se multiplican, el resultado es un escalar o un vector, según cómo se multipliquen los vectores. Así, hay dos tipos de multiplicación de vectores:

1. Producto escalar (o punto): $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
2. Producto vectorial (o cruz) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

La multiplicación de tres vectores **A**, **B** y **C** puede resultar en:

3. Triple producto escalar: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

o

4. Triple producto vectorial: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

A. Producto punto

El **producto punto** de dos vectores **A** y **B**, el cual se escribe $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, se define geométricamente como el producto de las magnitudes de **A** y **B** y el coseno del ángulo entre ellos.

Así,

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB}} \tag{1.15}$$

donde θ_{AB} es el ángulo *menor* entre **A** y **B**. El resultado de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se denomina *producto escalar* porque es un escalar, o *producto punto* a causa del signo de punto.

Si $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, entonces

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{1.16}$$

lo cual se obtiene multiplicando **A** y **B** componente por componente. Se dice que dos vectores **A** y **B** son *ortogonales* (o perpendiculares) entre sí si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Cabe indicar que el producto punto obedece las leyes siguientes:

(i) *Ley conmutativa*:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{1.17}$$

(ii) *Ley distributiva*:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{1.18}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2 \tag{1.19}$$

(iii) Nótese también que

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \tag{1.20a}$$

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \tag{1.20b}$$

Es fácil comprobar las identidades de las ecuaciones (1.17) a (1.20) aplicando la ecuación (1.15) o (1.16).

B. Producto cruz

El **producto cruz** de dos vectores **A** y **B**, el cual se escribe $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, es una cantidad vectorial cuya magnitud es el área del paralelogramo formado por **A** y **B** (fig. 1.7) y cuya dirección equivale a la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha cuando **A** se hace girar hacia **B**.

Así,

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \operatorname{sen} \theta_{AB} \mathbf{a}_n} \tag{1.21}$$

donde $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal al plano que contiene a **A** y **B**. La dirección de $\mathbf{a}_n$ puede entenderse como la dirección del pulgar derecho cuando los dedos de la mano derecha giran de **A** a **B**, como se muestra en la figura 1.8*(a)*. Alternativamente, la dirección de $\mathbf{a}_n$ se toma como el avance de un tornillo de rosca derecha cuando **A** se hace girar hacia **B**, como se muestra en la figura 1.8*(b)*.

La multiplicación de vectores de la ecuación (1.21) se denomina *producto cruz* debido al signo por (×), o *producto vectorial* a causa de que su resultado es un vector. Si $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, entonces

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}} \tag{1.22a}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{a}_z \tag{1.22b}$$

lo cual se obtiene "cruzando" términos en permutación cíclica, hecho que también explica el nombre de *producto cruz*.

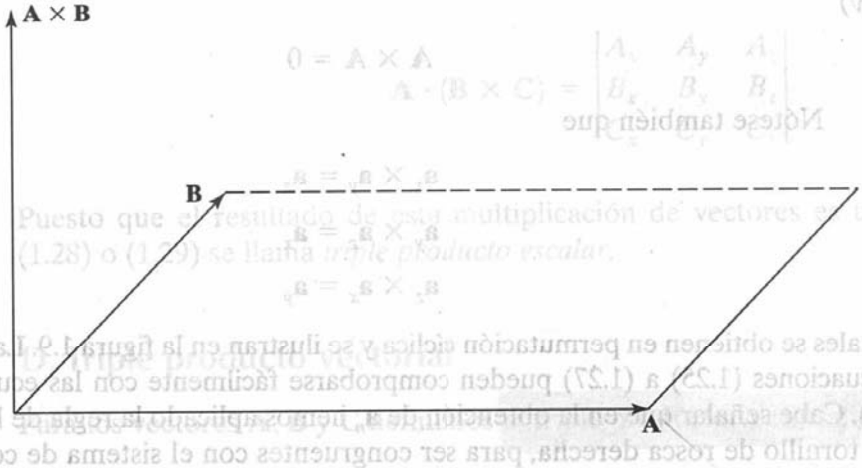


Figura 1.7. El producto cruz de **A** y **B** es un vector con magnitud igual al área del paralelogramo y con la dirección indicada.

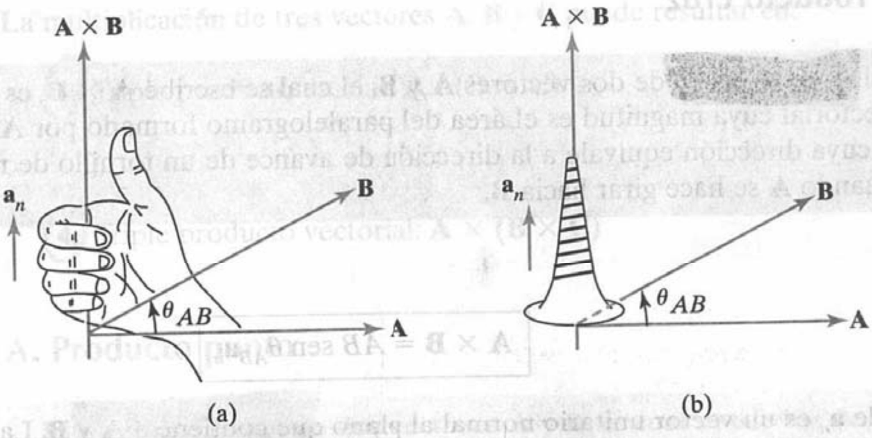


Figura 1.8. Dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{a}_n$ aplicando **(a)** la regla de la mano derecha, **(b)** la regla del tornillo de rosca derecha.

El producto cruz posee las propiedades básicas siguientes:

i) No es conmutativo,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{1.23a}$$

sino anticonmutativo:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{1.23b}$$

ii) No es asociativo:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \tag{1.24}$$

iii) Es distributivo:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{1.25}$$

iv)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \tag{1.26}$$

Nótese también que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y \end{aligned} \tag{1.27}$$

los cuales se obtienen en permutación cíclica y se ilustran en la figura 1.9. Las identidades de las ecuaciones (1.25) a (1.27) pueden comprobarse fácilmente con las ecuaciones (1.21) o (1.22). Cabe señalar que en la obtención de $\mathbf{a}_n$ hemos aplicado la regla de la mano derecha o del tornillo de rosca derecha, para ser congruentes con el sistema de coordenadas presentado en la figura 1.1, el cual es derecho. Un sistema de coordenadas derecho es el que satisface la regla de la mano derecha; esto es, obedece $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$. Un sistema izquierdo

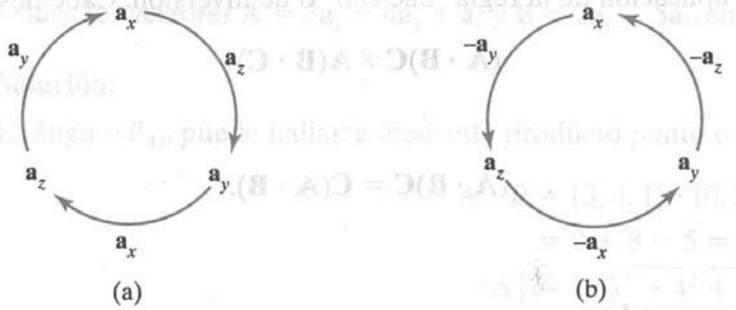


Figura 1.9. Producto cruz mediante permutación cíclica: **(a)** siguiendo la dirección de las manecillas del reloj se obtienen resultados positivos; **(b)** siguiendo la dirección contraria a la de las manecillas del reloj se obtienen resultados negativos.

implica el uso de la regla de la mano izquierda o del tornillo de rosca izquierda y satisface $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_z$. En este libro nos apegaremos al sistema de coordenadas derecho.

Así como la multiplicación de dos vectores da como resultado un escalar o un vector, la multiplicación de tres vectores **A**, **B** y **C** también da como resultado un escalar o un vector, según cómo se multipliquen los vectores, de lo que se deriva un triple producto escalar o un triple producto vectorial.

C. Triple producto escalar

Dados tres vectores **A**, **B** y **C**, definimos el triple producto escalar como

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})} \tag{1.28}$$

obtenido en permutación cíclica. Si $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ y $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$, entonces $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ es el volumen de un paralelepípedo con **A**, **B** y **C** por aristas, el cual puede obtenerse fácilmente hallando el determinante de la matriz de 3×3 formada por **A**, **B** y **C**; esto es,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.29}$$

Puesto que el resultado de esta multiplicación de vectores es un escalar, la ecuación (1.28) o (1.29) se llama *triple producto escalar.*

D. Triple producto vectorial

Para los vectores **A**, **B** y **C** definimos el triple producto vectorial como

$$\boxed{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} \tag{1.30}$$

obtenido con la aplicación de la regla "bac-cab" o de inversión. Cabe destacar que

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{1.31}$$

pero

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \tag{1.32}$$

1.8. Componentes de un vector

Una aplicación directa del producto vectorial es su uso en la determinación de la proyección (o componente) de un vector en una dirección dada. Tal proyección puede ser escalar o vectorial. Dado un vector $\mathbf{A}$, definimos la *componente escalar* A_B de $\mathbf{A}$ a lo largo del vector $\mathbf{B}$ como [fig. 1.10*(a)*]

$$A_B = A \cos \theta_{AB} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{a}_B| \cos \theta_{AB}$$

o

$$\boxed{A_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B} \tag{1.33}$$

La *componente vectorial* $\mathbf{A}_B$ de $\mathbf{A}$ a lo largo de $\mathbf{B}$ es simplemente la componente escalar de la ecuación (1.33) multiplicada por un vector unitario a lo largo de $\mathbf{B}$; esto es,

$$\boxed{\mathbf{A}_B = A_B\mathbf{a}_B = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B)\mathbf{a}_B} \tag{1.34}$$

Las componentes tanto escalar como vectorial de $\mathbf{A}$ se ilustran en la figura 1.10. Como se observa en la figura 1.10*(b)*, el vector puede descomponerse en dos componentes ortogonales: una componente $\mathbf{A}_B$ paralela a $\mathbf{B}$ y otra $(\mathbf{A} - \mathbf{A}_B)$ perpendicular a $\mathbf{B}$. De hecho, nuestra representación cartesiana de un vector descompone en esencia el vector en tres componentes mutuamente ortogonales, como se comprueba en la figura 1.1*(b)*.

Ya hemos considerado la adición, sustracción y multiplicación de vectores, pero no la división de vectores $\mathbf{A}/\mathbf{B}$. Esto se debe a que es indefinida, excepto cuando $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos, de modo que $\mathbf{A} = k\mathbf{B}$, donde k es una constante. La derivación e integración de vectores se estudiarán en el capítulo 3.

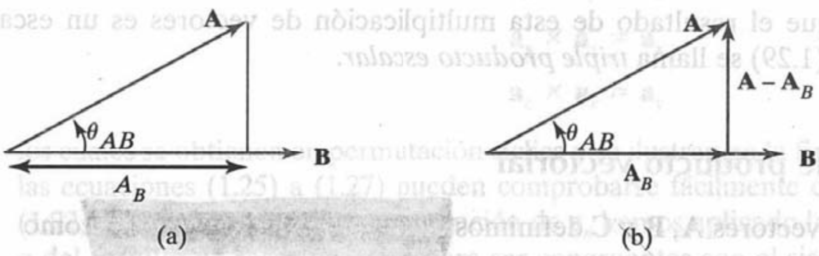


Figura 1.10. Componentes de $\mathbf{A}$ a lo largo de $\mathbf{B}$: **(a)** componente escalar A_B, **(b)** componente vectorial $\mathbf{A}_B$.

Ejemplo 1.4

Dados los vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$, encuentre el ángulo entre **A** y **B**.

Solución:

El ángulo θ_{AB} puede hallarse mediante producto punto o producto cruz.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (3,4,1) \cdot (0,2,-5)$$
$$= 0 + 8 - 5 = 3$$
$$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$
$$|\mathbf{B}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$
$$\cos \theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|} = \frac{3}{\sqrt{(26)(29)}} = 0.1092$$
$$\theta_{AB} = \cos^{-1} 0.1092 = 83.73^\circ$$

93.34

Alternativamente,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= (-20 - 2)\mathbf{a}_x + (0 + 15)\mathbf{a}_y + (6 - 0)\mathbf{a}_z$$
$$= (-22, 15, 6)$$
$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(-22)^2 + 15^2 + 6^2} = \sqrt{745}$$
$$\operatorname{sen} \theta_{AB} = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|} = \frac{\sqrt{745}}{\sqrt{(26)(29)}} = 0.994$$
$$\theta_{AB} = \operatorname{sen}^{-1} 0.994 = 83.73^\circ$$

93.02

Ejercicio 1.4

Si $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$, halle θ_{AB}.

Respuesta: 120.6°.

Ejemplo 1.5

Tres cantidades de campo están dadas por

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{Q} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{R} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

Determine

a) $(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$

b) $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{P}$

c) $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$

d) sen θ_{QR}

e) $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$

f) Un vector unitario perpendicular tanto a **Q** como a **R**.

g) El componente de **P** a lo largo de **Q**.

Solución:

a)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) + \mathbf{Q} \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \\
&= \mathbf{P} \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \times \mathbf{P} - \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \\
&= 0 + \mathbf{Q} \times \mathbf{P} + \mathbf{Q} \times \mathbf{P} - 0 \\
&= 2\mathbf{Q} \times \mathbf{P} \\
&= 2\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2(1 - 0)\mathbf{a}_x + 2(4 + 2)\mathbf{a}_y + 2(0 + 2)\mathbf{a}_z \\
&= 2\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z
\end{aligned}
$$

b) La única manera en la que $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ tiene sentido es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) &= (2, -1, 2) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (2, -1, 2) \cdot (3, 4, 6) \\
&= 6 - 4 + 12 = 14
\end{aligned}
$$

Alternativamente,

$$
\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}
$$

Para hallar el determinante de una matriz de 3 × 3, se repiten las dos primeras hileras horizontales y se multiplica en cruz; cuando la multiplicación en cruz se efectúa de derecha a izquierda, el resultado debe negarse, como se muestra abajo. Esta técnica para hallar un determinante sólo se aplica a una matriz de 3 × 3. De ahí que

$$
\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) = \begin{array}{r|rrr|l} & 2 & -1 & 2 & \\ & 2 & -3 & 1 & \\ - & 2 & 0 & -1 & + \\ - & 2 & -1 & 2 & + \\ - & 2 & -3 & 1 & + \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= +6 + 0 - 2 + 12 - 0 - 2 \\
&= 14
\end{aligned}
$$

como se obtuvo antes.

c) Con base en la ecuación (1.28),

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) = 14$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) &= (2, 0, -1) \cdot (5, 2, -4) \\ &= 10 + 0 + 4 \\ &= 14 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta_{QR} &= \frac{|\mathbf{Q} \times \mathbf{R}|}{|\mathbf{Q}|\,|\mathbf{R}|} = \frac{|(5, 2, -4)|}{|(2, -1, 2)|\,|(2, -3, 1)|} \\ &= \frac{\sqrt{45}}{3\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = 0.5976 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) &= (2, 0, -1) \times (5, 2, -4) \\ &= (2, 3, 4) \end{aligned}$$

Alternativamente, aplicando la regla "bac-cab",

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) &= \mathbf{Q}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \\ &= (2, -1, 2)(4 + 0 - 1) - (2, -3, 1)(4 + 0 - 2) \\ &= (2, 3, 4) \end{aligned}$$

f) Un vector unitario perpendicular tanto a **Q** como a **R** está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\pm \mathbf{Q} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{Q} \times \mathbf{R}|} = \frac{\pm(5, 2, -4)}{\sqrt{45}} \\ &= \pm(0.745, 0.298, -0.596) \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que $|\mathbf{a}| = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q} = 0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}$. Cualquiera de estas relaciones puede servir para comprobar **a**.

g) La componente de **P** a lo largo de **Q** es

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_Q &= |\mathbf{P}| \cos \theta_{PQ} \mathbf{a}_Q \\ &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_Q)\mathbf{a}_Q = \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^2} \\ &= \frac{(4 + 0 - 2)(2, -1, 2)}{(4 + 1 + 4)} = \frac{2}{9}(2, -1, 2) \\ &= 0.4444\mathbf{a}_x - 0.2222\mathbf{a}_y + 0.4444\mathbf{a}_z. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.5

Sea $\mathbf{E} = 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{F} = 4\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$.

a) Halle la componente de **E** a lo largo de **F**.

b) Determine un vector unitario perpendicular tanto a **E** como a **F**.

Respuesta: *a)* $(-0.2837, 0.7092, -0.3546)$ y *b)* $\pm(0.9398, 0.2734, -0.205)$.

Ejemplo 1.6

Obtenga la fórmula del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

y la fórmula de los senos

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

mediante el producto punto y el producto cruz, respectivamente.

Solución:
Considere el triángulo de la figura 1.11. En él se advierte que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$$

esto es,

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$$

Así,

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

donde A es el ángulo entre **b** y **c**.

El área de un triángulo es la mitad del producto de su altura y su base. Por tanto,

$$|\tfrac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\tfrac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\tfrac{1}{2}\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$$

$$ab \text{ sen } C = bc \text{ sen } A = ca \text{ sen } B$$

La división entre abc da como resultado

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

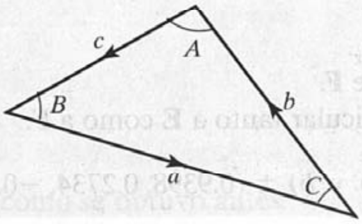


Figura 1.11. Para el ejemplo 1.6.

Ejercicio 1.6

Demuestre que los vectores $\mathbf{a} = (4, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 4)$ y $\mathbf{c} = (-5, -3, -3)$ forman los lados de un triángulo. ¿Es éste un triángulo rectángulo? Calcule el área del triángulo.

Respuesta: Sí; 10.5.

Ejemplo 1.7

Demuestre que los puntos P_1 (5, 2, −4), P_2(1, 1, 2) y P_3(−3, 0, 8) se ubican en una línea recta. Determine la distancia más corta entre esa línea y el punto P_4(3, −1, 0).

Solución:

El vector de distancia $\mathbf{r}_{P_1P_2}$ está dado por

$$\mathbf{r}_{P_1P_2} = \mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1} = (1, 1, 2) - (5, 2, -4) = (-4, -1, 6)$$

En forma similar,

$$\mathbf{r}_{P_1P_3} = \mathbf{r}_{P_3} - \mathbf{r}_{P_1} = (-3, 0, 8) - (5, 2, -4) = (-8, -2, 12)$$

$$\mathbf{r}_{P_1P_4} = \mathbf{r}_{P_4} - \mathbf{r}_{P_1} = (3, -1, 0) - (5, 2, -4) = (-2, -3, 4)$$

$$\mathbf{r}_{P_1P_2} \times \mathbf{r}_{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -4 & -1 & 6 \\ -8 & -2 & 12 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

lo que demuestra que el ángulo entre $\mathbf{r}_{P_1P_2}$ y $\mathbf{r}_{P_1P_3}$ es cero (sen $\theta = 0$). Esto implica que P_1, P_2 y P_3 se ubican en una línea recta.

Alternativamente, la ecuación vectorial de esa línea recta puede determinarse con facilidad a partir de la figura 1.12*(a)*. Respecto de cualquier punto P en la línea que une a P_1 y P_2,

$$\mathbf{r}_{P_1P} = \lambda \mathbf{r}_{P_1P_2}$$

donde λ es una constante. De ahí que el vector de posición $\mathbf{r}_P$ del punto P deba satisfacer

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{P_1} = \lambda(\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1})$$

esto es,

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{P_1} - \lambda(\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}) = (5, 2, -4) - \lambda(4, 1, -6)$$

$$\mathbf{r}_P = (5 - 4\lambda, 2 - \lambda, -4 + 6\lambda)$$

Ésta es la ecuación vectorial de la línea recta que une a P_1 y P_2. Si P_3 se encuentra en esta línea, el vector de posición de P_3 debe satisfacer la ecuación; $\mathbf{r}_3$ satisface la ecuación cuando $\lambda = 2$.

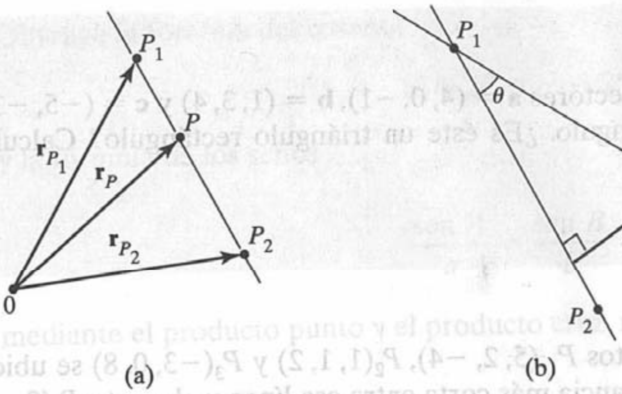


Figura 1.12. Para el ejemplo 1.7.

La distancia más corta entre la línea y el punto $P_4(3, -1, 0)$ es la distancia perpendicular del punto a la línea. De la figura 1.12*(b)* se deduce claramente que

$$d = \mathbf{r}_{P_1P_4} \operatorname{sen} \theta = |\mathbf{r}_{P_1P_4} \times \mathbf{a}_{P_1P_2}|$$

$$= \frac{|(-2, -3, 4) \times (-4, -1, 6)|}{|(-4, -1, 6)|}$$

$$= \frac{\sqrt{312}}{\sqrt{53}} = 2.426$$

Cualquier punto en la línea puede servir como punto de referencia. Así, en lugar de emplear P_1 como punto de referencia, podríamos usar P_3, de modo que

$$d = |\mathbf{r}_{P_3P_4}| \operatorname{sen} \theta' = |\mathbf{r}_{P_3P_4} \times \mathbf{a}_{P_3P_1}|$$

Ejercicio 1.7

Si P_1 es $(1, 2, -3)$ y P_2 es $(-4, 0, 5)$, halle

a) La distancia P_1P_2.
b) La ecuación vectorial de la línea P_1P_2.
c) La distancia más corta entre la línea P_1P_2 y el punto $P_3(7, -1, 2)$.

Respuestas: *a)* 9.644, *b)* $(1 - 5\lambda)\mathbf{a}_x + 2(1 - \lambda)\mathbf{a}_y + (8\lambda - 3)\mathbf{a}_z$ y *c)* 8.2.

Resumen

1. Un campo es una función que especifica una cantidad en el espacio. Por ejemplo, $\mathbf{A}(x, y, z)$ es un campo vectorial, mientras que $V(x, y, z)$ es un campo escalar.
2. Un vector $\mathbf{A}$ es propiamente especificado por su magnitud y un vector unitario a lo largo de ella, esto es $\mathbf{A} = A\mathbf{a}_A$.

3. La multiplicación de dos vectores **A** y **B** resulta en un escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB}$ o un vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \text{ sen } \theta_{AB}\mathbf{a}_n$. La multiplicación de tres vectores **A**, **B** y **C** produce un escalar $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ o un vector $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.
4. La proyección (o componente) escalar del vector **A** sobre **B** es $A_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B$, mientras que la proyección vectorial de **A** sobre **B** es $\mathbf{A}_B = A_B\mathbf{a}_B$.

Preguntas de repaso

1.1. Identifique cuál de las siguientes cantidades no es un vector: *a)* fuerza, *b)* momento, *c)* aceleración, *d)* trabajo, *e)* peso.

1.2. ¿Cuál de los campos siguientes no es un campo escalar?

a) Desplazamiento de un mosquito en el espacio.
b) Intensidad de la luz en una sala.
c) Distribución de temperaturas en un salón de clases.
d) Presión atmosférica en una región dada.
e) Humedad de una ciudad.

1.3. Los sistemas de coordenadas rectangulares que se muestran en la figura 1.13 son derechos, excepto:

1.4. ¿Cuál de estas expresiones es correcta?

a) $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$
b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{A} = 0$
c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$
d) $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$
e) $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$

donde $\mathbf{a}_k$ es un vector unitario.

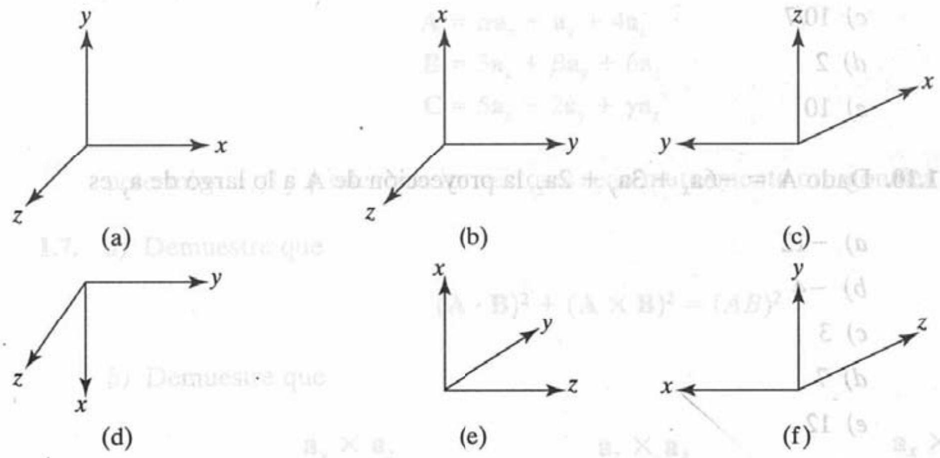


Figura 1.13. Para la pregunta de repaso 1.3.

1.5. ¿Cuál de las identidades siguientes no es válida?

a) $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{bc}$

b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

d) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

e) $\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B = \cos\theta_{AB}$

1.6. ¿Cuál de los enunciados siguientes carece de sentido?

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} = 0$

b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + 5 = 2\mathbf{A}$

c) $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + 2 = 0$

d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0$

1.7. Sea $\mathbf{F} = 2\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{G} = \mathbf{a}_x + G_y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$. Si **F** y **G** tienen el mismo vector unitario, G_y es

a) 6 *c)* 0

b) −3 *d)* 6

1.8. Puesto que $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + \alpha\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, si **A** y **B** son normales entre sí α es

a) −2 *d)* 1

b) −1/2 *e)* 2

c) 0

1.9. La componente de $6\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ a lo largo de $3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y$ es

a) $-12\mathbf{a}_x - 9\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$

b) $30\mathbf{a}_x - 40\mathbf{a}_y$

c) 10/7

d) 2

e) 10

1.10. Dado $\mathbf{A} = -6\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$, la proyección de **A** a lo largo de $\mathbf{a}_y$ es

a) −12

b) −4

c) 3

d) 7

e) 12

Respuestas: 1.1*d*, 1.2*a*, 1.3*b*, *e*, 1.4*b*, 1.5*a*, 1.6*b*, *c*, 1.7*b*, 1.8*b*, 1.9*d*, 1.10*c*.

Problemas

1.1. Halle el vector unitario a lo largo de la línea que une el punto (2, 4, 4) con el punto (−3, 2, 2).

1.2. Sea $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{C} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$. *a)* Determine $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$. *b)* Calcule $|\mathbf{A} - 5\mathbf{C}|$. *c)* ¿Respecto de cuáles valores de k es $|k\mathbf{B}| = 2$? *d)* Encuentre $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})/(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

1.3. Si

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{C} = 3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y + 7\mathbf{a}_z$$

determine:

a) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$

b) $\mathbf{C} - 4(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

c) $\dfrac{2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}}{|\mathbf{C}|}$

d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - |\mathbf{B}|^2$

e) $\frac{1}{2}\mathbf{B} \times (\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{C})$

1.4. Si los vectores de posición de los puntos T y S son $3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ y $4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_x$, respectivamente, determine: *a)* las coordenadas de T y S, *b)* el vector de distancia de T a S, *c)* la distancia entre T y S.

1.5. Si

$$\mathbf{A} = 5\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{C} = 8\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y$$

halle los valores de α y β tales que $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} + \mathbf{C}$ sea paralela al eje y.

1.6. Dados los vectores

$$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_x + \beta\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{C} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \gamma\mathbf{a}_z$$

determine α, β y γ tales que los vectores sean mutuamente ortogonales.

1.7. *a)* Demuestre que

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = (AB)^2$$

b) Demuestre que

$$\mathbf{a}_x = \frac{\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}{\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}, \qquad \mathbf{a}_y = \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}, \qquad \mathbf{a}_z = \frac{\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y}{\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}$$

1.8. Puesto que

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{Q} = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{R} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

halle: *a)* $|\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{R}|$, *b)* $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$, *c)* $\mathbf{Q} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$, *d)* $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$, *e)* $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$, *f)* $\cos\theta_{PR}$, *g)* $\operatorname{sen}\theta_{PQ}$.

1.9. Dados los vectores $\mathbf{T} = 2\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{S} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, halle: *a)* la proyección escalar de $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{S}$, *b)* la proyección vectorial de $\mathbf{S}$ sobre $\mathbf{T}$, *c)* el ángulo menor entre $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$.

1.10. Si $\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_x$, halle: *a)* las proyecciones escalares de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{B}$, *b)* la proyección vectorial de $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{A}$, *c)* el vector unitario perpendicular al plano que contiene $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

1.11. Calcule los ángulos que el vector $\mathbf{H} = 3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 8\mathbf{a}_z$ forma con los ejes x, y y z.

1.12. Halle el triple producto escalar de $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ cuando

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

y

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$$

1.13. Simplifique las expresiones siguientes:

a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

b) $\mathbf{A} \times [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$

1.14. Demuestre que el punto y la cruz del triple producto escalar podrían intercambiarse, es decir, que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

1.15. Los puntos $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(-5, 2, 0)$ y $P_3(2, 7, -3)$ forman un triángulo en el espacio. Calcule el área del triángulo.

1.16. Los vértices de un triángulo se localizan en $(4, 1, -3)$, $(-2, 5, 4)$ y $(0, 1, 6)$. Encuentre los tres ángulos del triángulo.

1.17. Los puntos P, Q y R se localizan en $(-1, 4, 8)$, $(2, -1, 3)$ y $(-1, 2, 3)$, respectivamente. Determine: *a)* la distancia entre P y Q, *b)* el vector de distancia de P a R, *c)* el ángulo entre QP y QR, *d)* el área del triángulo PQR, *e)* el perímetro del triángulo PQR.

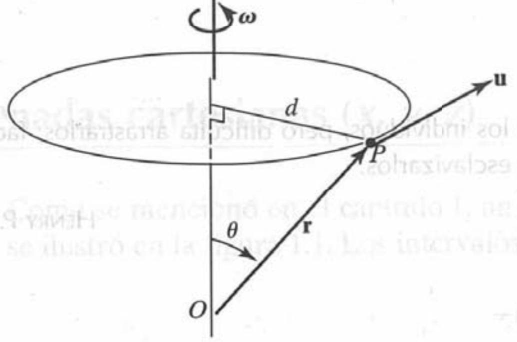
***1.18.** Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto (x, y, z) y $\mathbf{A}$ es un vector constante, demuestre que:

a) $(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = 0$ es la ecuación de un plano constante.

b) $(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r} = 0$ es la ecuación de una esfera.

*Un asterisco indica problemas de grado intermedio de dificultad.

Figura 1.14. Para el problema 1.20.



c) Demuestre asimismo que el resultado del inciso *a)* corresponde a la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde $D = -(A^2 + B^2 + C^2)$, y el del inciso *b)* a la forma $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

***1.19.** *a)* Compruebe que $\mathbf{P} = \cos\theta_1\mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_1\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{Q} = \cos\theta_2\mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_2\mathbf{a}_y$ son vectores unitarios en el plano xy, donde forman respectivamente los ángulos θ_1 y θ_2 con el eje x.

b) Obtenga mediante producto punto la fórmula para $\cos(\theta_2 - \theta_1)$. Tras enunciar de igual manera **P** y **Q**, obtenga la fórmula para $\cos(\theta_2 + \theta_1)$.

c) Si θ es el ángulo entre **P** y **Q**, halle $\frac{1}{2}|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$ en términos de θ.

1.20. Considere un cuerpo rígido que gira a una velocidad angular constante de ω radianes por segundo alrededor de un eje fijo a través de O, como se muestra en la figura 1.14. Sea **r** el vector de distancia de O a P, la posición de una partícula en ese cuerpo. La magnitud de velocidad **u** del cuerpo en P es $|\mathbf{u}| = d\omega = |\mathbf{r}| \operatorname{sen}\theta\, |\boldsymbol{\omega}|$ o $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Si el cuerpo rígido gira a 3 radianes por segundo en torno a un eje paralelo $\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ que pasa por el punto $(2, -3, 1)$, determine la velocidad del cuerpo en $(1, 3, 4)$.

1.21. Dado $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x - yz\mathbf{a}_y + yz^2\mathbf{a}_z$, determine:

a) La magnitud de **A** en el punto $T(2, -1, 3)$.

b) El vector de distancia de T a S si S se encuentra a 5.6 unidades de T y en la misma dirección que **A** en T.

c) El vector de posición de S.

1.22. **E** y **F** son campos vectoriales dados por $\mathbf{E} = 2x\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + yz\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{F} = xy\mathbf{a}_x - y^2\mathbf{a}_y + xyz\mathbf{a}_z$. Determine:

a) $|\mathbf{E}|$ en $(1, 2, 3)$.

b) La componente de **E** a lo largo de **F** en $(1, 2, 3)$.

c) Un vector perpendicular tanto a **E** como a **F** en $(0, 1, -3)$ cuya magnitud sea la unidad.

2 Sistema de coordenadas y su transformación

La educación facilita dirigir a los individuos, pero dificulta arrastrarlos; facilita gobernarlos, pero vuelve imposible esclavizarlos.

HENRY P. BROUGHAM

2.1. Introducción

En general, las cantidades físicas que trataremos en el electromagnetismo son funciones de espacio y tiempo. Para describir las variaciones espaciales de esas cantidades debemos poder definir inequívocamente todos los puntos en el espacio en forma conveniente. Esto requiere el empleo de un sistema de coordenadas adecuado.

Un punto o vector puede representarse en cualquier sistema de coordenadas curvilíneo, el cual puede ser ortogonal o no ortogonal.

Un **sistema ortogonal** es aquel cuyas coordenadas son mutuamente perpendiculares.

Los sistemas no ortogonales son imprácticos y, por tanto, su uso es escaso o nulo. Ejemplos de sistemas de coordenadas ortogonales son los sistemas cartesiano (o rectangular), cilíndrico circular, esférico, cilíndrico elíptico, cilíndrico parabólico, cónico, esferoidal alargado, esferoidal achatado y elipsoidal.[1] La selección del sistema de coordenadas más adecuado a un problema permite ahorrar gran cantidad de trabajo y tiempo. Un problema difícil en un sistema podría resultar fácil en otro.

En este texto nos limitaremos a los tres sistemas de coordenadas más conocidos: el cartesiano, el cilíndrico circular y el esférico. Aunque en el capítulo 1 ya nos ocupamos del sistema cartesiano, lo consideraremos con detenimiento en éste. Téngase presente que los conceptos expuestos en el capítulo 1 y demostrados en coordenadas cartesianas son igualmente aplicables a otros sistemas de coordenadas. Por ejemplo, el procedimiento para hallar el producto punto o cruz de dos vectores en un sistema cilíndrico es el mismo que el que se empleó en el sistema cartesiano en el capítulo 1.

[1] Para una exposición introductoria sobre estos sistemas de coordenadas, véase M. R. Spigel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, McGraw-Hill, Nueva York, 1968, pp. 124-130.

A veces es necesario transformar puntos y vectores de un sistema de coordenadas a otro. Las técnicas para hacerlo se presentarán e ilustrarán con ejemplos.

2.2. Coordenadas cartesianas (x, y, z)

Como se mencionó en el capítulo 1, un punto P puede representarse con (x, y, z), como se ilustró en la figura 1.1. Los intervalos de las variables de las coordenadas x, y y z son

$$\begin{gathered} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{gathered} \tag{2.1}$$

En coordenadas cartesianas (o rectangulares), un vector $\mathbf{A}$ puede expresarse como

$$(A_x, A_y, A_z) \quad \text{o} \quad A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$ son vectores unitarios a lo largo de las direcciones x, y y z, como se mostró en la figura 1.1.

2.3. Coordenadas cilíndricas circulares (ρ, ϕ, z)

El sistema de coordenadas cilíndricas circulares es muy práctico cuando se trata con problemas que implican simetría cilíndrica.

Un punto P en coordenadas cilíndricas se representa como (ρ, ϕ, z) y es como se muestra en la figura 2.1. Si se observa detenidamente esta figura se advertirá la definición de cada variable espacial: ρ es el radio del cilindro que pasa por P o la distancia radial desde el eje z: ϕ, el cual recibe el nombre de ángulo *azimutal*, se mide desde el

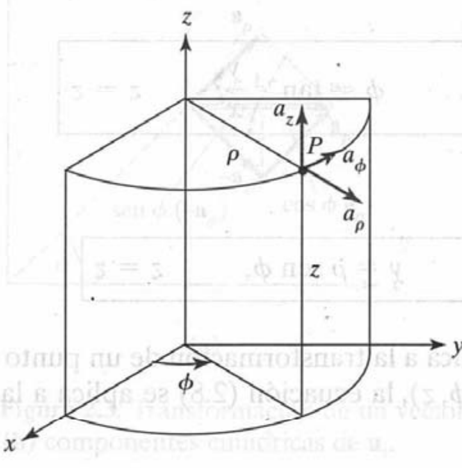


Figura 2.1. Punto P y vectores unitarios en el sistema de coordenadas cilíndricas.

eje x en el plano xy, y z es lo mismo que en el sistema cartesiano. Los intervalos de estas variables son

$$\begin{gathered} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \phi < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{gathered} \tag{2.3}$$

En coordenadas cilíndricas, un vector **A** puede expresarse como

$$(A_\rho, A_\phi, A_z) \qquad \text{o} \qquad A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \tag{2.4}$$

donde $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\phi$ y $\mathbf{a}_z$ son vectores unitarios en las direcciones ρ, ϕ y z, como se ilustra en la figura 2.1. Nótese que $\mathbf{a}_\phi$ no está en grados; representa al vector unitario de **A**. Por ejemplo, si una fuerza de 10 N actúa sobre una partícula en movimiento circular, tal fuerza puede representarse como $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_\phi$ N. En este caso, $\mathbf{a}_\phi$ está en newtons.

La magnitud de **A** es

$$|\mathbf{A}| = (A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{2.5}$$

Adviértase que los vectores unitarios $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\phi$ y $\mathbf{a}_z$ son mutuamente perpendiculares, ya que nuestro sistema de coordenadas es ortogonal; $\mathbf{a}_\rho$ apunta en la dirección de incremento de ρ, $\mathbf{a}_\phi$ en la dirección de incremento de ϕ, y $\mathbf{a}_z$ en la dirección positiva de z. Así,

$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \tag{2.6a}$$

$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0 \tag{2.6b}$$

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \tag{2.6c}$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho \tag{2.6d}$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi \tag{2.6e}$$

donde las ecuaciones (2.6*c*) a (2.6*e*) se obtienen en permutación cíclica (fig. 1.9).

Las relaciones entre las variables (x, y, z) del sistema de coordenadas cartesianas y las variables (ρ, ϕ, z) del sistema cilíndrico se obtienen fácilmente con base en la figura 2.2, de la manera siguiente:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad z = z} \tag{2.7}$$

o

$$\boxed{x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\phi, \qquad z = z} \tag{2.8}$$

Mientras que la ecuación (2.7) se aplica a la transformación de un punto de coordenadas cartesianas (x, y, z) a cilíndricas (ρ, ϕ, z), la ecuación (2.8) se aplica a la transformación $(\rho, \phi, z) \rightarrow (x, y, z)$.

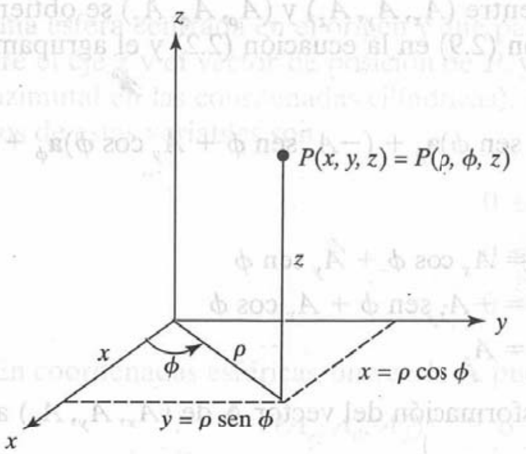


Figura 2.2. Relación entre (x, y, z) y (ρ, ϕ, z).

Las relaciones entre $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)$ y $(\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\phi, \mathbf{a}_z)$ se obtienen geométricamente a partir de la figura 2.3:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \cos\phi\,\mathbf{a}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{2.9}$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\rho &= \cos\phi\,\mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_\phi &= -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\phi\,\mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{2.10}$$

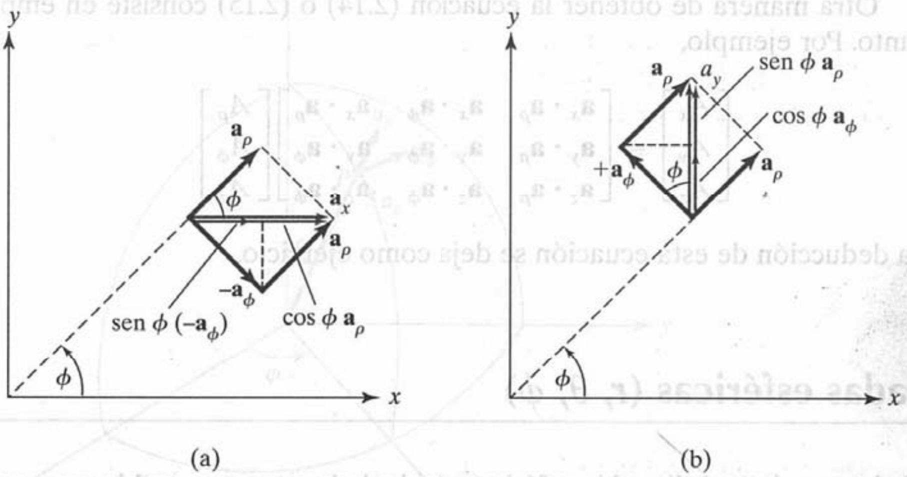


Figura 2.3. Transformación de un vector unitario: **(a)** componentes cilíndricas de $\mathbf{a}_x$, **(b)** componentes cilíndricas de $\mathbf{a}_y$.

Finalmente, las relaciones entre (A_x, A_y, A_z) y (A_ρ, A_ϕ, A_z) se obtienen mediante la simple sustitución de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.2) y el agrupamiento de términos. Así,

$$\mathbf{A} = (A_x \cos\phi + A_y \operatorname{sen}\phi)\mathbf{a}_\rho + (-A_x \operatorname{sen}\phi + A_y \cos\phi)\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z \tag{2.11}$$

o

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_x \cos\phi + A_y \operatorname{sen}\phi \\ A_\phi &= -A_x \operatorname{sen}\phi + A_y \cos\phi \\ A_z &= A_z \end{aligned} \tag{2.12}$$

En forma matricial, la transformación del vector **A** de (A_x, A_y, A_z) a (A_ρ, A_ϕ, A_z) se expresa como

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}} \tag{2.13}$$

La inversa de la transformación $(A_\rho, A_\phi, A_z) \to (A_x, A_y, A_z)$ se obtiene así:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

o directamente de las ecuaciones (2.4) y (2.10). En consecuencia,

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}} \tag{2.15}$$

Otra manera de obtener la ecuación (2.14) o (2.15) consiste en emplear el producto punto. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

La deducción de esta ecuación se deja como ejercicio.

2.4. Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

El sistema de coordenadas esféricas es ideal al tratar con problemas que implican cierto grado de simetría esférica. Un punto P puede representarse como (r, θ, ϕ) y se ilustra en la figura 2.4. En ella se advierte que r es la distancia del origen al punto P o el radio de

una esfera centrada en el origen y que pasa por P; θ (llamado *colatitud*) es el ángulo entre el eje z y el vector de posición de P, y ϕ se mide desde el eje x (igual que el ángulo azimutal en las coordenadas cilíndricas). De acuerdo con estas definiciones, los intervalos de estas variables son

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \phi < 2\pi \end{aligned} \tag{2.17}$$

En coordenadas esféricas, un vector $\mathbf{A}$ puede expresarse como

$$(A_r, A_\theta, A_\phi) \qquad \text{o} \qquad A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi \tag{2.18}$$

donde $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$ y $\mathbf{a}_\phi$ son vectores unitarios a lo largo de las direcciones r, θ y ϕ. La magnitud de $\mathbf{A}$ es

$$|\mathbf{A}| = (A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2)^{1/2} \tag{2.19}$$

Los vectores unitarios $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$ y $\mathbf{a}_\phi$ son mutuamente ortogonales; $\mathbf{a}_r$ sigue la dirección a lo largo del radio o la dirección de incremento de r; $\mathbf{a}_\theta$ sigue la dirección de incremento de θ, y $\mathbf{a}_\phi$ sigue la dirección de incremento de ϕ. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1 \\ \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_r = 0 \\ \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \tag{2.20}$$

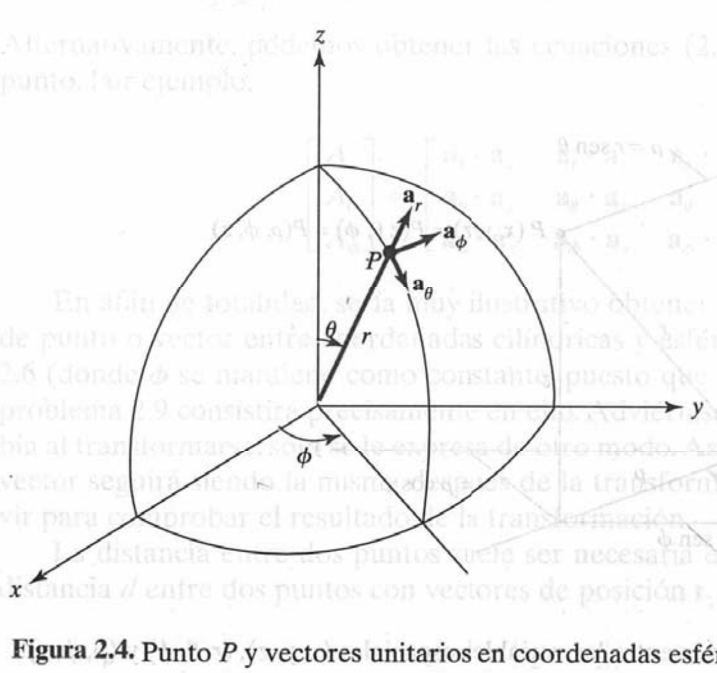


Figura 2.4. Punto P y vectores unitarios en coordenadas esféricas.

Las variables espaciales (x, y, z) en las coordenadas cartesianas pueden relacionarse con las variables (r, θ, ϕ) de un sistema de coordenadas esféricas. De la figura 2.5 se deduce claramente que

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}} \tag{2.21}$$

o

$$\boxed{x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \cos \theta} \tag{2.22}$$

En la ecuación (2.21) tenemos la transformación del punto $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$, y en la ecuación (2.22) la transformación del punto $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$.

Los vectores unitarios $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_\phi$ se relacionan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, \mathbf{a}_r + \cos \theta \cos \phi \, \mathbf{a}_\theta - \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_r + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \, \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= \cos \theta \, \mathbf{a}_r - \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \tag{2.23}$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_y + \cos \theta \, \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \, \mathbf{a}_x + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_y - \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\phi &= -\operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_x + \cos \phi \, \mathbf{a}_y \end{aligned} \tag{2.24}$$

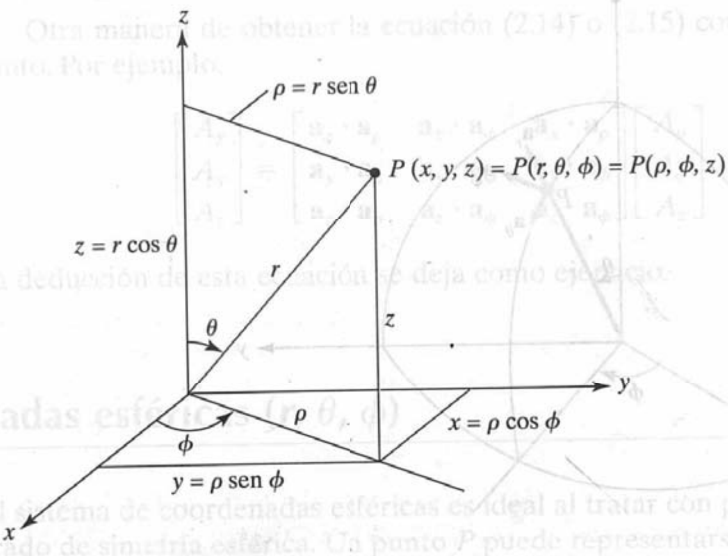


Figura 2.5. Relaciones entre las variables espaciales (x, y, z), (r, θ, ϕ) y (ρ, ϕ, z).

Las componentes del vector $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ se relacionan mediante la sustitución de la ecuación (2.23) en la ecuación (2.2) y el agrupamiento de términos. Así,

$$\mathbf{A} = (A_x \operatorname{sen}\theta\cos\phi + A_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + A_z\cos\theta)\mathbf{a}_r + (A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\operatorname{sen}\phi - A_z\operatorname{sen}\theta)\mathbf{a}_\theta + (-A_x\operatorname{sen}\phi + A_y\cos\phi)\mathbf{a}_\phi \tag{2.25}$$

de lo que se obtiene

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \operatorname{sen}\theta\cos\phi + A_y\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + A_z\cos\theta \\ A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\operatorname{sen}\phi - A_z\operatorname{sen}\theta \\ A_\phi &= -A_x\operatorname{sen}\phi + A_y\cos\phi \end{aligned} \tag{2.26}$$

En forma matricial, la transformación del vector $(A_x, A_y, A_z) \rightarrow (A_r, A_\theta, A_\phi)$ se efectúa de acuerdo con

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}} \tag{2.27}$$

La transformación inversa $(A_r, A_\theta, A_\phi) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$ se obtiene en forma similar, o a partir de la ecuación (2.23). Así,

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}} \tag{2.28}$$

Alternativamente, podemos obtener las ecuaciones (2.27) y (2.28) usando el producto punto. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

En afán de totalidad, sería muy ilustrativo obtener las relaciones de transformación de punto o vector entre coordenadas cilíndricas y esféricas empleando las figuras 2.5 y 2.6 (donde ϕ se mantiene como constante, puesto que es común a ambos sistemas). El problema 2.9 consistirá precisamente en ello. Adviértase que un punto o vector no cambia al transformarse; sólo se le expresa de otro modo. Así, por ejemplo, la magnitud de un vector seguirá siendo la misma después de la transformación de éste, lo cual puede servir para comprobar el resultado de la transformación.

La distancia entre dos puntos suele ser necesaria en la teoría electromagnética. La distancia d entre dos puntos con vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ es generalmente dada por

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \tag{2.30}$$

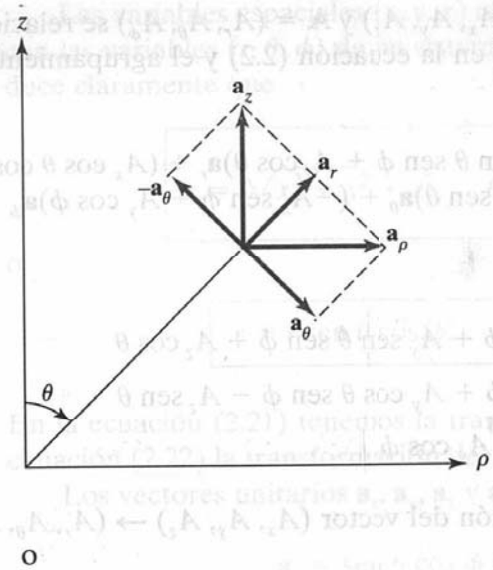


Figura 2.6. Transformaciones de un vector unitario para coordenadas cilíndricas y esféricas.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad \text{(en coordenadas cartesianas)} \tag{2.31}$$

$$d^2 = \rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2 \quad \text{(en coordenadas cilíndricas)} \tag{2.32}$$

$$d^2 = r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2\cos\theta_2\cos\theta_1 \tag{2.33}$$

$$- 2r_1r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad \text{(en coordenadas esféricas)}$$

Ejemplo 2.1

Dados el punto $P(-2, 6, 3)$ y el vector $\mathbf{A} = y\mathbf{a}_x + (x + z)\mathbf{a}_y$, exprese P y $\mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas. Evalúe $\mathbf{A}$ en P en los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico

Solución:

En el punto P: $x = -2, y = 6, z = 3$. Por tanto,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 36} = 6.32$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{6}{-2} = 108.43°$$

$$z = 3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{40}}{3} = 64.62°$$

Así,

$$P(-2, 6, 3) = P(6.32, 108.43°, 3) = P(7, 64.62°, 108.43°)$$

En el sistema cartesiano, $\mathbf{A}$ en P es

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

Respecto del vector $\mathbf{A}$, $A_x = y$, $A_y = x + z$, $A_z = 0$. En consecuencia, en el sistema cilíndrico

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x + z \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$A_\rho = y\cos\phi + (x + z)\operatorname{sen}\phi$$
$$A_\phi = -y\operatorname{sen}\phi + (x + z)\cos\phi$$
$$A_z = 0$$

Pero $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi$, cuya sustitución da como resultado

$$\mathbf{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z) = [\rho\cos\phi\operatorname{sen}\phi + (\rho\cos\phi + z)\operatorname{sen}\phi]\mathbf{a}_\rho + [-\rho\operatorname{sen}^2\phi + (\rho\cos\phi + z)\cos\phi]\mathbf{a}_\phi$$

En P

$$\rho = \sqrt{40}, \qquad \tan\phi = \frac{6}{-2}$$

Por tanto,

$$\cos\phi = \frac{-2}{\sqrt{40}}, \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{6}{\sqrt{40}}$$

$$\mathbf{A} = \left[\sqrt{40}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}}\cdot\frac{6}{\sqrt{40}} + \left(\sqrt{40}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}} + 3\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{40}}\right]\mathbf{a}_\rho + \left[-\sqrt{40}\cdot\frac{36}{40} + \left(\sqrt{40}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}} + 3\right)\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}}\right]\mathbf{a}_\phi$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{40}}\mathbf{a}_\rho - \frac{38}{\sqrt{40}}\mathbf{a}_\phi = -0.9487\mathbf{a}_\rho - 6.008\mathbf{a}_\phi$$

En forma similar, en el sistema esférico

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x + z \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$A_r = y\operatorname{sen}\theta\cos\phi + (x + z)\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$A_\theta = y\cos\theta\cos\phi + (x + z)\cos\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$A_\phi = -y\operatorname{sen}\phi + (x + z)\cos\phi$$

Pero $x = r \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, $y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, y $z = r\cos\theta$, cuya sustitución da como resultado

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (A_r, A_\theta, A_\phi)\\ &= r[\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\operatorname{sen}\phi + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta)\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi]\mathbf{a}_r\\ &\quad + r[\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta)\cos\theta\operatorname{sen}\phi]\mathbf{a}_\theta\\ &\quad + r[-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta)\cos\phi]\mathbf{a}_\phi\end{aligned}$$

En P

$$r = 7, \qquad \tan\phi = \frac{6}{-2}, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{40}}{3}$$

Por tanto,

$$\cos\phi = \frac{-2}{\sqrt{40}}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{6}{\sqrt{40}}, \quad \cos\theta = \frac{3}{7}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{40}}{7}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= 7\cdot\left[\frac{40}{49}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}}\cdot\frac{6}{\sqrt{40}} + \left(\frac{\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7}\right)\cdot\frac{\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{6}{\sqrt{40}}\right]\mathbf{a}_r\\ &\quad + 7\cdot\left[\frac{\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{\sqrt{40}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}} + \left(\frac{\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7}\right)\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{\sqrt{40}}\right]\mathbf{a}_\theta\\ &\quad + 7\cdot\left[\frac{-\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{36}{40} + \left(\frac{\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7}\right)\cdot\frac{-2}{\sqrt{40}}\right]\mathbf{a}_\phi\\ &= \frac{-6}{7}\mathbf{a}_r - \frac{18}{7\sqrt{40}}\mathbf{a}_\theta - \frac{38}{\sqrt{40}}\mathbf{a}_\phi\\ &= -0.8571\mathbf{a}_r - 0.4066\mathbf{a}_\theta - 6.008\mathbf{a}_\phi\end{aligned}$$

Nótese que $|\mathbf{A}|$ es igual en los tres sistemas; esto es,

$$|\mathbf{A}(x, y, z)| = |\mathbf{A}(\rho, \phi, z)| = |\mathbf{A}(r, \theta, \phi)| = 6.083$$

Ejercicio 2.1

a) Convierta los puntos $P(1, 3, 5)$, $T(0, -4, 3)$ y $S(-3, -4, -10)$ de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas.

b) Transforme el vector

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{a}_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{yz\,\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a coordenadas cilíndricas y esféricas.

c) Evalúe $\mathbf{Q}$ en T en los tres sistemas de coordenadas.

Respuestas: *a)* $P(3.162, 71.56°, 5)$, $P(5.916, 32.31°, 71.56°)$, $T(4, 270°, 3)$, $T(5, 53.13°, 270°)$, $S(5, 233.1°, -10)$, $S(11.18, 153.43°, 233.1°)$.

b) $\dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}(\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi - z\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_z)$, $\operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}\theta\cos\phi - r\cos^2\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(\cos\phi + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{a}_\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi$.

c) $0.8\mathbf{a}_x + 2.4\mathbf{a}_z$, $0.8\mathbf{a}_\phi + 2.4\mathbf{a}_z$, $1.44\mathbf{a}_r - 1.92\mathbf{a}_\theta + 0.8\mathbf{a}_\phi$.

Ejemplo 2.2

Exprese el vector

$$\mathbf{B} = \frac{10}{r}\mathbf{a}_r + r\cos\theta\,\mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\phi$$

en coordenadas cartesianas y cilíndricas. Halle $\mathbf{B}(-3, 4, 0)$ y $\mathbf{B}(5, \pi/2, -2)$.

Solución:

Usando la ecuación (2.28):

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{10}{r} \\ r\cos\theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

o

$$B_x = \frac{10}{r}\operatorname{sen}\theta\cos\phi + r\cos^2\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\phi$$

$$B_y = \frac{10}{r}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + r\cos^2\theta\operatorname{sen}\phi + \cos\phi$$

$$B_z = \frac{10}{r}\cos\theta - r\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

Pero $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$, y $\phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$.

En consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \cos\phi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La sustitución de todo ello da como resultado

$$B_x = \frac{10\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{10x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{xz^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} - \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

$$B_y = \frac{10\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{z^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{10y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{yz^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$B_z = \frac{10z}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$$

donde B_x, B_y y B_z corresponden a las expresiones ya indicadas.

En $(-3, 4, 0)$, $x = -3$, $y = 4$ y $z = 0$, de modo que

$$B_x = -\frac{30}{25} + 0 - \frac{4}{5} = -2$$

$$B_y = \frac{40}{25} + 0 - \frac{3}{5} = 1$$

$$B_z = 0 - 0 = 0$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

Para la transformación del vector de coordenadas esféricas a cilíndricas (véase el problema 2.9),

$$\begin{bmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{10}{r} \\ r\cos\theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

o

$$B_\rho = \frac{10}{r}\operatorname{sen}\theta + r\cos^2\theta$$

$$B_\phi = 1$$

$$B_z = \frac{10}{r}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Pero $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ y $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\rho}{z}$

Así,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$B_\rho = \frac{10\rho}{\rho^2 + z^2} + \sqrt{\rho^2 + z^2} \cdot \frac{z^2}{\rho^2 + z^2}$$

$$B_z = \frac{10z}{\rho^2 + z^2} - \sqrt{\rho^2 + z^2} \cdot \frac{\rho z}{\rho^2 + z^2}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B} = \left(\frac{10\rho}{\rho^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi + \left(\frac{10z}{\rho^2 + z^2} - \frac{\rho z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)\mathbf{a}_z$$

En $(5, \pi/2, -2)$, $\rho = 5$, $\phi = \pi/2$ y $z = -2$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left(\frac{50}{29} + \frac{4}{\sqrt{29}}\right)\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi + \left(\frac{-20}{29} + \frac{10}{\sqrt{29}}\right)\mathbf{a}_z \\ &= 2.467\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi + 1.167\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Nótese que en $(-3, 4, 0)$,

$$|\mathbf{B}(x, y, z)| = |\mathbf{B}(\rho, \phi, z)| = |\mathbf{B}(r, \theta, \phi)| = 2.907$$

Esto puede servir para comprobar el resultado.

Ejercicio 2.2

Exprese los vectores siguientes en coordenadas cartesianas:

a) $\mathbf{A} = \rho z \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\rho + 3\rho\cos\phi\, \mathbf{a}_\phi + \rho\cos\phi\operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_z$.
b) $\mathbf{B} = r^2\, \mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\phi$.

Respuestas: *a)* $\mathbf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}[(xyz - 3xy)\mathbf{a}_x + (zy^2 + 3x^2)\mathbf{a}_y + xy\,\mathbf{a}_z]$.

b) $$\begin{aligned} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\{&[x(x^2 + y^2 + z^2) - y]\mathbf{a}_x \\ &+ [y(x^2 + y^2 + z^2) + x]\mathbf{a}_y + z(x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{a}_z\}. \end{aligned}$$

†2.5. Superficies de coordenadas constantes

En los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas es fácil generar superficies manteniendo constante una de las variables de las coordenadas y permitiendo que

las otras dos varíen. Si en el sistema cartesiano x se mantiene constante y se permite que y y z varíen, se genera un plano infinito. De esto se deduce la posibilidad de los planos infinitos siguientes:

$$\begin{aligned} x &= \text{constante} \\ y &= \text{constante} \\ z &= \text{constante} \end{aligned} \tag{2.34}$$

los cuales son perpendiculares a los ejes x, y y z, respectivamente, como se muestra en la figura 2.7. La intersección de dos planos es una línea. Por ejemplo,

$$x = \text{constante}, \qquad y = \text{constante} \tag{2.35}$$

es la línea RPQ paralela al eje z. La intersección de tres planos es un punto. Por ejemplo,

$$x = \text{constante}, \qquad y = \text{constante}, \qquad z = \text{constante} \tag{2.36}$$

es el punto $P(x, y, z)$. De este modo, el punto P podría definirse como la intersección de tres planos ortogonales infinitos. Si P es $(1, -5, 3)$, entonces P es la intersección de los planos $x = 1$, $y = -5$ y $z = 3$.

En coordenadas cilíndricas es posible generar superficies ortogonales de la misma manera. Las superficies

$$\begin{aligned} \rho &= \text{constante} \\ \phi &= \text{constante} \\ z &= \text{constante} \end{aligned} \tag{2.37}$$

se ilustran en la figura 2.8, en la que se advierte fácilmente que ρ = constante es un cilindro circular; ϕ = constante es un plano semiinfinito con su borde a lo largo del eje z, y z = constante es el mismo plano infinito que en el sistema cartesiano. El encuentro de dos superficies da lugar a una línea o un círculo. Así,

$$z = \text{constante}, \qquad \rho = \text{constante} \tag{2.38}$$

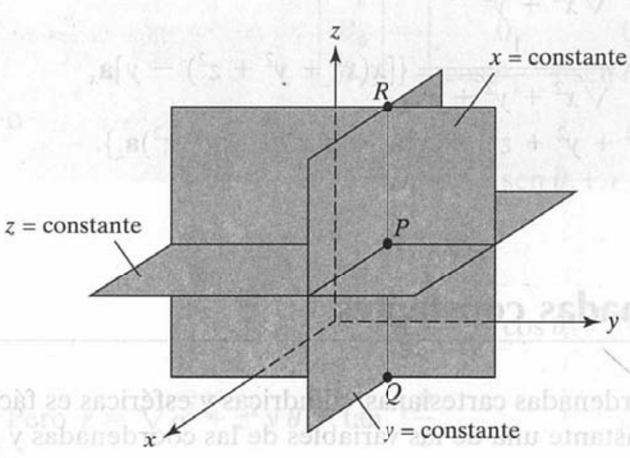


Figura 2.7. Superficies de x, y y z constantes.

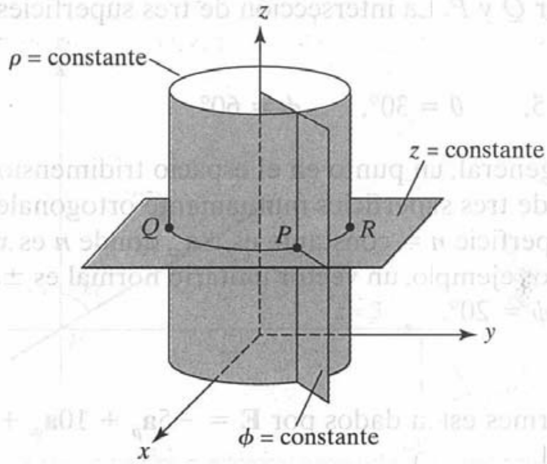


Figura 2.8. Superficies de ρ, ϕ y z constantes.

es un círculo QPR de radio ρ, mientras que z = constante, ϕ = constante es una línea semiinfinita. Un punto es una intersección de las tres superficies de la ecuación (2.37). Por tanto,

$$\rho = 2, \qquad \phi = 60°, \qquad z = 5 \tag{2.39}$$

es el punto $P(2, 60°, 5)$.

La naturaleza ortogonal del sistema de coordenadas esféricas es evidente al considerar las tres superficies

$$\begin{aligned} r &= \text{constante} \\ \theta &= \text{constante} \\ \phi &= \text{constante} \end{aligned} \tag{2.40}$$

las cuales se muestran en la figura 2.9, donde se advierte que r = constante es una esfera con su centro en el origen; θ = constante es un cono circular con el eje z como eje y el origen como vértice, y ϕ = constante es el plano semiinfinito equivalente al del sistema cilíndrico. Una línea es producto de la intersección de dos superficies. Por ejemplo:

$$r = \text{constante}, \qquad \phi = \text{constante} \tag{2.41}$$

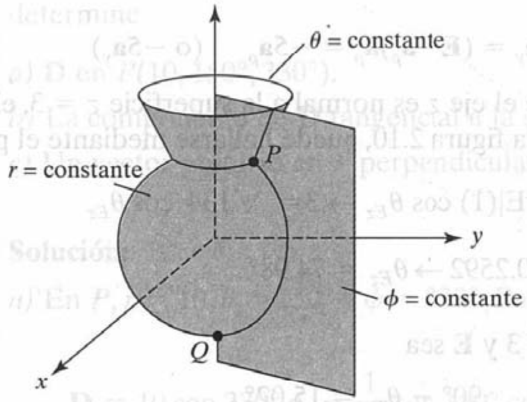


Figura 2.9. Superficies de r, θ y ϕ constantes.

es un semicírculo que pasa por Q y P. La intersección de tres superficies da como resultado un punto. Así,

$$r = 5, \qquad \theta = 30°, \qquad \phi = 60° \tag{2.42}$$

es el punto $P(5, 30°, 60°)$. En general, un punto en el espacio tridimensional puede identificarse como la intersección de tres superficies mutuamente ortogonales. Asimismo, un vector unitario normal a la superficie n = constante es $\pm\mathbf{a}_n$, donde n es x, y, z, ρ, ϕ, r o θ. Con relación al plano $x = 5$, por ejemplo, un vector unitario normal es $\pm\mathbf{a}_x$, mientras que $\mathbf{a}_\phi$ lo es con relación al plano $\phi = 20°$.

Ejemplo 2.3

Dos campos vectoriales uniformes están dados por $\mathbf{E} = -5\mathbf{a}_\rho + 10\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{F} = \mathbf{a}_\rho + 2\mathbf{a}_\phi - 6\mathbf{a}_z$. Calcule

a) $|\mathbf{E} \times \mathbf{F}|$

b) La componente vectorial de $\mathbf{E}$ en $P(5, \pi/2, 3)$ paralela a la línea $x = 2$, $z = 3$.

c) El ángulo que forma $\mathbf{E}$ con la superficie $z = 3$ en P.

Solución:

a)
$$\mathbf{E} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ -5 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-60 - 6)\mathbf{a}_\rho + (3 - 30)\mathbf{a}_\phi + (-10 - 10)\mathbf{a}_z$$

$$= (-66, -27, -20)$$

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{F}| = \sqrt{66^2 + 27^2 + 20^2} = 74.06$$

b) La línea $x = 2$, $z = 3$ es paralela al eje y, de modo que la componente de $\mathbf{E}$ paralela a la línea dada es

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y$$

Pero en $P(5, \pi/2, 3)$,

$$\mathbf{a}_y = \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\rho + \cos\phi\, \mathbf{a}_\phi$$
$$= \operatorname{sen}\pi/2\, \mathbf{a}_\rho + \cos\pi/2\, \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\rho$$

Por tanto,

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_\rho)\mathbf{a}_\rho = -5\mathbf{a}_\rho \qquad (\text{o } -5\mathbf{a}_y)$$

c) Con base en el hecho de que el eje z es normal a la superficie $z = 3$, el ángulo entre el eje z y $\mathbf{E}$, el cual se muestra en la figura 2.10, puede hallarse mediante el producto punto:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_z = |\mathrm{E}|(1)\cos\theta_{Ez} \rightarrow 3 = \sqrt{134}\,\cos\theta_{Ez}$$

$$\cos\theta_{Ez} = \frac{3}{\sqrt{134}} = 0.2592 \rightarrow \theta_{Ez} = 74.98°$$

De ahí que el ángulo entre $z = 3$ y $\mathbf{E}$ sea

$$90° - \theta_{Ez} = 15.02°$$

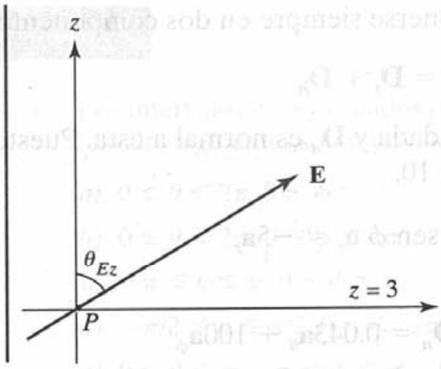


Figura 2.10. Para el ejemplo 2.3 *c)*.

Ejercicio 2.3

Dado el campo vectorial

$$\mathbf{H} = \rho z \cos\phi\, \mathbf{a}_\rho + \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\, \mathbf{a}_\phi + \rho^2 \mathbf{a}_z$$

encuentre en el punto $(1, \pi/3, 0)$:

a) $\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_x$.

b) $\mathbf{H} \times \mathbf{a}_\theta$.

c) La componente vectorial de **H** normal a la superficie $\rho = 1$.

d) La componente escalar de **H** tangencial al plano $z = 0$.

Respuestas: *a)* -0.433, *b)* $-0.5\, \mathbf{a}_\rho$, *c)* $0\, \mathbf{a}_\rho$ y *d)* 0.5.

Ejemplo 2.4

Dado un campo vectorial

$$\mathbf{D} = r \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \operatorname{sen}\theta \cos\phi\, \mathbf{a}_\theta + r^2 \mathbf{a}_\phi$$

determine

a) **D** en $P(10, 150°, 330°)$.

b) La componente de **D** tangencial a la superficie esférica $r = 10$ en P.

c) Un vector unitario en P perpendicular a **D** y tangencial al cono $\theta = 150°$.

Solución:

a) En P, $r = 10$, $\theta = 150°$ y $\phi = 330°$. Por tanto,

$$\mathbf{D} = 10 \operatorname{sen} 330°\, \mathbf{a}_r - \frac{1}{10} \operatorname{sen} 150° \cos 330°\, \mathbf{a}_\theta + 100\, \mathbf{a}_\phi = (-5, 0.043, 100)$$

b) Cualquier vector **D** puede descomponerse siempre en dos componentes ortogonales:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_n$$

donde $\mathbf{D}_t$ es tangencial a una superficie dada y $\mathbf{D}_n$ es normal a ésta. Puesto que, en nuestro caso, $\mathbf{a}_r$ es normal a la superficie $r = 10$,

$$\mathbf{D}_n = r \text{ sen } \phi \, \mathbf{a}_r = -5\mathbf{a}_r$$

En consecuencia,

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D} - \mathbf{D}_n = 0.043\mathbf{a}_\theta + 100\mathbf{a}_\phi$$

c) Un vector en *P* perpendicular a **D** y tangencial al cono $\theta = 150°$ es igual al vector perpendicular tanto a **D** como a $\mathbf{a}_\theta$. Así,

$$\mathbf{D} \times \mathbf{a}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\phi \\ -5 & 0.043 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -100\mathbf{a}_r - 5\mathbf{a}_\phi$$

Un vector unitario a lo largo de éste es

$$\mathbf{a} = \frac{-100\mathbf{a}_r - 5\mathbf{a}_\phi}{\sqrt{100^2 + 5^2}} = -0.9988\mathbf{a}_r - 0.0499\mathbf{a}_\phi.$$

Ejercicio 2.4

Si $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_r + 2\mathbf{a}_\theta - 6\mathbf{a}_\phi$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_r + 3\mathbf{a}_\phi$, determine

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

b) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

c) La componente vectorial de **A** a lo largo de $\mathbf{a}_z$ en $(1, \pi/3, 5\pi/4)$.

Respuestas: *a)* -6, *b)* 34.48 y *c)* $-0.116\,\mathbf{a}_r + 0.201\mathbf{a}_\theta$.

Resumen

1. Los tres sistemas de coordenadas de empleo más frecuente que usaremos en este texto son el cartesiano (o rectangular), el cilíndrico circular y el esférico.
2. Un punto *P* se representa como $P(x, y, z)$, $P(\rho, \phi, z)$ y $P(r, \theta, \phi)$ en los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico, respectivamente. Un campo vectorial **A** se representa como (A_x, A_y, A_z) o $A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$ en el sistema cartesiano, como (A_ρ, A_ϕ, A_z) o $A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$ en el sistema cilíndrico y como (A_r, A_θ, A_ϕ) o $A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$ en el sistema esférico. Dada la conveniencia de efectuar operaciones matemáticas (adición, sustracción, producto, etc.) en el mismo sistema de coordenadas, siempre que sea necesario deberán realizarse transformaciones de punto y vector.
3. La fijación de una variable espacial define una superficie; la de dos, una línea, y la de tres un punto.
4. Un vector unitario normal a la superficie n = constante es $\pm\mathbf{a}_n$.

Preguntas de repaso

2.1. Los intervalos de θ y ϕ dados por la ecuación (2.17) no son los únicos posibles. Todos los intervalos siguientes son intervalos adicionales de θ y ϕ, excepto

a) $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$

b) $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

c) $-\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi$

d) $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi$

e) $0 \leq \theta \leq \pi, -\pi \leq \phi < \pi$

f) $-\pi \leq \theta \leq \pi, -\pi \leq \phi < \pi$

2.2. ¿Cuál de las expresiones siguientes es incorrecta en el punto cartesiano $(-3, 4, -1)$?

a) $\rho = -5$

b) $r = \sqrt{26}$

c) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{5}{-1}$

d) $\phi = \tan^{-1} \dfrac{4}{-3}$

2.3. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es válido en el punto $(0, 4, 0)$?

a) $\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x$

b) $\mathbf{a}_\theta = -\mathbf{a}_z$

c) $\mathbf{a}_r = 4\mathbf{a}_y$

d) $\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_y$

2.4. Un vector unitario normal al cono $\theta = 30°$ es:

a) $\mathbf{a}_r$

b) $\mathbf{a}_\theta$

c) $\mathbf{a}_\phi$

d) ninguno de los anteriores.

2.5. En todo punto en el espacio, $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\theta = 1$.

a) Cierto.

b) Falso.

2.6. Si $\mathbf{H} = 4\mathbf{a}_\rho - 3\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z$, en $(1, \pi/2, 0)$ la componente de $\mathbf{H}$ paralela a la superficie $\rho = 1$ es

a) $4\mathbf{a}_\rho$

b) $5\mathbf{a}_z$

c) $-3\mathbf{a}_\phi$

d) $-3\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z$

e) $5\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$

2.7. Dado $\mathbf{G} = 20\mathbf{a}_r + 50\mathbf{a}_\theta + 40\mathbf{a}_\phi$, en $(1, \pi/2, \pi/6)$ la componente de **G** perpendicular a la superficie $\theta = \pi/2$ es

a) $20\mathbf{a}_r$
b) $50\mathbf{a}_\theta$
c) $40\mathbf{a}_\phi$
d) $20\mathbf{a}_r + 40\mathbf{a}_\theta$
e) $-40\mathbf{a}_r + 20\mathbf{a}_\phi$

2.8. La intersección de las superficies $\rho = 2$ y $z = 1$ es

a) plano infinito
b) plano semiinfinito
c) círculo
d) cilindro
e) cono

2.9. Haga coincidir los elementos de la lista de la izquierda con los de la derecha. Cada respuesta puede usarse una vez, más de una vez o ninguna.

a) $\theta = \pi/4$	*i)* plano infinito
b) $\phi = 2\pi/3$	*ii)* plano semiinfinito
c) $x = -10$	*iii)* círculo
d) $r = 1, \theta = \pi/3, \phi = \pi/2$	*iv)* semicírculo
e) $\rho = 5$	*v)* línea recta
f) $\rho = 3, \phi = 5\pi/3$	*vi)* cono
g) $\rho = 10, z = 1$	*vii)* cilindro
h) $r = 4, \phi = \pi/6$	*viii)* esfera
i) $r = 5, \theta = \pi/3$	*ix)* cubo
	x) punto

2.10. Una cuña es descrita por $z = 0, 30° < \phi < 60°$. ¿Cuál de los enunciados siguientes es incorrecto?

a) La cuña se ubica en el plano $x - y$.
b) Su longitud es infinita.
c) En la cuña, $0 < \rho < \infty$
d) Un vector unitario normal a la cuña es $\pm \mathbf{a}_z$.
e) La cuña no incluye el eje x ni el eje y.

Respuestas: 2.1*b*, *f*, 2.2*a*, 2.3*c*, 2.4*b*, 2.5*b*, 2.6*d*, 2.7*b*, 2.8*c*, 2.9*a-vi*, *b-ii*, *c-i*, *d-x*, *e-vii*, *f-v*, *g-iii*, *h-iv*, *i-iii*, 2.10*b*.

Problemas

2.1. Expresé los puntos siguientes en coordenadas cartesianas:

a) $P(1, 60°, 2)$

b) $Q(2, 90°, -4)$

c) $R(3, 45°, 210°)$

d) $T(4, \pi/2, \pi/6)$

2.2. Exprese los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas y esféricas:

a) $P(1, -4, -3)$

b) $Q(3, 0, 5)$

c) $R(-2, 6, 0)$

2.3. a) Si $V = xz - xy + yz$, exprese V en coordenadas cilíndricas.

b) Si $U = x^2 - 2y^2 + 3z^2$, exprese U en coordenadas esféricas.

2.4. Transforme los vectores siguientes en coordenadas cilíndricas y esféricas:

a) $\mathbf{D} = (x + z)\mathbf{a}_y$

b) $\mathbf{E} = (y^2 - x^2)\mathbf{a}_x + xyz\mathbf{a}_y + (x^2 - z^2)\mathbf{a}_z$

2.5. Convierta los vectores siguientes a los sistemas cilíndrico y esférico:

a) $\mathbf{F} = \dfrac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

b) $G = (x^2 + y^2)\left[\dfrac{x\mathbf{a}_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dfrac{y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dfrac{z\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]$

2.6. Exprese los vectores siguientes en coordenadas cartesianas:

a) $\mathbf{A} = \rho(z^2 + 1)\mathbf{a}_\rho - \rho z \cos\phi\, \mathbf{a}_\phi$

b) $\mathbf{B} = 2r \operatorname{sen}\theta \cos\phi\, \mathbf{a}_r + r\cos\theta\cos\theta\, \mathbf{a}_\theta - r\operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\phi$

2.7. Convierta los vectores siguientes en coordenadas cartesianas:

a) $\mathbf{C} = z \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\rho - \rho\cos\phi\, \mathbf{a}_\phi + 2\rho z\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{D} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\mathbf{a}_r + \dfrac{\cos\theta}{r^2}\mathbf{a}_\theta$

2.8. Compruebe lo siguiente:

a) $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos\phi$

$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -\operatorname{sen}\phi$

$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \operatorname{sen}\phi$

$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = \cos\phi$

b) $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$

$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi$

$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$

$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos\theta$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\operatorname{sen}\theta$$

2.9. *a)* Demuestre que la transformación de puntos entre coordenadas cilíndricas y esféricas se obtiene mediante

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z}, \qquad \phi = \phi$$

o

$$\rho = r \operatorname{sen}\theta, \qquad z = r\cos\theta, \qquad \phi = \phi$$

b) Demuestre que la transformación de vectores entre coordenadas cilíndricas y esféricas se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

(*Pista*: use las figuras 2.5 y 2.6).

2.10. *a)* Exprese el campo vectorial

$$\mathbf{H} = xy^2z\mathbf{a}_x + x^2yz\mathbf{a}_y + xyz^2\mathbf{a}_z$$

en coordenadas cilíndricas y esféricas.

b) Determine **H** en $(3, -4, 5)$ en coordenadas tanto cilíndricas como esféricas.

2.11. Sea $\mathbf{A} = \rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_z$.

a) Transforme **A** a coordenadas rectangulares y calcule su magnitud en el punto $(3, -4, 0)$.

b) Transforme **A** al sistema esférico y calcule su magnitud en el punto $(3, -4, 0)$.

2.12. La transformación $(A_\rho, A_\phi, A_z) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$ en la ecuación (2.15) está incompleta. Complétela expresando $\cos\phi$ y $\operatorname{sen}\phi$ en términos de x, y y z. Haga lo mismo con la transformación $(A_r, A_\theta, A_\phi) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$ en la ecuación (2.28).

2.13. En el ejercicio 2.2, exprese **A** en coordenadas esféricas y **B** en cilíndricas. Evalúe **A** en $(10, \pi/2, 3\pi/4)$ y **B** en $(2, \pi/6, 1)$.

2.14. Calcule la distancia entre los pares de puntos siguientes:

a) $(2, 1, 5)$ y $(6, -1, 2)$

b) $(3, \pi/2, -1)$ y $(5, 3\pi/2, 5)$

c) $(10, \pi/4, 3\pi/4)$ y $(5, \pi/6, 7\pi/4)$.

2.15. Describa la intersección de las superficies siguientes:

a) $x = 2,\quad y = 5$

b) $x = 2,\quad y = -1,\quad z = 10$

c) $r = 10,\quad \theta = 30°$

d) $\rho = 5,\quad \phi = 40°$

e) $\phi = 60°,\quad z = 10$

f) $r = 5,\quad \phi = 90°$

2.16. En el punto $T(2, 3, -4)$, exprese $\mathbf{a}_z$ en el sistema esférico y $\mathbf{a}_r$ en el rectangular.

***2.17.** Dados los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = -5\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi - 3\mathbf{a}_z$, halle

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ en $P(0, 2, -5)$

b) El ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en P

c) La componente escalar de $\mathbf{A}$ a lo largo de $\mathbf{B}$ en P

2.18. Puesto que $\mathbf{G} = (x + y^2)\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + (z^2 + zy)\mathbf{a}_z$, encuentre la componente vectorial de $\mathbf{G}$ a lo largo de $\mathbf{a}_\phi$ en el punto $P(8, 30°, 60°)$. Exprese su respuesta en el sistema cartesiano.

***2.19.** Si $\mathbf{J} = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi\, \mathbf{a}_r - \cos 2\theta \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\theta + \tan\frac{\theta}{2} \ln r\, \mathbf{a}_\phi$ en $T(2, \pi/2, 3\pi/2)$, determine la componente vectorial de $\mathbf{J}$

a) Paralelo a $\mathbf{a}_z$

b) Normal a la superficie $\phi = 3\pi/2$

c) Tangencial a la superficie esférica $r = 2$

d) Paralelo a la línea $y = -2, z = 0$

2.20. Sea $\mathbf{H} = 5\rho \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\rho - \rho z \cos\phi\, \mathbf{a}_\phi + 2\rho\mathbf{a}_z$. En el punto $P(2, 30°, -1)$, encuentre:

a) Un vector unitario a lo largo de $\mathbf{H}$

b) La componente de $\mathbf{H}$ paralela a $\mathbf{a}_x$

c) La componente de $\mathbf{H}$ normal a $\rho = 2$

d) La componente de $\mathbf{H}$ tangencial a $\phi = 30°$

***2.21.** Sea

$$\mathbf{A} = \rho(z^2 - 1)\mathbf{a}_\rho + \rho z \cos\phi\ \mathbf{a}_\phi + \rho^2 z^2 \mathbf{a}_z$$

y

$$\mathbf{B} = r^2 \cos\phi\ \mathbf{a}_r + 2r \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{a}_\phi$$

En $T(-3, 4, 1)$, calcule: *a)* **A** y **B**, *b)* la componente vectorial en coordenadas cilíndricas de **A** a lo largo de **B** en T y *c)* el vector unitario en coordenadas esféricas perpendicular tanto a **A** como a **B** en T.

***2.22.** Una definición opcional de un punto P en el espacio es $(r, \alpha, \beta, \gamma)$, variables que se describen en la figura 2.11. Con base en esta definición, halle $(r, \alpha, \beta, \gamma)$ con relación a los puntos siguientes:

a) $(-2, 3, 6)$
b) $(4, 30°, -3)$
c) $(3, 30°, 60°)$

(*Pista*: r es la r esférica, $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 2\pi$).

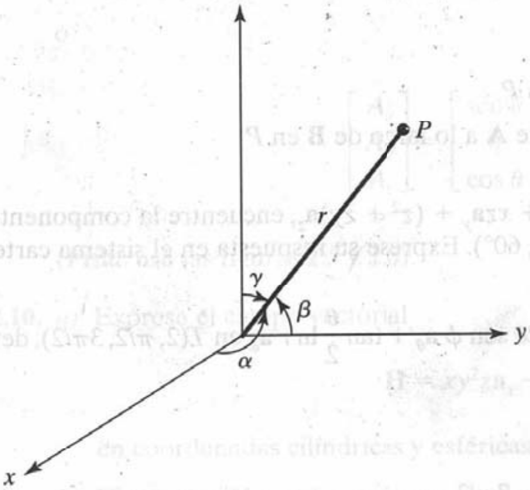


Figura 2.11. Para el problema 2.22.

2.23. Un campo vectorial en variables de coordenadas "mixtas" está dado por

$$\mathbf{G} = \frac{x\cos\phi}{\rho}\mathbf{a}_x + \frac{2yz}{\rho^2} + \left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right)\mathbf{a}_z$$

Exprese **G** únicamente en el sistema esférico.

3 Cálculo aplicado a vectores

Loco es sólo quien no se interroga.

CHARLES P. STEINMETZ

3.1. Introducción

Mientras que en el capítulo 1 nos ocupamos de la adición, sustracción y multiplicación de vectores en coordenadas cartesianas y en el capítulo 2 hicimos lo propio con relación a otros sistemas de coordenadas, en éste abordaremos el cálculo aplicado a vectores: integración y derivación de vectores.

Los conceptos que se explicarán en este capítulo aportan una terminología eficaz para la expresión de ciertas ideas fundamentales del electromagnetismo en particular y las matemáticas en general. La utilidad de estos conceptos resultará clara al aplicarlos en capítulos posteriores; por lo pronto, conviene que el lector se concentre en el aprendizaje de las técnicas matemáticas respectivas.

3.2. Longitud, área y volumen diferenciales

Los elementos diferenciales de longitud, área y volumen son útiles en el cálculo aplicado a vectores. Los definiremos en sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

A. Coordenadas cartesianas

En la figura 3.1 se advierte que

1. El desplazamiento diferencial está dado por

$$\boxed{d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z} \qquad (3.1)$$

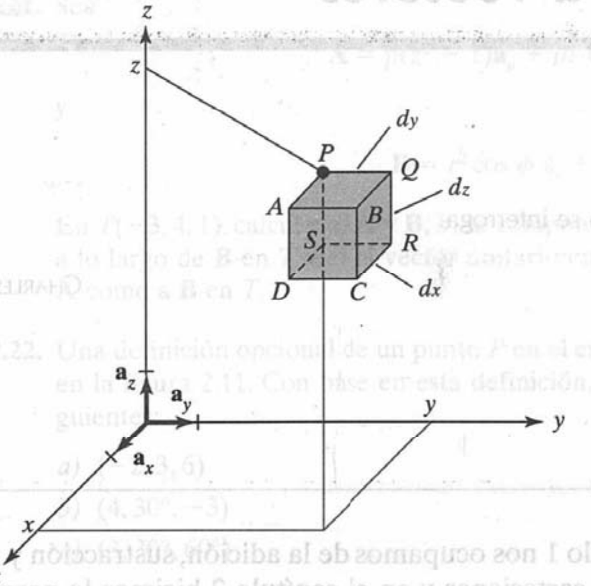


Figura 3.1. Elementos diferenciales en el sistema derecho de coordenadas cartesianas.

2. El área normal diferencial está dada por

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathbf{S} &= dy\,dz\,\mathbf{a}_x \\ &\quad dx\,dz\,\mathbf{a}_y \\ &\quad dx\,dy\,\mathbf{a}_z \end{aligned}} \tag{3.2}$$

como se ilustra en la figura 3.2.

3. El volumen diferencial está dado por

$$\boxed{dv = dx\,dy\,dz} \tag{3.3}$$

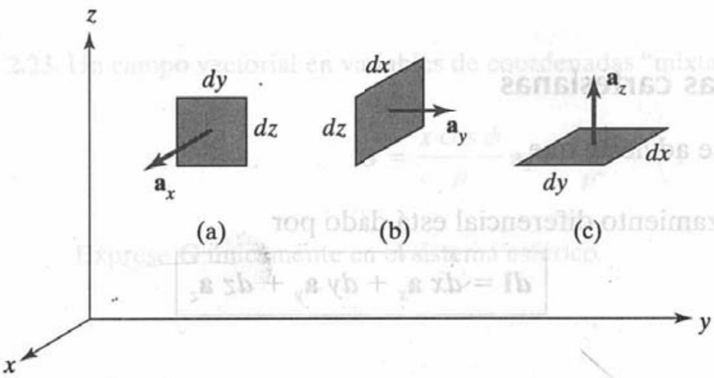


Figura 3.2. Áreas normales diferenciales en coordenadas cartesianas: **(a)** $d\mathbf{S} = dy\,dz\,\mathbf{a}_x$, **(b)** $d\mathbf{S} = dx\,dz\,\mathbf{a}_y$ y **(c)** $d\mathbf{S} = dx\,dy\,\mathbf{a}_z$.

Estos elementos diferenciales son muy importantes, de modo que nos referiremos constantemente a ellos a lo largo de este libro. Sin embargo, en lugar de memorizarlos aprenda a deducirlos de la figura 3.1. En las ecuaciones (3.1) a (3.3) se advierte que $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$ son vectores, mientras que dv es un escalar. En la figura 3.1, observe que si nos movemos del punto P a Q (o de Q a P), por ejemplo, $d\mathbf{l} = dy\ \mathbf{a}_y$, porque nos desplazamos en la dirección y, en tanto que si nos movemos de Q a S (o de S a Q), $d\mathbf{l} = dy\ \mathbf{a}_y + dz\ \mathbf{a}_z$, porque tenemos que mover dy a lo largo de y, dz a lo largo de z y $dx = 0$ (no hay movimiento a lo largo de x). De igual manera, el desplazamiento de D a Q significaría que $d\mathbf{l} = dx\ \mathbf{a}_x + dy\ \mathbf{a}_y + dz\ \mathbf{a}_z$.

La definición de $d\mathbf{S}$ es importante. El elemento diferencial de superficie (o área) $d\mathbf{S}$ puede definirse por lo general como

$$d\mathbf{S} = dS\ \mathbf{a}_n \tag{3.4}$$

donde dS es el área del elemento de superficie y $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal a la superficie dS (y en dirección de alejamiento del volumen si dS forma parte de la superficie que describe un volumen). Si se considera la superficie $ABCD$ de la figura 3.1, por ejemplo, $d\mathbf{S} = dy\ dz\ \mathbf{a}_x$, mientras que en el caso de la superficie $PQRS$, $d\mathbf{S} = -dy\ dz\ \mathbf{a}_x$ puesto que $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_x$ es normal a $PQRS$.

Lo que debe recordarse siempre acerca de los elementos diferenciales es $d\mathbf{l}$ y cómo obtener de él $d\mathbf{S}$ y dv. Una vez recordado $d\mathbf{l}$, es fácil hallar $d\mathbf{S}$ y dv. Por ejemplo, $d\mathbf{S}$ a lo largo de $\mathbf{a}_x$ puede obtenerse de $d\mathbf{l}$ en la ecuación (3.1) multiplicando los componentes de $d\mathbf{l}$ a lo largo de $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$; esto es, $dy\ dz\ \mathbf{a}_x$. En forma similar, $d\mathbf{S}$ a lo largo de $\mathbf{a}_z$ es el producto de las componentes de $d\mathbf{l}$ a lo largo de $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_y$; es decir, $dx\ dy\ \mathbf{a}_z$. Asimismo, dv puede obtenerse de $d\mathbf{l}$ como el producto de las tres componentes de $d\mathbf{l}$; esto es, $dx\ dy\ dz$. Prolonguemos ahora a otros sistemas de coordenadas la idea ya desarrollada aquí en torno a las coordenadas cartesianas.

B. Coordenadas cilíndricas

De la figura 3.3 se deduce que, en coordenadas cilíndricas, los elementos diferenciales pueden hallarse de la siguiente manera:

1. El desplazamiento diferencial está dado por

$$\boxed{d\mathbf{l} = d\rho\ \mathbf{a}_\rho + \rho\ d\phi\ \mathbf{a}_\phi + dz\ \mathbf{a}_z} \tag{3.5}$$

2. El área normal diferencial está dada por

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathbf{S} = \rho\ d\phi\ dz\ \mathbf{a}_\rho \\ d\rho\ dz\ \mathbf{a}_\phi \\ \rho\ d\phi\ d\rho\ \mathbf{a}_z \end{aligned}} \tag{3.6}$$

y se ilustra en la figura 3.4.

3. El volumen diferencial está dado por

$$\boxed{dv = \rho\ d\rho\ d\phi\ dz} \tag{3.7}$$

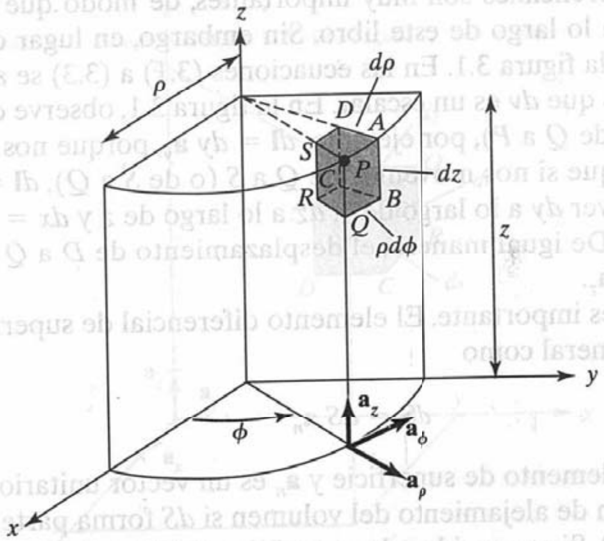


Figura 3.3. Elementos diferenciales en el sistema de coordenadas cilíndricas.

Como se mencionó en la sección anterior respecto de las coordenadas cartesianas, también en este caso basta recordar $d\mathbf{l}$; $d\mathbf{S}$ y dv pueden obtenerse fácilmente a partir de ella. Por ejemplo, $d\mathbf{S}$ a lo largo de $\mathbf{a}_z$ es el producto de las componentes de $d\mathbf{l}$ a lo largo de $\mathbf{a}_\rho$ y $\mathbf{a}_\phi$; esto es, $d\rho\ \rho\ d\phi\ \mathbf{a}_z$. Asimismo, dv es el producto de las tres componentes de $d\mathbf{l}$; es decir, $d\rho\ \rho\ d\phi\ dz$.

C. Coordenadas esféricas

En la figura 3.5 se advierte que, en coordenadas esféricas,

1. El desplazamiento diferencial es

$$\boxed{d\mathbf{l} = dr\ \mathbf{a}_r + r\ d\theta\ \mathbf{a}_\theta + r \operatorname{sen} \theta\ d\phi\ \mathbf{a}_\phi} \tag{3.8}$$

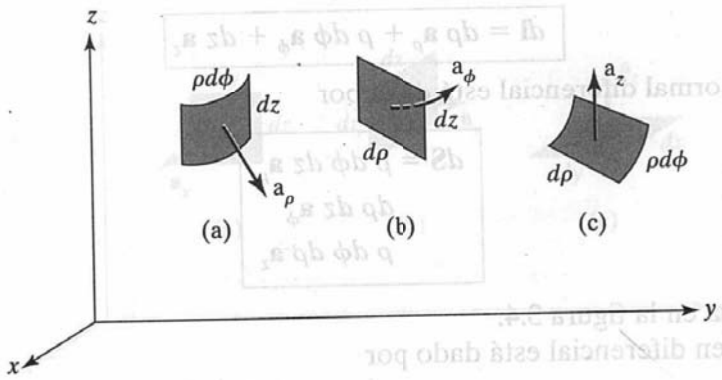


Figura 3.4. Áreas normales diferenciales en coordenadas cilíndricas: **(a)** $d\mathbf{S} = \rho\ d\phi\ dz\ \mathbf{a}_\rho$, **(b)** $d\mathbf{S} = d\rho\ dz\ \mathbf{a}_\phi$ y **(c)** $d\mathbf{S} = \rho\ d\phi\ d\rho\ \mathbf{a}_z$.

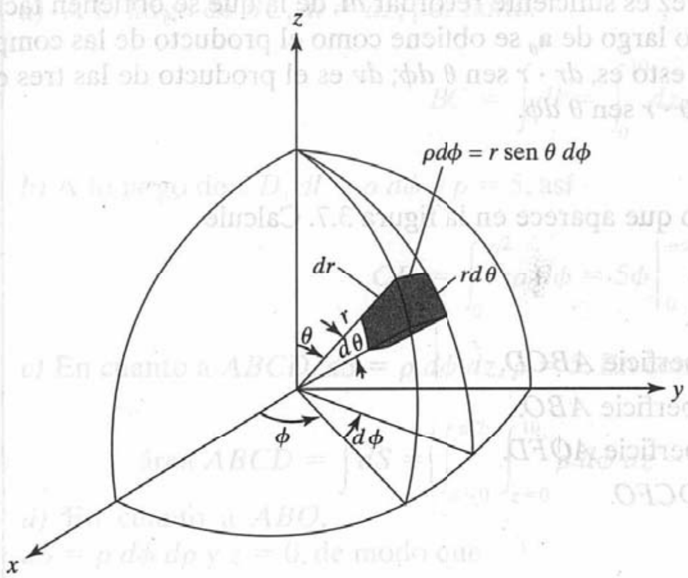


Figura 3.5. Elementos diferenciales en el sistema de coordenadas esféricas.

2. El área normal diferencial es

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathbf{S} &= r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_r \\ &\quad r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\phi\, \mathbf{a}_\theta \\ &\quad r\, dr\, d\theta\, \mathbf{a}_\phi \end{aligned}} \tag{3.9}$$

y se ilustra en la figura 3.6.

3. El volumen diferencial es

$$\boxed{dv = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi} \tag{3.10}$$

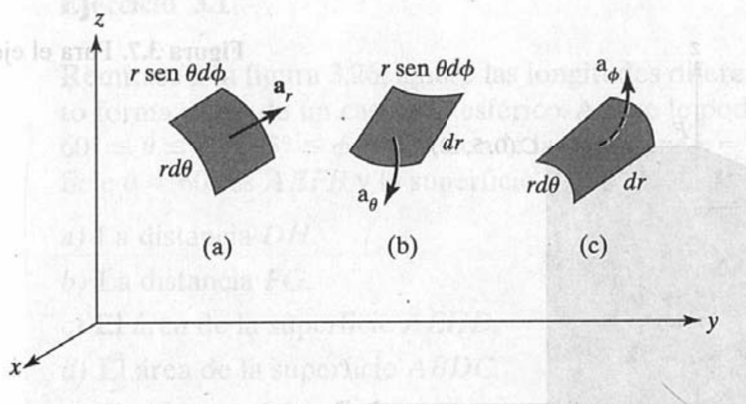


Figura 3.6. Áreas normales diferenciales en coordenadas esféricas: **(a)** $d\mathbf{S} = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_r$, **(b)** $d\mathbf{S} = r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$ y **(c)** $d\mathbf{S} = r\, dr\, d\theta\, \mathbf{a}_\phi$.

También esta vez es suficiente recordar $d\mathbf{l}$, de la que se obtienen fácilmente $d\mathbf{S}$ y dv. Por ejemplo, $d\mathbf{S}$ a lo largo de $\mathbf{a}_\theta$ se obtiene como el producto de las componentes de $d\mathbf{l}$ a lo largo de $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\phi$; esto es, $dr \cdot r \text{ sen } \theta \, d\phi$; dv es el producto de las tres componentes de $d\mathbf{l}$; es decir, $dr \cdot r\, d\theta \cdot r \text{ sen } \theta \, d\phi$.

Ejemplo 3.1

Considere el objeto que aparece en la figura 3.7. Calcule

a) La distancia BC.
b) La distancia CD.
c) El área de la superficie $ABCD$.
d) El área de la superficie ABO.
e) El área de la superficie $AOFD$.
f) El volumen $ABDCFO$.

Solución:

Aunque los puntos A, B, C y D están dados en coordenadas cartesianas, es obvio que el objeto posee simetría cilíndrica. Así, el problema debe resolverse en coordenadas cilíndricas. Los puntos se transforman de coordenadas cartesianas en cilíndricas de la manera siguiente:

$$A(5,0,0) \rightarrow A(5, 0°, 0)$$

$$B(0,5,0) \rightarrow B\left(5, \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$C(0,5,10) \rightarrow C\left(5, \frac{\pi}{2}, 10\right)$$

$$D(5,0,10) \rightarrow D(5, 0°, 10)$$

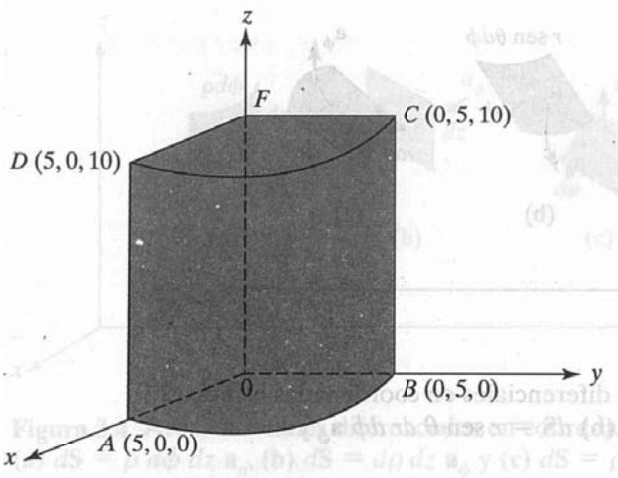


Figura 3.7. Para el ejemplo 3.1.

a) A lo largo de BC, $dl = dz$; por tanto,

$$BC = \int dl = \int_0^{10} dz = 10$$

b) A lo largo de CD, $dl = \rho\, d\phi$ y $\rho = 5$, así

$$CD = \int_0^{\pi/2} \rho\, d\phi = 5\phi \Big|_0^{\pi>2} = 2.5\pi$$

c) En cuanto a $ABCD$, $dS = \rho\, d\phi\, dz$, $\rho = 5$. En consecuencia,

$$\text{área } ABCD = \int dS = \int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{z=0}^{10} \rho\, d\phi\, dz = 5\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{10} dz \Big|_{\rho=5} = 25\pi$$

d) En cuanto a ABO,
$dS = \rho\, d\phi\, d\rho$ y $z = 0$, de modo que

$$\text{área} ABO = \int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{5} \rho\, d\phi\, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^5 \rho\, d\rho = 6.25\pi$$

e) En cuanto a $AOFD$, $dS = d\rho\, dz$ y $\phi = 0°$, así

$$\text{área } AOFD = \int_{\rho=0}^{5}\int_{z=0}^{10} d\rho\, dz = 50$$

f) Respecto del volumen $ABDCFO$, $dv = \rho\, d\phi\, dz\, d\rho$. Por tanto,

$$v = \int dv = \int_{\rho=0}^{5}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{z=0}^{10} \rho\, d\phi\, dz\, d\rho = \int_0^{10} dz \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^5 \rho\, d\rho = 62.5\pi$$

Ejercicio 3.1

Remítase a la figura 3.26; ignore las longitudes diferenciales e imagine que el objeto forma parte de un cascarón esférico. Así, se le podría describir como $3 \leq r \leq 5$, $60° \leq \theta \leq 90°$, $45° \leq \phi \leq 60°$, donde la superficie $r = 3$ equivale a $AEHD$, la superficie $\theta = 60°$ es $AEFB$ y la superficie $\phi = 45°$ es $ABCD$. Calcule

a) La distancia DH.

b) La distancia FG.

c) El área de la superficie $AEHD$.

d) El área de la superficie $ABDC$.

e) El volumen del objeto.

Respuestas: *a)* 0.7854, *b)* 2.618, *c)* 1.179, *d)* 4.189 y *e)* 4.276.

3.3. Integrales de línea, superficie y volumen

El ya conocido concepto de integración se prolongará en este apartado a casos en los que el integrando implica un vector. Por una línea se entiende la trayectoria a lo largo de una curva en el espacio. Usaremos indistintamente los términos *línea*, *curva* y *contorno*.

> La **integral de línea** $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ es la integral de la componente tangencial de **A** a lo largo de la curva L.

Dado un campo vectorial **A** y una curva L, definimos la integral

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b |\mathbf{A}| \cos\theta \, dl \tag{3.11}$$

como la *integral de línea* de **A** alrededor de L (fig. 3.8). Si la trayectoria de integración es una curva cerrada, como *abca* en la figura 3.8, la ecuación (3.11) se convierte en una integral de contorno cerrado

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.12}$$

la cual recibe el nombre de *circulación* de **A** alrededor de L.

Dado un campo vectorial **A** continuo en una región que contiene la superficie plana S, la *integral de superficie* o el *flujo* de **A** a través de S (fig. 3.9) se define como

$$\Psi = \int_S |\mathbf{A}| \cos\theta \, dS = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n \, dS$$

o simplemente

$$\boxed{\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}} \tag{3.13}$$

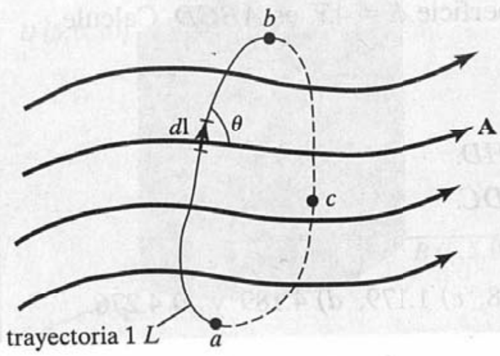


Figura 3.8. Trayectoria de integración de un campo vectorial **A**.

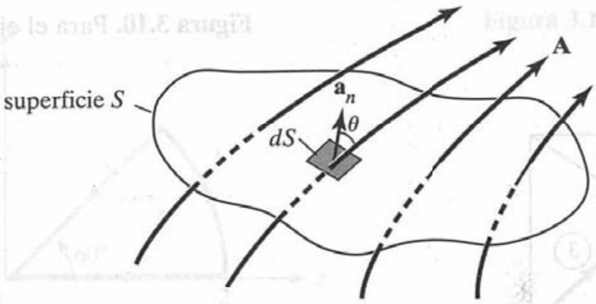


Figura 3.9. Flujo de un campo vectorial $\mathbf{A}$ a través de la superficie S.

donde, en cualquier punto sobre S, $\mathbf{a}_n$ es el vector unitario normal a S. En el caso de una superficie cerrada (que define un volumen), la ecuación (3.13) se convierte en

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.14}$$

o *flujo neto hacia fuera* de $\mathbf{A}$ desde S. Adviértase que una trayectoria cerrada define una superficie abierta, mientras que una superficie cerrada define un volumen (figs. 3.11 y 3.16).

Definimos la integral

$$\int_v \rho_v \, dv \tag{3.15}$$

como la *integral de volumen* del escalar ρ_v sobre el volumen v. El significado físico de una integral de línea, superficie o volumen depende de la naturaleza de la cantidad física representada por $\mathbf{A}$ o ρ_v. Cabe señalar que $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{S}$ y dv son como se les definió en la sección 3.2.

Ejemplo 3.2

Puesto que $\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y - y^2\mathbf{a}_z$, calcule la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de la trayectoria (cerrada) que aparece en la figura 3.10.

Solución:

La circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de la trayectoria L está dada por

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

donde la trayectoria ha sido dividida en segmentos numerados de 1 a 4, como se muestra en la figura 3.10.

Respecto del segmento 1, $y = 0 = z$

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x, \qquad d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{a}_x$$

Repárese en que $d\mathbf{l}$ siempre se considera a lo largo de $+\mathbf{a}_x$, de modo que en el segmento 1 la dirección se considera tomando en cuenta los límites de la integración. Así,

$$\int_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

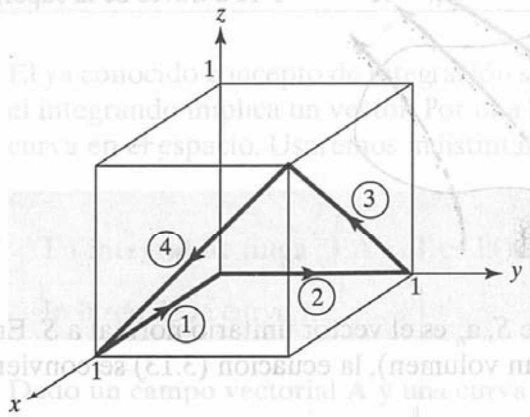


Figura 3.10. Para el ejemplo 3.2.

Respecto del segmento 2, $x = 0 = z$, $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{a}_z$, $d\mathbf{l} = dy\, \mathbf{a}_y$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Por tanto,

$$\int_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Respecto del segmento 3, $y = 1$, $\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$, y $d\mathbf{l} = dx\, \mathbf{a}_x, + dz\, \mathbf{a}_z$, de manera que

$$\int_3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int (x^2\, dx - dz)$$

Pero en 3, $z = x$; esto es, $dx = dz$. Así,

$$\int_3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

Respecto del segmento 4, $x = 1$, de modo que $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x - z\mathbf{a}_y - y^2\mathbf{a}_z$, y $d\mathbf{l} = dy\, \mathbf{a}_y + dz\, \mathbf{a}_z$. En consecuencia,

$$\int_4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int (-z\, dy - y^2 dz)$$

Pero en 4, $z = y$; es decir, $dz = dy$, de manera que

$$\int_4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 (-y - y^2)\, dy = -\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_1^0 = \frac{5}{6}$$

De la reunión de todos estos elementos obtenemos

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

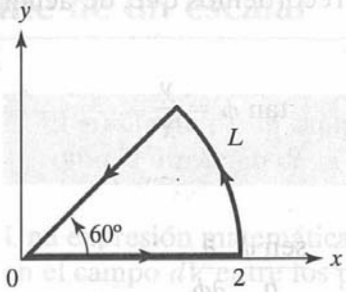


Figura 3.11. Para el ejercicio 3.2.

Ejercicio 3.2

Calcule la circulación de

$$\mathbf{A} = \rho \cos\phi\, \mathbf{a}_\rho + z \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_z$$

alrededor del borde L de la cuña definida por $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \phi \le 60°$, $z = 0$ que aparece en la figura 3.11.

Respuesta: 1.

3.4. Operador del

El operador del, el cual se escribe ∇, es el operador diferencial del vector. En coordenadas cartesianas,

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z} \tag{3.16}$$

Este operador diferencial del vector, también llamado *operador gradiente*, no es un vector en sí mismo, pero cuando, por ejemplo, opera sobre una función escalar, genera un vector. Este operador es útil para definir

1. El gradiente de un escalar V, el cual se escribe ∇V.
2. La divergencia de un vector $\mathbf{A}$, la cual se escribe $\nabla \cdot \mathbf{A}$.
3. El rotacional de un vector $\mathbf{A}$, el cual se escribe $\nabla \times \mathbf{A}$.
4. El laplaciano de un escalar V, el cual se escribe $\nabla^2 V$.

Cada uno de estos conceptos se definirá pormenorizadamente en las secciones posteriores. Sin embargo, antes debemos obtener expresiones para el operador del ∇ en coordenadas cilíndricas y esféricas. Esto se consigue sin problema empleando las fórmulas de transformación referidas en las secciones 2.3 y 2.4.

Para obtener ∇ en términos de ρ, ϕ y z, recordemos que, de acuerdo con la ecuación (2.7),[1]

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

De ahí que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{3.18}$$

De la sustitución de las ecuaciones (3.17) y (3.18) en la ecuación (3.16) y el empleo de la ecuación (2.9) obtenemos ∇, en coordenadas cilíndricas,

$$\boxed{\nabla = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}} \tag{3.19}$$

De igual forma, para obtener ∇ en términos de r, θ y ϕ, usamos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

para obtener

$$\frac{\partial}{\partial x} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.22}$$

La sustitución de las ecuaciones (3.20) a (3.22) en la ecuación (3.16) y el empleo de la ecuación (2.23) da como resultado ∇ que, en coordenadas esféricas:

$$\boxed{\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}} \tag{3.23}$$

Nótese que en las ecuaciones (3.19) y (3.23) los vectores unitarios están colocados a la derecha de los operadores diferenciales, puesto que dependen de los ángulos.

---

[1] Un método más general para deducir ∇, $\nabla\cdot\mathbf{A}$, $\nabla\times\mathbf{A}$, ∇V y $\nabla^2 V$ consiste en emplear coordenadas curvilíneas. Véase, por ejemplo, M. R. Spiegel, *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York, 1959, pp. 135-165.

3.5. Gradiente de un escalar

> El **gradiente** de un campo escalar V es un vector que representa tanto la magnitud como la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial de V.

Una expresión matemática para este gradiente puede obtenerse evaluando la diferencia en el campo dV entre los puntos P_1 y P_2 de la figura 3.12, donde V_1, V_2 y V_3 son contornos en los que V es constante. Con base en el cálculo,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \tag{3.24}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \cdot (dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z)$$

Para simplificar, sea

$$\mathbf{G} = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \tag{3.25}$$

Por tanto,

$$dV = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = G\cos\theta\, dl$$

o

$$\frac{dV}{dl} = G\cos\theta \tag{3.26}$$

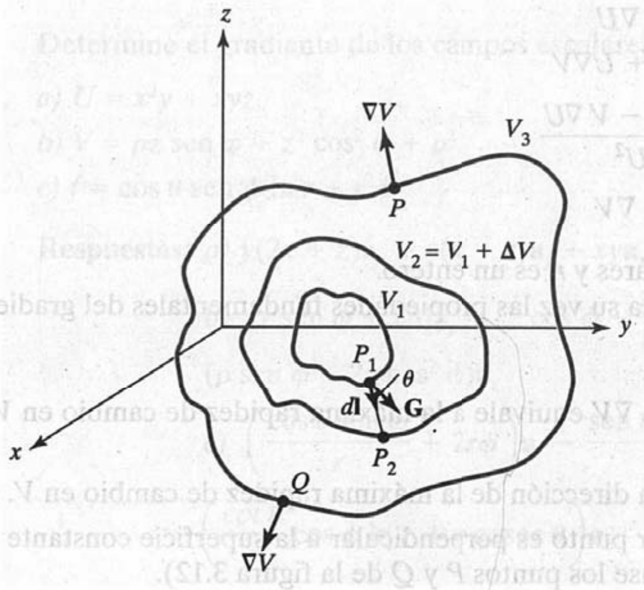


Figura 3.12. Gradiente de un escalar.

donde $d\mathbf{l}$ es el desplazamiento diferencial de P_1 a P_2 y θ es el ángulo entre $\mathbf{G}$ y $d\mathbf{l}$. De la ecuación (3.26) se deduce que dV/dl es máximo cuando $\theta = 0$; esto es, cuando $d\mathbf{l}$ está en la dirección de $\mathbf{G}$. En consecuencia,

$$\left.\frac{dV}{dl}\right|_{\text{máx}} = \frac{dV}{dn} = G \tag{3.27}$$

donde dV/dn es la derivada normal. Así, la magnitud y dirección de G son las de la máxima rapidez de cambio de V. Por definición, entonces, $\mathbf{G}$ es el gradiente de V. De este modo:

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \tag{3.28}$$

El gradiente de V puede expresarse en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas con base tanto en la ecuación (3.28) como en las ecuaciones (3.16), (3.19) y (3.23). En el caso de las coordenadas cartesianas

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

en el de las coordenadas cilíndricas,

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z} \tag{3.29}$$

y en el de las coordenadas esféricas,

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi} \tag{3.30}$$

He aquí las principales fórmulas de cálculo relacionadas con el gradiente, las cuales pueden comprobarse con facilidad:

a) $\nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U$ (3.31*a*)

b) $\nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V$ (3.31*b*)

c) $\nabla\left[\dfrac{V}{U}\right] = \dfrac{U\nabla V - V\nabla U}{U^2}$ (3.31*c*)

d) $\nabla V^n = nV^{n-1}\nabla V$ (3.31*d*)

donde U y V son escalares y n es un entero.

Las siguientes son a su vez las propiedades fundamentales del gradiente de un campo escalar V:

1. La magnitud de ∇V equivale a la máxima rapidez de cambio en V por unidad de distancia.
2. ∇V apunta en la dirección de la máxima rapidez de cambio en V.
3. ∇V en cualquier punto es perpendicular a la superficie constante V que pasa por ese punto (véanse los puntos P y Q de la figura 3.12).

4. La proyección (o componente) de ∇V en la dirección de un vector unitario $\mathbf{a}$ es $\nabla V \cdot \mathbf{a}$ y se llama *derivada direccional* de V a lo largo de $\mathbf{a}$. Ésta es la rapidez de cambio de V en la dirección de $\mathbf{a}$. En la ecuación (3.26), por ejemplo, dV/dl es la derivada direccional de V a lo largo de P_1P_2 en la figura 3.12. Así, el gradiente de una función escalar V proporciona tanto la dirección en la cual V cambia con mayor rapidez como la magnitud de la derivada direccional máxima de V.
5. Si $\mathbf{A} = \nabla V$, se dice que V es el potencial escalar de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 3.3

Halle el gradiente de los siguientes campos escalares:

a) $V = e^{-z} \operatorname{sen} 2x \cosh y$

b) $U = \rho^2 z \cos 2\phi$

c) $W = 10r \operatorname{sen}^2 \theta \cos \phi$

Solución:

a)
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$
$$= 2e^{-z}\cos 2x \cosh y\, \mathbf{a}_x + e^{-z}\operatorname{sen} 2x \operatorname{senh} y\, \mathbf{a}_y - e^{-z}\operatorname{sen} 2x \cosh y\, \mathbf{a}_z$$

b)
$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{a}_z$$
$$= 2\rho z \cos 2\phi\, \mathbf{a}_\rho - 2\rho z \operatorname{sen} 2\phi\, \mathbf{a}_\phi + \rho^2 \cos 2\phi\, \mathbf{a}_z$$

c)
$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial W}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$
$$= 10 \operatorname{sen}^2\theta \cos\phi\, \mathbf{a}_r + 10 \operatorname{sen} 2\theta \cos\phi\, \mathbf{a}_\theta - 10 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\phi$$

Ejercicio 3.3

Determine el gradiente de los campos escalares siguientes:

a) $U = x^2 y + xyz$

b) $V = \rho z \operatorname{sen}\phi + z^2 \cos^2\phi + \rho^2$

c) $f = \cos\theta \operatorname{sen}\phi \ln r + r^2\phi$

Respuestas: *a)* $y(2x + z)\mathbf{a}_x + x(x + z)\mathbf{a}_y + xy\mathbf{a}_z$

b) $(z \operatorname{sen}\phi + 2\rho)\mathbf{a}_\rho + \left(z\cos\phi - \frac{z^2}{\rho}\operatorname{sen} 2\phi\right)\mathbf{a}_\phi + (\rho \operatorname{sen}\phi + 2z\cos^2\phi)\mathbf{a}_z$

c) $\left(\frac{\cos\theta \operatorname{sen}\phi}{r} + 2r\phi\right)\mathbf{a}_r - \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{r}\ln r\, \mathbf{a}_\theta + \left(\frac{\cot\theta}{r}\cos\phi \ln r + r \operatorname{cosec}\theta\right)\mathbf{a}_\phi$

Ejemplo 3.4 Dado $W = x^2y^2 + xyz$, calcule ∇W y la derivada direccional dW/dl en la dirección $3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$ en $(2, -1, 0)$.

Solución:
$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial W}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial W}{\partial z}\mathbf{a}_z$$
$$= (2xy^2 + yz)\mathbf{a}_x + (2x^2y + xz)\mathbf{a}_y + (xy)\mathbf{a}_z$$

En $(2, -1, 0)$: $\nabla W = 4\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$

Por tanto,

$$\frac{dW}{dl} = \nabla W \cdot \mathbf{a}_l = (4, -8, -2) \cdot \frac{(3, 4, 12)}{13} = -\frac{44}{13}$$

Ejercicio 3.4

Dado $\Phi = xy + yz + xz$, halle el gradiente Φ en el punto $(1, 2, 3)$ y la derivada direccional de Φ en el mismo punto en la dirección hacia el punto $(3, 4, 4)$.

Respuesta: $5\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$, 7.

Ejemplo 3.5 Encuentre el ángulo en el que la línea $x = y = 2z$ interseca la elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$.

Solución:

Sea que la línea y la elipsoide se encuentran en el ángulo ψ, como se muestra en la figura 3.13. La línea $x = y = 2z$ puede representarse como

$$\mathbf{r}(\lambda) = 2\lambda\mathbf{a}_x + 2\lambda\mathbf{a}_y + \lambda\mathbf{a}_z$$

donde λ es un parámetro. En el punto en el que la línea y la elipsoide se encuentran,

$$(2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + 2\lambda^2 = 10 \rightarrow \lambda = \pm 1$$

Considerando $\lambda = 1$ (por el momento), el punto de intersección es $(x, y, z) = (2, 2, 1)$. En este punto, $\mathbf{r} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$.

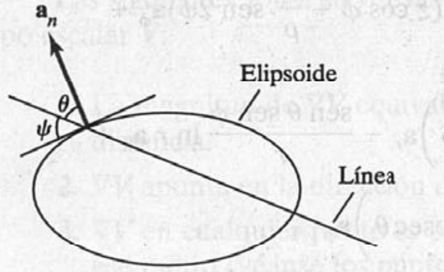


Figura 3.13. Para el ejemplo 3.5; plano de intersección de una línea con una elipsoide.

La superficie de la elipsoide está definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 10$$

El gradiente de f es

$$\nabla f = 2x\,\mathbf{a}_x + 2y\,\mathbf{a}_y + 4z\,\mathbf{a}_z$$

En (2, 2, 1), $\nabla f = 4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$. Por tanto, un vector unitario normal a la elipsoide en el punto de intersección es

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \pm \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}$$

Adoptando el signo positivo (por el momento), el ángulo entre $\mathbf{a}_n$ y $\mathbf{r}$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{r}|} = \frac{2 + 2 + 1}{\sqrt{3}\,\sqrt{9}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \operatorname{sen}\psi$$

Así, $\psi = 74.21°$. Puesto que dispusimos de opciones de + o − para λ y $\mathbf{a}_n$, en realidad hay cuatro ángulos posibles, dados por sen $\psi = \pm 5/(3\sqrt{3})$.

Ejercicio 3.5

Calcule el ángulo entre las perpendiculares o normales a las superficies $x^2y + z = 3$ y $x \log z - y^2 = -4$ en el punto de interseccción (−1, 2, 1).

Respuesta: 73.4°.

3.6. Divergencia de un vector y teorema de la divergencia

En la sección 3.3 se señaló que de la integral $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ se obtiene el flujo neto hacia fuera de un campo vectorial **A** desde una superficie cerrada *S*. Ahora definiremos la divergencia de **A** como el flujo neto hacia fuera por unidad de volumen por un incremento de superficie cerrada.

La **divergencia** de **A** en un punto dado *P* es el flujo *hacia fuera* por unidad de volumen a medida que el volumen se contrae alrededor de *P*.

Por tanto,

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \tag{3.32}$$

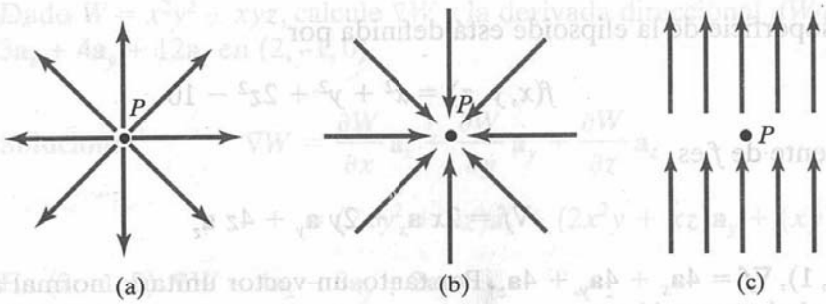


Figura 3.14. Ilustración de la divergencia de un campo vectorial en P; **(a)** divergencia positiva, **(b)** divergencia negativa y **(c)** divergencia cero.

donde Δv es el volumen encerrado por la superficie cerrada S en la que se ubica P. Físicamente, la divergencia del campo vectorial $\mathbf{A}$ en un punto dado puede considerarse una medida del grado en que ese campo diverge o emana de tal punto. En la figura 3.14*(a)* se muestra que la divergencia de un campo vectorial en el punto P es positiva cuando el vector diverge en (o se aparta de) P. En la figura 3.14*(b)* aparece un campo vectorial con divergencia negativa (o convergencia) en P, y en la figura 3.14*(c)* un campo vectorial con divergencia cero en P. La divergencia de un campo vectorial también puede concebirse simplemente como el límite de la resistencia de origen del campo por unidad de volumen (o densidad de origen); es positiva en un punto de *origen* en el campo, negativa en un punto de *confluencia* y cero cuando no hay confluencia ni origen.

De la definición en la ecuación (3.32) puede obtenerse una expresión para $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas. Supóngase que deseamos evaluar la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{A}$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$; sea que ese punto esté encerrado por un volumen diferencial, como en la figura 3.15. La integral de superficie de la ecuación (3.32) se obtiene de

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\int_{\text{anterior}} + \int_{\text{posterior}} + \int_{\text{izquierdo}} + \int_{\text{derecho}} + \int_{\text{superior}} + \int_{\text{inferior}} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.33}$$

Un desarrollo tridimensional en series de Taylor de A_x alrededor de P es

$$A_x(x, y, z) = A_x(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P + (y - y_0) \left.\frac{\partial A_x}{\partial y}\right|_P \tag{3.34}$$

$$+ (z - z_0) \left.\frac{\partial A_x}{\partial z}\right|_P + \text{ términos de orden superior}$$

Respecto del lado anterior, $x = x_0 + dx/2$ y $d\mathbf{S} = dy\, dz\, \mathbf{a}_x$. Así,

$$\int_{\text{anterior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dy\, dz \left[A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{dx}{2} \left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P \right] + \text{ términos de orden superior}$$

Respecto del lado posterior, $x = x_0 - dx/2$, $d\mathbf{S} = dy\, dz\, (-\mathbf{a}_x)$. Así,

$$\int_{\text{posterior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -dy\, dz \left[A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{dx}{2} \left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P \right] + \text{ términos de orden superior}$$

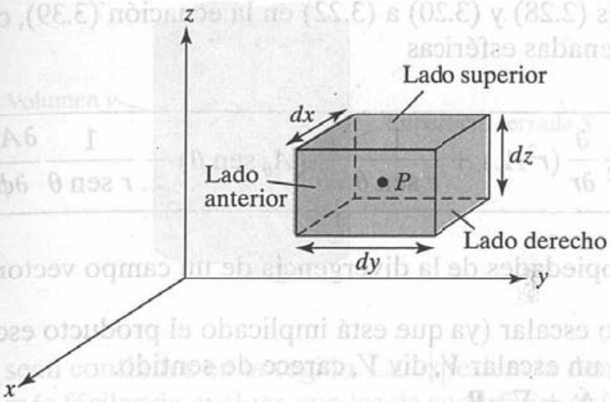


Figura 3.15. Evaluación de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$.

En consecuencia,

$$\int_{\text{anterior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{posterior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\, dy\, dz \left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P + \text{términos de orden superior} \tag{3.35}$$

Siguiendo pasos análogos obtenemos

$$\int_{\text{izquierdo}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{derecho}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\, dy\, dz \left.\frac{\partial A_y}{\partial y}\right|_P + \text{términos de orden superior} \tag{3.36}$$

y

$$\int_{\text{superior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{inferior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\, dy\, dz \left.\frac{\partial A_z}{\partial z}\right|_P + \text{términos de orden superior} \tag{3.37}$$

Al sustituir las ecuaciones (3.35) a (3.37) en la ecuación (3.33), considerando que $\Delta v = dx\, dy\, dz$, obtenemos

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \left.\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)\right|_{\text{en } P} \tag{3.38}$$

puesto que los términos de orden superior tienden a cero conforme $\Delta v \to 0$. En un sistema cartesiano, así, la divergencia de $\mathbf{A}$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \tag{3.39}$$

Expresiones similares para $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en otros sistemas de coordenadas pueden obtenerse directamente de la ecuación (3.32) o transformando la ecuación (3.39) en el sistema de coordenadas que corresponda. En el caso de las coordenadas cilíndricas, la sustitución de las ecuaciones (2.15), (3.17) y (3.18) en la ecuación (3.39) da como resultado

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \tag{3.40}$$

Al sustituir las ecuaciones (2.28) y (3.20) a (3.22) en la ecuación (3.39), obtenemos la divergencia de **A** en coordenadas esféricas

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}} \tag{3.41}$$

Las siguientes son las propiedades de la divergencia de un campo vectorial:

1. Produce un campo escalar (ya que está implicado el producto escalar).
2. La divergencia de un escalar V, div V, carece de sentido.
3. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
4. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

Con base en la definición de la divergencia de **A** en la ecuación (3.32), cabe esperar que

$$\boxed{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv} \tag{3.42}$$

Esto se conoce como el *teorema de la divergencia*, o *teorema de Gauss-Ostrogradsky*.

El **teorema de la divergencia** establece que el flujo total hacia fuera de un campo vectorial **A** a través de la superficie *cerrada* S equivale a la integral de volumen de la divergencia de **A**.

Para comprobar el teorema de la divergencia, el volumen v se subdivide en gran número de pequeñas celdas. Si la celda de orden k tiene un volumen Δv_k y está circunscrita por la superficie S_k

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_k \oint_{S_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_k \frac{\oint_{S_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v_k} \Delta v_k \tag{3.43}$$

Puesto que el flujo hacia fuera de una celda es para algunas celdas vecinas un flujo hacia dentro, hay anulación en la superficie interior, de modo que la suma de las integrales de superficie sobre la de S_k es igual a la integral de superficie sobre la superficie S. La adopción del límite del miembro derecho de la ecuación (3.43) y la incorporación de la ecuación (3.32) resulta en

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv \tag{3.44}$$

es decir, el teorema de la divergencia. Este teorema se aplica a todo volumen v circunscrito por la superficie cerrada S, como se muestra en la figura 3.16, siempre que **A** y $\nabla \cdot$ **A**

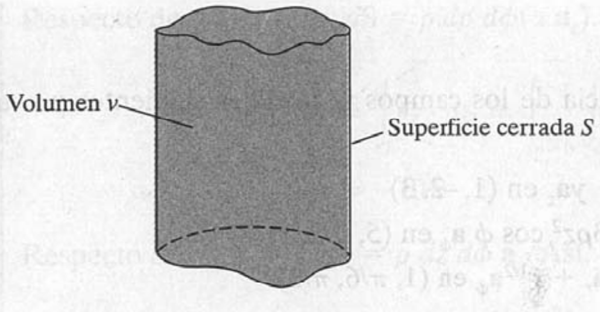


Figura 3.16. Volumen v encerrado por la superficie S.

sean continuos en la región. La experiencia demuestra que las integrales de volumen son más fáciles de evaluar que las de superficie. Así, para determinar el flujo de **A** a través de una superficie cerrada es preferible proceder con el miembro derecho, no con el izquierdo, de la ecuación (3.42).

Ejemplo 3.6

Determine la divergencia de estos campos vectoriales:

a) $\mathbf{P} = x^2yz\,\mathbf{a}_x + xz\,\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{Q} = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho^2 z\,\mathbf{a}_\phi + z\cos\phi\,\mathbf{a}_z$

c) $\mathbf{T} = \dfrac{1}{r^2}\cos\theta\,\mathbf{a}_r + r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\theta\,\mathbf{a}_\phi$

Solución:

a)
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{P} &= \frac{\partial}{\partial x}P_x + \frac{\partial}{\partial y}P_y + \frac{\partial}{\partial z}P_z\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(xz)\\ &= 2xyz + x\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{Q} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho Q_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(Q_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}Q_z\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\,\text{sen}\,\phi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\rho^2 z + \frac{\partial}{\partial z}(z\cos\phi)\\ &= 2\,\text{sen}\,\phi + \cos\phi\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{T} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2T_r) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(T_\theta\,\text{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(T_\phi)\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\,\text{sen}^2\,\theta\cos\phi) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\theta)\\ &= 0 + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\cos\phi + 0\\ &= 2\cos\theta\cos\phi\end{aligned}$$

Ejercicio 3.6

Determine la divergencia de los campos vectoriales siguientes y evalúelos en los puntos especificados.

a) $\mathbf{A} = yz\mathbf{a}_x + 4xy\mathbf{a}_y + y\mathbf{a}_z$ en $(1, -2, 3)$

b) $\mathbf{B} = \rho z \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_\rho + 3\rho z^2 \cos \phi \, \mathbf{a}_\phi$ en $(5, \pi/2, 1)$

c) $\mathbf{C} = 2r \cos \theta \cos \phi \, \mathbf{a}_r + r^{1/2}\mathbf{a}_\phi$ en $(1, \pi/6, \pi/3)$

Respuestas: *a)* $4x, 4$, *b)* $(2 - 3z)z \operatorname{sen} \phi, -1$ y *c)* $6 \cos \theta \cos \phi, 2.598$.

Ejemplo 3.7

Si $\mathbf{G}(r) = 10e^{-2z}(\rho\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_z)$, determine el flujo de $\mathbf{G}$ hacia fuera de la superficie entera del cilindro $\rho = 1, 0 \leq z \leq 1$. Compruebe el resultado con el teorema de la divergencia.

Solución:

Si Ψ es el flujo de $\mathbf{G}$ a través de la superficie dada, como se muestra en la figura 3.17, entonces

$$\Psi = \oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \Psi_t + \Psi_b + \Psi_s$$

donde Ψ_t, Ψ_b, y Ψ_s son los flujos a través de la parte superior, la parte inferior y los lados (superficie curva) del cilindro, como se observa en la figura 3.17.

Respecto de Ψ_t, $z = 1$, $d\mathbf{S} = \rho \, d\rho \, d\phi \, \mathbf{a}_z$. Así,

$$\Psi_t = \int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2}\rho \, d\rho \, d\phi = 10e^{-2}(2\pi)\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^1$$

$$= 10\pi e^{-2}$$

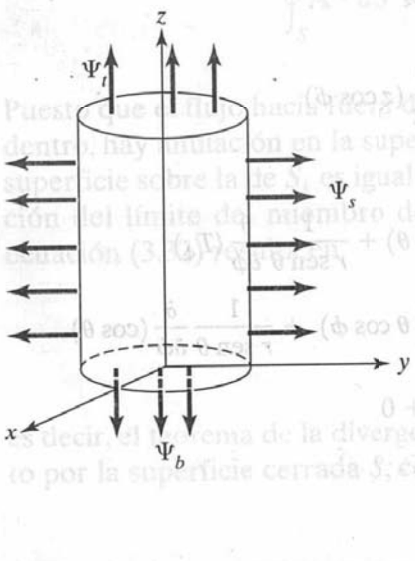


Figura 3.17. Para el ejemplo 3.7.

Respecto de Ψ_b, $z = 0$, y $d\mathbf{S} = \rho\, d\rho\, d\phi(-\mathbf{a}_z)$. Por tanto,

$$\Psi_b = \int_b \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^0 \rho\, d\rho\, d\phi = -10(2\pi)\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1$$

$$= -10\pi$$

Respecto de Ψ_s, $\rho = 1$, $d\mathbf{S} = \rho\, dz\, d\phi\, \mathbf{a}_\rho$. Así,

$$\Psi_s = \int_s \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{z=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2z}\rho^2 dz\, d\phi = 10(1)^2(2\pi)\left.\frac{e^{-2z}}{-2}\right|_0^1$$

$$= 10\pi(1 - e^{-2})$$

En consecuencia,

$$\Psi = \Psi_t + \Psi_b + \Psi_s = 10\pi\, e^{-2} - 10\pi + 10\pi(1 - e^{-2}) = 0$$

Alternativamente, puesto que S es una superficie cerrada, podemos aplicar el teorema de la divergencia:

$$\Psi = \oint_S G \cdot d\mathbf{S} = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{G})\, dv$$

Pero

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho G_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}G_\phi + \frac{\partial}{\partial z}G_z$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 10e^{-2z}) - 20e^{-2z} = 0$$

lo que demuestra que $\mathbf{G}$ no tiene origen. Por tanto,

$$\Psi = \int_v (\nabla \cdot G)\, dv = 0$$

Ejercicio 3.7

Determine el flujo de $\mathbf{D} = \rho^2 \cos^2 \phi\, \mathbf{a}_\rho + z \,\text{sen}\, \phi\, \mathbf{a}_\phi$ sobre la superficie cerrada del cilindro $0 \leq z \leq 1$, $\rho = 4$. Compruebe con el teorema de la divergencia.

Respuesta: 64π.

3.7. Rotacional de un vector y teorema de Stokes

En la sección 3.3 definimos la circulación de un campo vectorial $\mathbf{A}$ alrededor de una trayectoria cerrada L como la integral $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$.

El **rotacional** de **A** es un vector axial (o rotacional) cuya magnitud es la circulación máxima de **A** por unidad de área conforme el área tiende a cero y cuya dirección es la dirección normal del área cuando el área se orienta de tal forma que de ello resulta la circulación máxima.

Esto es,

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right) \mathbf{a}_{n_{\text{máx}}} \tag{3.45}$$

donde el área ΔS está circunscrita por la curva L y $\mathbf{a}_n$ es el vector unitario normal a la superficie ΔS, el cual se determina aplicando la regla de la mano derecha.

A fin de obtener una expresión para $\nabla \times \mathbf{A}$ a partir de la definición en la ecuación (3.45), considérese el área diferencial en el plano yz de la figura 3.18. La integral de línea de la ecuación (3.45) se obtiene de la manera siguiente:

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.46}$$

Se desarrollan entonces las componentes del campo en desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto central $P(x_o, y_o, z_o)$ como en la ecuación (3.34), y se evalúa la ecuación (3.46). En el lado ab, $d\mathbf{l} = dy\,\mathbf{a}_y$ y $z = z_o - dz/2$, de modo que

$$\int_{ab} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dy \left[A_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_P \right] \tag{3.47}$$

En el lado bc, $d\mathbf{l} = dz\,\mathbf{a}_z$ y $y = y_0 + dy/2$, de manera que

$$\int_{bc} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dz \left[A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_P \right] \tag{3.48}$$

En el lado cd, $d\mathbf{l} = dy\,\mathbf{a}_y$ y $z = z_0 + dz/2$, de modo que

$$\int_{cd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dy \left[A_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_P \right] \tag{3.49}$$

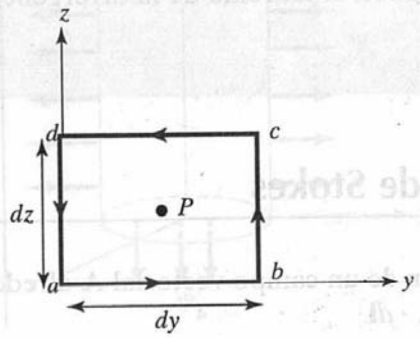


Figura 3.18. Contorno usado para evaluar la componente x de $\nabla \times \mathbf{A}$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$.

En el lado da, $d\mathbf{l} = dz\, \mathbf{a}_z$ y $y = y_0 - dy/2$, de tal forma que

$$\int_{da} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dz \left[A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_P \right] \tag{3.50}$$

La sustitución de las ecuaciones (3.47) a (3.50) en la ecuación (3.46), considerando que $\Delta S = dy\, dz$, resulta en

$$\lim_{\Delta S \to 0} \oint_L \frac{\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

o

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{3.51}$$

Las componentes y y x del rotacional de $\mathbf{A}$ pueden hallarse de la misma manera. Así obtenemos

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{3.52a}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{3.52b}$$

La definición de $\nabla \times \mathbf{A}$ en la ecuación (3.45) es independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas, el rotacional de $\mathbf{A}$ se encuentra fácilmente mediante

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{3.53}$$

o

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y \\ + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}} \tag{3.54}$$

La transformación de la ecuación (3.54) por medio de las técnicas de transformación de puntos y vectores referida en el capítulo 2 nos proporciona el rotacional de $\mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas, como

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\, \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

o

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z \tag{3.55}$$

y en coordenadas esféricas,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\,\mathbf{a}_\theta & r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\operatorname{sen}\theta\, A_\phi \end{vmatrix}$$

o

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial(A_\phi \operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi \tag{3.56}$$

Las siguientes son las propiedades del rotacional:

1. El rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial.
2. El rotacional de un campo escalar V, $\nabla \times V$, carece de sentido.
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
4. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
5. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = V\nabla \times \mathbf{A} + \nabla V \times \mathbf{A}$
6. La divergencia del rotacional de un campo vectorial tiende a cero, esto es, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.
7. El rotacional del gradiente de un campo escalar tiende a cero, esto es, $\nabla \times \nabla V = 0$.

En el apéndice A se encuentran otras propiedades del rotacional.

El significado físico del rotacional de un campo vectorial es evidente en la ecuación (3.45); el rotacional proporciona el valor máximo de la circulación del campo por unidad de área (o densidad de circulación) e indica la dirección a lo largo de la que ocurre este valor máximo. El rotacional de un campo vectorial **A** en un punto P puede considerarse una medida de la circulación o del grado en que el campo gira alrededor de P. En la figura 3.19*(a)*, por ejemplo, se muestra el rotacional de un campo vectorial alrededor de P dirigido hacia fuera de la página, mientras que en la figura 3.19*(b)* aparece un campo vectorial con rotacional cero.

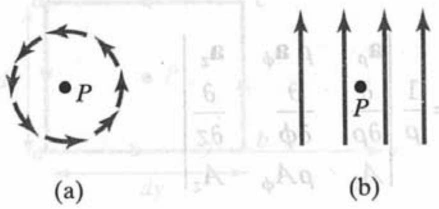


Figura 3.19. Ilustración de un rotacional: **(a)** rotacional en P que apunta hacia fuera de la página; **(b)** rotacional en P igual a cero.

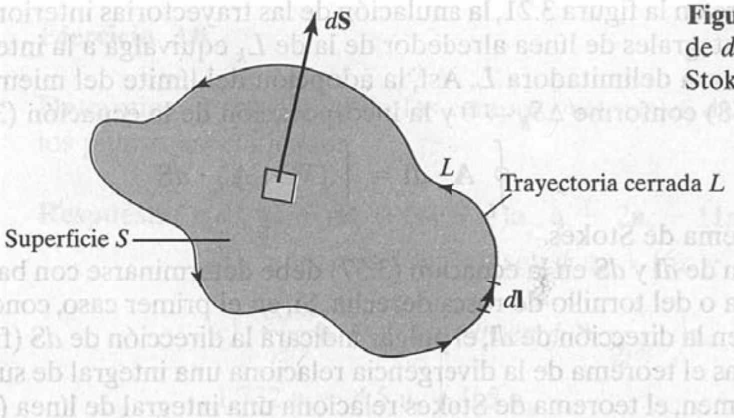


Figura 3.20. Determinación del sentido de $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$ implicado en el teorema de Stokes.

Asimismo, de la definición del rotacional de **A** en la ecuación (3.45) cabe esperar que

$$\boxed{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}} \tag{3.57}$$

Esto se conoce como el *teorema de Stokes*.

El **teorema de Stokes** establece que la circulación de un campo vectorial **A** alrededor de una trayectoria (cerrada) L es igual a la integral de superficie del rotacional de **A** sobre la superficie abierta S circunscrita por L (figura 3.20), siempre que **A** y $\nabla \times \mathbf{A}$ sean continuos en S.

La comprobación del teorema de Stokes es similar a la del teorema de la divergencia. La superficie S se subdivide en gran número de celdas, como en la figura 3.21. Si la celda de orden k tiene un área superficial ΔS_k y está circunscrita por la trayectoria L_k,

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \frac{\oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_k} \Delta S_k \tag{3.58}$$

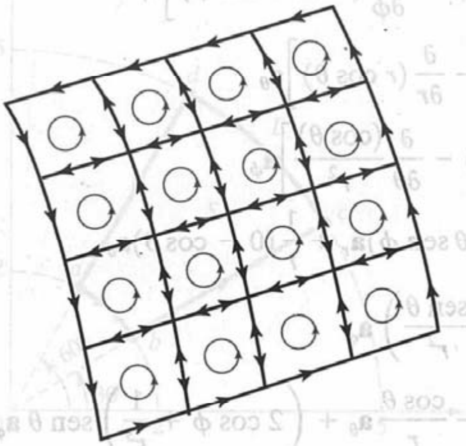


Figura 3.21. Ilustración del teorema de Stokes.

Como se muestra en la figura 3.21, la anulación de las trayectorias interiores ocasiona que la suma de las integrales de línea alrededor de la de L_k equivalga a la integral de línea alrededor de la curva delimitadora L. Así, la adopción del límite del miembro derecho de la ecuación (3.58) conforme $\Delta S_k \to 0$ y la incorporación de la ecuación (3.45) resulta en

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

es decir, el teorema de Stokes.

La dirección de $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$ en la ecuación (3.57) debe determinarse con base en la regla de la mano derecha o del tornillo de rosca derecha. Si, en el primer caso, concedemos que los dedos apuntan en la dirección de $d\mathbf{l}$, el pulgar indicará la dirección de $d\mathbf{S}$ (fig. 3.20). Adviértase que mientras el teorema de la divergencia relaciona una integral de superficie con una integral de volumen, el teorema de Stokes relaciona una integral de línea (circulación) con una integral de superficie.

Ejemplo 3.8

Determine el rotacional de los campos vectoriales del ejemplo 3.6.

Solución:

a)
$$\nabla \times \mathbf{P} = \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$
$$= (0 - 0)\mathbf{a}_x + (x^2y - z)\mathbf{a}_y + (0 - x^2z)\mathbf{a}_z$$
$$= (x^2y - z)\mathbf{a}_y - x^2z\mathbf{a}_z$$

b)
$$\nabla \times \mathbf{Q} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q_z}{\partial \phi} - \frac{\partial Q_\phi}{\partial z}\right]\mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial Q_\rho}{\partial z} - \frac{\partial Q_z}{\partial \rho}\right]\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho Q_\phi) - \frac{\partial Q_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$
$$= \left(\frac{-z}{\rho}\operatorname{sen}\phi - \rho^2\right)\mathbf{a}_\rho + (0 - 0)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}(3\rho^2 z - \rho\cos\phi)\mathbf{a}_z$$
$$= \frac{1}{\rho}(z\operatorname{sen}\phi + \rho^3)\mathbf{a}_\rho + (3\rho z - \cos\phi)\mathbf{a}_z$$

c)
$$\nabla \times \mathbf{T} = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(T_\phi\operatorname{sen}\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}T_\theta\right]\mathbf{a}_r$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}T_r - \frac{\partial}{\partial r}(rT_\phi)\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rT_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}T_r\right]\mathbf{a}_\phi$$
$$= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\operatorname{sen}\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(r\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\right]\mathbf{a}_r$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{(\cos\theta)}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)\right]\mathbf{a}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\operatorname{sen}\theta\cos\phi) - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(\cos\theta)}{r^2}\right]\mathbf{a}_\phi$$
$$= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}(\cos 2\theta + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}(0 - \cos\theta)\mathbf{a}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left(2r\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\right)\mathbf{a}_\phi$$
$$= \left(\frac{\cos 2\theta}{r\operatorname{sen}\theta} + \operatorname{sen}\phi\right)\mathbf{a}_r - \frac{\cos\theta}{r}\mathbf{a}_\theta + \left(2\cos\phi + \frac{1}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\phi$$

Ejercicio 3.8

Determine el rotacional de los campos vectoriales del ejercicio 3.6 y evalúelos en los puntos especificados.

Respuesta: *a)* $\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (4y - z)\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - 11\mathbf{a}_z$

b) $-6\rho z \cos\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi + (6z - 1)z\cos\phi\,\mathbf{a}_z$, $5\mathbf{a}_\phi$

c) $\dfrac{\cot\theta}{r^{1/2}}\mathbf{a}_r - \left(2\cot\theta \operatorname{sen}\phi + \dfrac{3}{2r^{1/2}}\right)\mathbf{a}_\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$,

$1.732\,\mathbf{a}_r - 4.5\,\mathbf{a}_\theta + 0.5\,\mathbf{a}_\phi$.

Ejemplo 3.10

Si $\mathbf{A} = \rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi$, evalúe $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ alrededor de la trayectoria que se muestra en la figura 3.22. Compruebe con el teorema de Stokes.

Solución:

Sea

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a\right]\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

donde la trayectoria L se ha dividido en los segmentos ab, bc, cd y da, como se indica en la figura 3.22.

A lo largo de ab, $\rho = 2$ y $d\mathbf{l} = \rho\, d\phi\,\mathbf{a}_\phi$. Por tanto,

$$\int_a^b \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\phi=60^\circ}^{30^\circ} \rho \operatorname{sen}\phi\, d\phi = 2(-\cos\phi)\Big|_{60^\circ}^{30^\circ} = -(\sqrt{3} - 1)$$

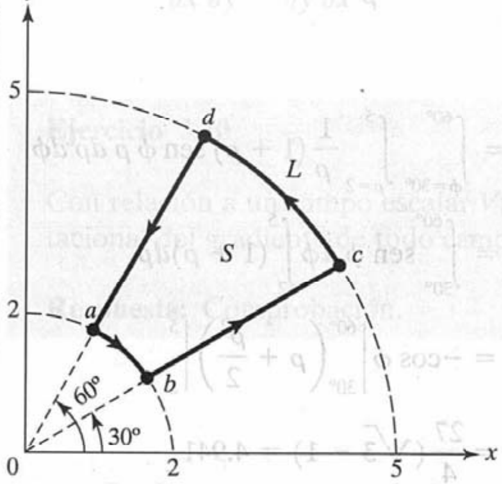


Figura 3.22. Para el ejemplo 3.9.

A lo largo de bc, $\phi = 30°$ y $d\mathbf{l} = d\rho\, \mathbf{a}_\rho$. Así,

$$\int_b^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\rho=2}^{5} \rho \cos\phi\, d\rho = \cos 30° \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_2^5 = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

A lo largo de cd, $\rho = 5$ y $d\mathbf{l} = \rho\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$. Por tanto,

$$\int_c^d \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\phi=30°}^{60°} \rho \operatorname{sen}\phi\, d\phi = 5(-\cos\phi)\Big|_{30°}^{60°} = \frac{5}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

A lo largo de da, $\phi = 60°$ y $d\mathbf{l} = d\rho\, \mathbf{a}_\rho$. Así,

$$\int_d^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\rho=5}^{2} \rho \cos\phi\, d\rho = \cos 60° \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_5^2 = -\frac{21}{4}$$

La reunión de todos estos elementos da como resultado

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\sqrt{3} + 1 + \frac{21\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} - \frac{21}{4}$$

$$= \frac{27}{4}(\sqrt{3} - 1) = 4.941$$

Aplicando el teorema de Stokes (puesto que L es una trayectoria cerrada)

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Pero $d\mathbf{S} = \rho\, d\phi\, d\rho\, \mathbf{a}_z$ y

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right] + \mathbf{a}_\phi\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right] + \mathbf{a}_z \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]$$

$$= (0 - 0)\mathbf{a}_\rho + (0 - 0)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}(1 + \rho) \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_z$$

Por consiguiente,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=30°}^{60°} \int_{\rho=2}^{5} \frac{1}{\rho}(1 + \rho) \operatorname{sen}\phi\, \rho\, d\rho\, d\phi$$

$$= \int_{30°}^{60°} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_2^5 (1 + \rho) d\rho$$

$$= -\cos\phi \Big|_{30°}^{60°} \left(\rho + \frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_2^5$$

$$= \frac{27}{4}(\sqrt{3} - 1) = 4.941$$

Ejercicio 3.9

Use el teorema de Stokes para comprobar el resultado que obtuvo en el ejercicio 3.2.

Respuesta: 1.

Ejemplo 3.10

Con relación a un campo vectorial **A**, demuestre explícitamente que $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$; es decir, que la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es cero.

Solución:
Lo mismo que la que se refiere en el ejercicio 3.10, esta identidad vectorial es muy útil en electromagnetismo. Para efectos de simplificación, supongamos que **A** se encuentra en coordenadas cartesianas.

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right), -\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\, \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

puesto que $\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y\, \partial x}$ y así sucesivamente.

Ejercicio 3.10

Con relación a un campo escalar V, demuestre que $\nabla \times \nabla V = 0$; esto es, que el rotacional del gradiente de todo campo escalar tiende a cero.

Respuesta: Comprobación.

3.8. Laplaciano de un escalar

Para efectos prácticos es conveniente contar con un solo operador que sea el compuesto de los operadores gradiente y divergencia. Tal operador es el *laplaciano*.

El **laplaciano** de un campo escalar V, el cual se escribe $\nabla^2 V$, es la divergencia del gradiente de V.

Así, en coordenadas cartesianas,

laplaciano $V = \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right] \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right] \tag{3.59}$$

esto es,

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} \tag{3.60}$$

Adviértase que el laplaciano de un campo escalar es otro campo escalar.

El laplaciano de V en otros sistemas de coordenadas puede obtenerse mediante transformación a partir de la ecuación (3.60). En coordenadas cilíndricas,

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} \tag{3.61}$$

y en coordenadas esféricas,

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}} \tag{3.62}$$

Se dice que un campo escalar V es *armónico* en una región dada si su laplaciano tiende a cero en esa región. En otras palabras, si

$$\nabla^2 V = 0 \tag{3.63}$$

se satisface en la región, la solución para V en la ecuación (3.63) es armónica (de la forma de seno o coseno). La ecuación (3.63) se llama *ecuación de Laplace*. Dedicaremos a resolverla buena parte del capítulo 6.

Sólo hemos considerado el laplaciano de un escalar. Pero puesto que el operador laplaciano ∇^2 es un operador escalar, también es posible definir el laplaciano de un vector **A**. En este contexto, $\nabla^2\mathbf{A}$ no debe interpretarse como la divergencia del gradiente de **A**, lo cual carece de sentido, sino como el gradiente de la divergencia de **A** menos el rotacional del rotacional de **A**. Es decir,

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}} \tag{3.64}$$

Esta ecuación puede aplicarse al cálculo de $\nabla^2 \mathbf{A}$ en cualquier sistema de coordenadas. En el sistema cartesiano (y sólo en él), la ecuación (3.64) se convierte en

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \tag{3.65}$$

Ejemplo 3.11

Halle el laplaciano de los campos escalares del ejemplo 3.3; es decir,

a) $V = e^{-z} \operatorname{sen} 2x \cosh y$

b) $U = \rho^2 z \cos 2\phi$

c) $W = 10r \operatorname{sen}^2 \theta \cos \phi$

Solución:

En el sistema cartesiano, el laplaciano puede hallarse tomando la primera derivada y después la segunda.

$$
\begin{aligned}
a)\ \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2e^{-z} \cos 2x \cosh y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{-z} \cos 2x \operatorname{senh} y) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(-e^{-z} \operatorname{sen} 2x \cosh y) \\
&= -4e^{-z} \operatorname{sen} 2x \cosh y + e^{-z} \operatorname{sen} 2x \cosh y + e^{-z} \operatorname{sen} 2x \cosh y \\
&= -2e^{-z} \operatorname{sen} 2x \cosh y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ \nabla^2 U &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho^2 z \cos 2\phi) - \frac{1}{\rho^2} 4\rho^2 z \cos 2\phi + 0 \\
&= 4z \cos 2\phi - 4z \cos 2\phi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\ \nabla^2 W &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(10r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\phi) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(10r \operatorname{sen} 2\theta\ \operatorname{sen}\theta \cos\phi) \\
&\quad - \frac{10r \operatorname{sen}^2\theta \cos\phi}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \frac{20 \operatorname{sen}^2\theta \cos\phi}{r} + \frac{20r \cos 2\theta \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \\
&\quad + \frac{10r \operatorname{sen} 2\theta \cos\theta \cos\phi}{r^2 \operatorname{sen}\theta} - \frac{10\cos\phi}{r} \\
&= \frac{10\cos\phi}{r}(2\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos^2\theta - 1) \\
&= \frac{10\cos\phi}{r}(1 + 2\cos 2\theta)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3.11

Determine el laplaciano de los campos escalares del ejercicio 3.3, es decir,

a) $U = x^2y + xyz$
b) $V = \rho z \operatorname{sen} \phi + z^2 \cos^2 \phi + \rho^2$
c) $f = \cos \theta \operatorname{sen} \phi \ln r + r^2 \phi$

Respuestas: *a)* $2y$, *b)* $4 + 2\cos^2 \phi - \dfrac{2z^2}{\rho^2} \cos 2\phi$, y *c)* $\dfrac{1}{r^2} \cos \theta \operatorname{sen} \phi (1 - 2 \ln r \operatorname{cosec}^2 \theta \ln r) + 6\phi$.

†3.9. Clasificación de los campos vectoriales

Un campo vectorial se caracteriza inequívocamente por su divergencia y rotacional. Ninguno de ellos sería suficiente por sí solo para describir por completo un campo. Todo campo vectorial puede clasificarse en términos de la tendencia o no tendencia a cero de su divergencia o rotacional, de esta manera:

a) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$
b) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$
c) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$
d) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$, $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

En la figura 3.23 aparecen campos representativos de estas cuatro categorías.

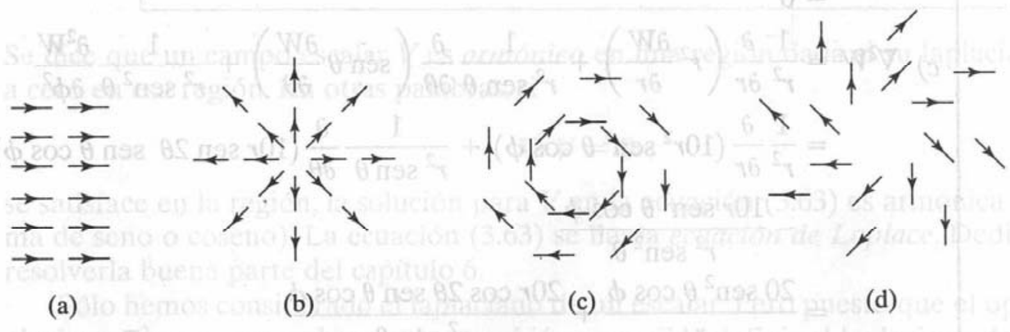


Figura 3.23. Campos representativos con tendencia y no tendencia a cero de divergencia o rotacional.
(a) $\mathbf{A} = k\mathbf{a}_x$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$,
(b) $\mathbf{A} = k\mathbf{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3k$, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$,
(c) $\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{k}$,
(d) $\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} + c\mathbf{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3c$, $\nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{k}$.

Se dice que un campo vectorial **A** es **solenoidal** (o sin **divergencia**) si $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

El flujo de tal campo carece de origen y confluencia. Con base en el teorema de la divergencia,

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = 0 \tag{3.66}$$

Por ende, las líneas de flujo de **A** que entran en una superficie cerrada, también deben dejarla. Ejemplos de campos solenoidales son los fluidos incompresibles, los campos magnéticos y la densidad de corriente de conducción en condiciones de estado estacionario. En general, el campo del rotacional de **F** (para cualquier **F**) es puramente solenoidal, puesto que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, como se demostró en el ejemplo 3.10. De este modo, un campo solenoidal **A** siempre puede expresarse en términos de otro vector **F**; es decir,

$$\text{si} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$
$$\text{entonces} \quad \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3.67}$$

Se dice que un campo vectorial **A** es **irrotacional** (o **potencial**) si $\nabla \times \mathbf{A} = 0$.

Esto es, un vector *sin rotacional* es irrotacional. Con base en el teorema de Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{3.68}$$

Así, en un campo irrotacional **A**, la circulación de **A** alrededor de una trayectoria cerrada es idéntica a cero. Esto implica que la integral de línea de **A** es independiente de la trayectoria elegida. En consecuencia, a un campo irrotacional también se le conoce como *campo conservativo*. Ejemplos de campos irrotacionales son el campo electrostático y el campo gravitacional. En general, el campo del gradiente de V (para cualquier escalar V) es puramente irrotacional, ya que (véase el ejercicio 3.10)

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \tag{3.69}$$

Por tanto, un campo irrotacional **A** siempre puede expresarse en términos de un campo escalar V; esto es,

$$\text{si} \quad \nabla \times \mathbf{A} = 0$$
$$\text{entonces} \quad \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = -\nabla V \tag{3.70}$$

Por esta razón, a **A** se le puede llamar campo *potencial* y a V el potencial escalar de **A**. Los motivos, de carácter físico, de la inserción del signo negativo en la ecuación (3.70) se volverán evidentes en el capítulo 4.

Un vector **A** es inequívocamente prescrito dentro de una región por su divergencia y su rotacional. Si hacemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \tag{3.71a}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}_S \tag{3.71b}$$

ρ_v puede considerarse la densidad de origen de **A** y $\boldsymbol{\rho}_S$ como su densidad de circulación. Todo vector **A** que satisfaga la ecuación (3.71) y en el que tanto ρ_v como $\boldsymbol{\rho}_S$ tiendan a cero en el infinito puede expresarse como la suma de dos vectores: uno irrotacional (de rotacional cero) y otro solenoidal (de divergencia cero). Esto se conoce como *teorema de Helmholtz*. Así, podemos expresar

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B} \tag{3.72}$$

Si hacemos que $\mathbf{A}_i = -\nabla V$ y $\mathbf{A}_s = \nabla \times \mathbf{B}$, es evidente, con base en el ejemplo 3.10 y el ejercicio 3.10, que $\nabla \times \mathbf{A}_i = 0$ y $\nabla \times \mathbf{A}_s = 0$, lo que demuestra que $\mathbf{A}_i$ es irrotacional y $\mathbf{A}_s$ es solenoidal. Finalmente, de las ecuaciones (3.64) y (3.71) se deduce claramente que todo campo vectorial posee un laplaciano que satisface

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \rho_v - \nabla \times \boldsymbol{\rho}_S \tag{3.73}$$

Ejemplo 3.12

Demuestre que el campo vectorial **A** es conservativo si **A** posee una de estas dos propiedades:

a) La integral de línea del componente tangencial de **A** a lo largo de una trayectoria que se extiende de un punto P a un punto Q es independiente de la trayectoria.

b) La integral de línea de la componente tangencial de **A** alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a cero.

Solución:

a) Si **A** es conservativo, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, de modo que existe un potencial V; así

$$\mathbf{A} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right]$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= -\int_P^Q \left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right] \\ &= -\int_P^Q \left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right] ds \\ &= -\int_P^Q \frac{dV}{ds}\, ds = -\int_P^Q dV\end{aligned}$$

o

$$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = V(P) - V(Q)$$

lo que demuestra que la integral de línea sólo depende de los puntos extremos de la curva. En el caso de un campo conservativo, así, $\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ es simplemente la diferencia de potencial en los puntos extremos.

b) Si la trayectoria es cerrada, esto es, si P y Q coinciden, entonces

$$\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = V(P) - V(P) = 0$$

Ejercicio 3.12

Demuestre que $\mathbf{B} = (y + z \cos xz)\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + x \cos xz\, \mathbf{a}_z$ es conservativo, sin calcular integrales.

Respuesta: Comprobación.

Resumen

1. Los desplazamientos diferenciales en los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico son, respectivamente

$$d\mathbf{l} = dx\, \mathbf{a}_x + dy\, \mathbf{a}_y + dz\, \mathbf{a}_z$$
$$d\mathbf{l} = d\rho\, \mathbf{a}_\rho + \rho\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi + dz\, \mathbf{a}_z$$
$$d\mathbf{l} = dr\, \mathbf{a}_r + r\, d\theta\, \mathbf{a}_\theta + r \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$$

Cabe señalar que $d\mathbf{l}$ siempre se considera en la dirección positiva; la dirección del desplazamiento tiene en cuenta los límites de la integración.

2. Las áreas normales diferenciales en los tres sistemas son, respectivamente

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= dy\, dz\, \mathbf{a}_x \\ &\quad\; dx\, dz\, \mathbf{a}_y \\ &\quad\; dx\, dy\, \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \rho\, d\phi\, dz\, \mathbf{a}_\rho \\ &\quad\; d\rho\, dz\, \mathbf{a}_\phi \\ &\quad\; \rho\, d\rho\, d\phi\, \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_r \\ &\quad\; r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\phi\, \mathbf{a}_\theta \\ &\quad\; r\, dr\, d\theta\, \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

Note que $d\mathbf{S}$ puede estar en la dirección positiva o negativa, según la superficie en consideración.

3. Los volúmenes diferenciales en los tres sistemas son

$$dv = dx\, dy\, dz$$
$$dv = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$
$$dv = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

4. La integral de línea del vector **A** a lo largo de una trayectoria L está dada por $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$. Si la trayectoria es cerrada, tal integral de línea se convierte en la circulación de **A** alrededor de L; es decir, $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$.
5. El flujo o integral de superficie de un vector **A** a través de una superficie S se define como $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$. Cuando la superficie S es cerrada, tal integral de superficie se convierte en el flujo neto hacia fuera de **A** a través de S; es decir, $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$.
6. La integral de volumen de un escalar ρ_v sobre un volumen v se define como $\int_v \rho_v \, dv$.
7. La derivación de vectores se realiza empleando el operador diferencial del vector ∇. El gradiente de un campo escalar V se denota con ∇V, la divergencia de un campo vectorial **A** con $\nabla \cdot \mathbf{A}$, el rotacional de **A** con $\nabla \times \mathbf{A}$ y el laplaciano de V con $\nabla^2 V$.
8. El teorema de la divergencia, $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv$, relaciona una integral de superficie sobre una superficie cerrada con una integral de volumen.
9. El teorema de Stokes, $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$, relaciona una integral de línea sobre una trayectoria cerrada con una integral de superficie.
10. Si la ecuación de Laplace, $\nabla^2 V = 0$, es satisfecha por un campo escalar V en una región dada, se dice que V es armónico en esa región.
11. Un campo vectorial es solenoidal si $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, e irrotacional o conservativo si $\nabla \times \mathbf{A} = 0$.
12. En la guarda posterior de este libro se presenta un resumen de las operaciones de cálculo aplicado a vectores en los tres sistemas de coordenadas.
13. Las identidades vectoriales $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ y $\nabla \times \nabla V = 0$ son muy útiles en electromagnetismo. Otras identidades vectoriales aparecen en el apéndice A.10.

Preguntas de repaso

3.1. Considere el volumen diferencial de la figura 3.24. Haga coincidir los elementos de la columna de la izquierda con los de la derecha.

a) $d\mathbf{l}$ de A a B	*i)* $dy\,dz\,\mathbf{a}_x$
b) $d\mathbf{l}$ de A a D	*ii)* $-dx\,dz\,\mathbf{a}_y$
c) $d\mathbf{l}$ de A a E	*iii)* $dx\,dy\,\mathbf{a}_z$
d) $d\mathbf{S}$ para la cara $ABCD$	*iv)* $-dx\,dy\,\mathbf{a}_z$
e) $d\mathbf{S}$ para la cara $AEHD$	*v)* $dx\,\mathbf{a}_x$
f) $d\mathbf{S}$ para la cara $DCGH$	*vi)* $dy\,\mathbf{a}_y$
g) $d\mathbf{S}$ para la cara $ABFE$	*vii)* $dz\,\mathbf{a}_z$

3.2. Con relación al volumen diferencial de la figura 3.25, haga coincidir los elementos de la lista de la izquierda con los de la derecha.

a) $d\mathbf{l}$ de E a A	*i)* $-\rho\,d\phi\,dz\,\mathbf{a}_\rho$
b) $d\mathbf{l}$ de B a A	*ii)* $-d\rho\,dz\,\mathbf{a}_\phi$
c) $d\mathbf{l}$ de D a A	*iii)* $-\rho\,d\rho\,d\phi\,\mathbf{a}_z$
d) $d\mathbf{S}$ para la cara $ABCD$	*iv)* $\rho\,d\rho\,d\phi\,\mathbf{a}_z$
e) $d\mathbf{S}$ para la cara $AEHD$	*v)* $d\rho\,\mathbf{a}_\rho$
f) $d\mathbf{S}$ para la cara $ABFE$	*vi)* $\rho\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$
g) $d\mathbf{S}$ para la cara $DCGH$	*vii)* $dz\,\mathbf{a}_z$

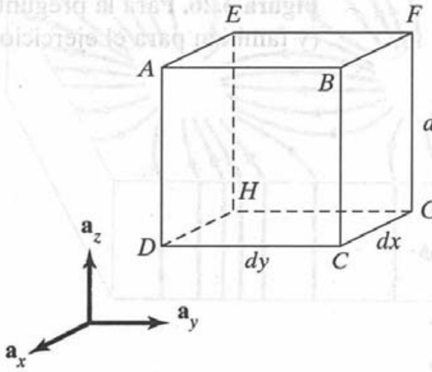


Figura 3.24. Para la pregunta de repaso 3.1.

3.3. En la figura 3.26 aparece un volumen diferencial en coordenadas esféricas. Haga coincidir respecto del elemento volumen los componentes de la columna de la izquierda con los de la derecha.

a) $d\mathbf{l}$ de A a D	*i)* $-r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$
b) $d\mathbf{l}$ de E a A	*ii)* $-r \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\phi \, \mathbf{a}_\theta$
c) $d\mathbf{l}$ de A a B	*iii)* $r \, dr \, d\theta \, \mathbf{a}_\phi$
d) $d\mathbf{S}$ para la cara $EFGH$	*iv)* $dr \, \mathbf{a}_r$
e) $d\mathbf{S}$ para la cara $AEHD$	*v)* $r \, d\theta \, \mathbf{a}_\theta$
f) $d\mathbf{S}$ para la cara $ABFE$	*vi)* $r \operatorname{sen} \theta \, d\phi \, \mathbf{a}_\phi$

3.4. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$, es el vector de posición del punto (x, y, z) y $r = |\mathbf{r}|$, ¿cuál de las expresiones siguientes es incorrecta?

a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$

b) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 1$

c) $\nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 6$

d) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

3.5. ¿Cuál de las combinaciones siguientes carece de sentido?

a) grad div

b) div rot

c) rot grad

d) rot grad

e) div rot

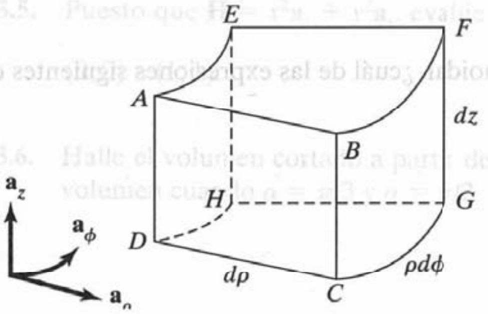


Figura 3.25. Para la pregunta de repaso 3.2.

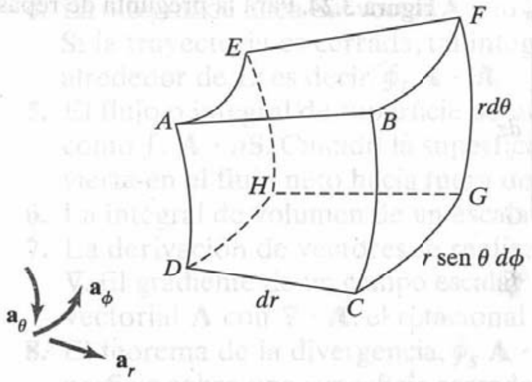


Figura 3.26. Para la pregunta de repaso 3.3 (y también para el ejercicio 3.1).

3.6. ¿Cuál de las expresiones siguientes es igual a cero?

a) grad div
b) div grad
c) rot grad
d) rot rot

3.7. Dado el campo $\mathbf{A} = 3x^2yz\,\mathbf{a}_x + x^3z\,\mathbf{a}_y + (x^3y - 2z)\mathbf{a}_z$, puede decirse que **A** es

a) Armónico.
b) Sin divergencia.
c) Solenoidal.
d) Rotacional.
e) Conservativo.

3.8. En la figura 3.27 aparece la densidad de corriente superficial **J** en una guía de ondas rectangular. En ella se observa que **J** diverge en la cara superior de la guía, mientras que carece de divergencia en la cara lateral.

a) Cierto.
b) Falso.

3.9. El teorema de Stokes sólo es aplicable en presencia de una trayectoria cerrada y cuando el campo vectorial y sus derivadas son continuos en esa trayectoria.

a) Cierto.
b) Falso.
c) No necesariamente.

3.10. Si un campo vectorial **Q** es solenoidal, ¿cuál de las expresiones siguientes es cierta?

a) $\oint_L \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{l} = 0$
b) $\oint_S \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} = 0$
c) $\nabla \times \mathbf{Q} = 0$
d) $\nabla \times \mathbf{Q} \neq 0$
e) $\nabla^2\mathbf{Q} = 0$

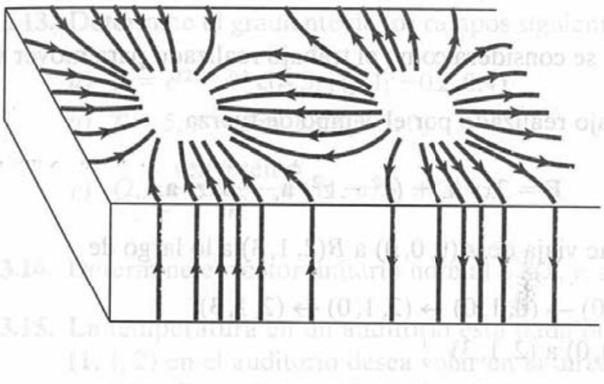


Figura 3.27. Para la pregunta de repaso 3.8.

Respuestas: 3.1*a-vi*, *b-vii*, *c-v*, *d-i*, *e-ii*, *f-iv*, *g-iii*, 3.2*a-vi*, *b-v*, *c-vii*, *d-ii*, *e-i*, *f-iv*, *g-iii*, 3.3*a-v*, *b-vi*, *c-iv*, *d-iii*, *e-i*, *f-ii*, 3.4*b*, 3.5*c*, 3.6*c*, 3.7*e*, 3.8*a*, 3.9*a*, 3.10*b*.

Problemas

3.1. Con base en la longitud diferencial dl, halle la longitud de cada una de las curvas siguientes:

a) $\rho = 3, \pi/4 < \phi < \pi/2, z =$ constante
b) $r = 1, \theta = 30°, 0 < \phi < 60°$
c) $r = 4, 30° < \theta < 90°, \phi =$ constante

3.2. Calcule las áreas de las superficies siguientes con base en el área diferencial dS:

a) $\rho = 2, 0 < z < 5, \pi/3 < \phi < \pi/2$
b) $z = 1, 1 < \rho < 3, 0 < \phi < \pi/4$
c) $r = 10, \pi/4 < \theta < 2\pi/3, 0 < \phi < 2\pi$
d) $0 < r < 4, 60° < \theta < 90°, \phi =$ constante

3.3. Use el volumen diferencial dv para determinar el volumen de las regiones siguientes:

a) $0 < x < 1, 1 < y < 2, -3 < z < 3$
b) $2 < \rho < 5, \pi/3 < \phi < \pi, -1 < z < 4$
c) $1 < r < 3, \pi/2 < \theta < 2\pi/3, \pi/6 < \phi < \pi/2$

3.4. Puesto que $\rho_s = x^2 + xy$, calcule $\int_S \rho_s dS$ sobre la región $y \leq x^2, 0 < x < 1$.

3.5. Puesto que $\mathbf{H} = x^2\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y$, evalúe $\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$, donde L es a lo largo de la curva $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

3.6. Halle el volumen cortado a partir del radio de la esfera $r = a$ por el cono $\theta = \alpha$. Calcule el volumen cuando $\alpha = \pi/3$ y $\alpha = \pi/2$.

3.7. Si la integral $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ se considera como el trabajo realizado para mover una partícula de A a B, encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F} = 2xy\,\mathbf{a}_x + (x^2 - z^2)\,\mathbf{a}_y - 3xz^2\,\mathbf{a}_z$$

sobre una partícula que viaja de $A(0, 0, 0)$ a $B(2, 1, 3)$ a lo largo de

a) El segmento $(0, 0, 0) \to (0, 1, 0) \to (2, 1, 0) \to (2, 1, 3)$

b) La línea recta $(0, 0, 0)$ a $(2, 1, 3)$

3.8. Si

$$\mathbf{H} = (x - y)\mathbf{a}_x + (x^2 + zy)\mathbf{a}_y + 5yz\,\mathbf{a}_z$$

evalúe $\int H \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo del contorno de la figura 3.28.

3.9. Si $V = (x + y)z$, evalúe $\oint_S V\,d\mathbf{S}$, donde S es la superficie de la cuña cilíndrica definida por $0 < \phi < \pi/2, 0 < z < 2$ y $d\mathbf{S}$ es normal a esa superficie.

3.10. Sea $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y - y\mathbf{a}_z$. Evalúe $\int \mathbf{A}\,dv$ sobre:

a) una región rectangular $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2$

b) una región cilíndrica $\rho \le 3, 0 \le z \le 5$

c) una región esférica $r \le 4$

3.11. La aceleración de una partícula está dada por $\mathbf{a} = 2.4\mathbf{a}_z$ m/s^2. La posición inicial de la partícula es $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, mientras que su velocidad inicial es $\mathbf{v} = -2\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z$ m/s. *a)* Halle la posición de la partícula en el instante $t = 1$. *b)* Determine la velocidad de la partícula como una función de t.

3.12. Encuentre el gradiente de estos campos escalares:

a) $U = 4xz^2 + 3yz$

b) $W = 2\rho(z^2 + 1)\cos\phi$

c) $H = r^2 \cos\theta \cos\phi$

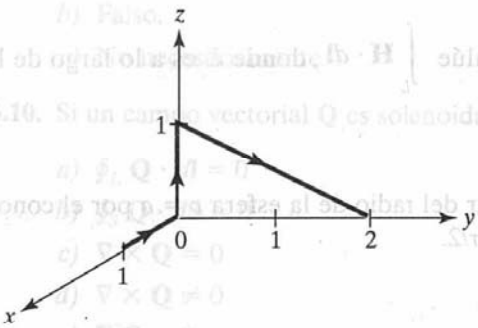


Figura 3.28. Para el problema 3.8.

3.13. Determine el gradiente de los campos siguientes y calcule su valor en el punto especificado.

a) $V = e^{(2x+3y)} \cos 5z$, $(0.1, -0.2, 0.4)$

b) $T = 5\rho e^{-2z} \operatorname{sen} \phi$, $(2, \pi/3, 0)$

c) $Q = \dfrac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{r^2}$, $(1, \pi/6, \pi/2)$

3.14. Determine el vector unitario normal a $S(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ en el punto $(1, 3, 0)$.

3.15. La temperatura en un auditorio está dada por $T = x^2 + y^2 - z$. Un mosquito ubicado en $(1, 1, 2)$ en el auditorio desea volar en la dirección que le permita calentarse lo más pronto posible. ¿En qué dirección debe volar?

3.16. Halle la divergencia y el rotacional de los vectores siguientes:

a) $\mathbf{A} = e^{xy}\,\mathbf{a}_x + \operatorname{sen} xy\,\mathbf{a}_y + \cos^2 xz\,\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{B} = \rho z^2 \cos\phi\,\mathbf{a}_\rho + z \operatorname{sen}^2\phi\,\mathbf{a}_z$

c) $\mathbf{C} = r\cos\theta\,\mathbf{a}_r - \dfrac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta + 2r^2 \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\phi$.

3.17. Evalúe $\nabla \times \mathbf{A}$ y $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ si:

a) $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x + y^2z\mathbf{a}_y - 2xz\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{A} = \rho^2 z\mathbf{a}_\rho + \rho^3\mathbf{a}_\phi + 3\rho z^2\mathbf{a}_z$

c) $\mathbf{A} = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{r^2}\,\mathbf{a}_r - \dfrac{\cos\phi}{r^2}\,\mathbf{a}_\phi$

3.18. Dado el vector de flujo de calor $\mathbf{H} = k\nabla T$, donde T es la temperatura y k es la conductividad térmica, demuestre que cuando

$$T = 50 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} \cosh\frac{\pi y}{2}$$

entonces $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$.

3.19. *a)* Compruebe que

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$$

donde V es un campo escalar y $\mathbf{A}$ un campo vectorial.

b) Evalúe $\nabla \cdot (V\mathbf{A})$ cuando $\mathbf{A} = 2x\mathbf{a}_y + 3y\mathbf{a}_y - 4z\mathbf{a}_z$ y $V = xyz$.

3.20. *a)* Compruebe que

$$\nabla \times (V\mathbf{A}) = V(\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla V \times \mathbf{A}$$

donde V y A son campos escalar y vectorial, respectivamente.

b) Evalúe $\nabla \times (V\mathbf{A})$ cuando $V = \dfrac{1}{r^2}$ y $\mathbf{A} = r\cos\theta\,\mathbf{a}_r + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$.

3.21. Si $U = xz - x^2y + y^2z^2$, evalúe div grad U.

3.22. Demuestre que $\nabla \ln \rho = \nabla \times \phi \mathbf{a}_z$.

3.23. Demuestre que $\nabla\phi = \nabla \times \left(\dfrac{r\nabla\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)$.

3.24. Evalúe ∇V, $\nabla \cdot \nabla V$ y $\nabla \times \nabla V$ si:

a) $V = 3x^2y + xz$

b) $V = \rho z \cos\phi$

c) $V = 4r^2 \cos\theta \,\text{sen}\,\phi$

3.25. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{T} = 2zy\mathbf{a}_x + xy^2\mathbf{a}_y + x^2yz\mathbf{a}_z$, determine

a) $(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{T}$

b) $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{T}$

c) $\nabla \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{T})$

d) $(\mathbf{r} \cdot \nabla)r^2$

3.26. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ es el vector de posición del punto (x, y, z), $r = |\mathbf{r}|$ y n es un entero, demuestre que:

a) $\nabla \cdot r^n\mathbf{r} = (n + 3)r^n$

b) $\nabla \times r^n\mathbf{r} = 0$

3.27. Si $\mathbf{r}$ y r son como se les definió en el problema anterior, compruebe que:

a) $\nabla (\ln r) = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$

b) $\nabla^2 (\ln r) = \dfrac{1}{r^2}$

3.28. Halle $\nabla^2 V$ en cada uno de los campos escalares siguientes

a) $V_1 = x^3 + y^3 + z^3$

b) $V_2 = \rho z^2 \,\text{sen}\, 2\phi$

c) $V_3 = r^2(1 + \cos\theta \,\text{sen}\,\phi)$

3.29. Encuentre el laplaciano de los campos escalares siguientes y calcule su valor en el punto especificado.

a) $U = x^3y^2e^{xz}$, $(1, -1, 1)$

b) $V = \rho^2 z(\cos\phi + \text{sen}\,\phi)$, $(5, \pi/6, -2)$

c) $W = e^{-r} \,\text{sen}\,\theta \cos\phi$, $(1, \pi/3, \pi/6,)$

3.30. Si $V = x^2y^2z^2$ y $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x + xz^3\mathbf{a}_y - y^2z^2\mathbf{a}_z$, halle: *a)* $\nabla^2 V$, *b)* $\nabla^2 \mathbf{A}$, *c)* grad div $\mathbf{A}$ y *d)* rot rot $\mathbf{A}$.

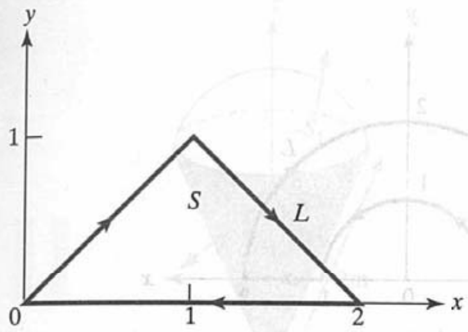


Figura 3.29. Para el problema 3.31.

***3.31.** Puesto que $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y$, halle

a) $\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, donde L se muestra en la figura 3.29.

b) $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el área circunscrita por L.

c) ¿Se cumple el teorema de Stokes?

3.32. Sea $\mathbf{D} = 2\rho z^2\mathbf{a}_\rho + \rho \cos^2 \phi \mathbf{a}_z$. Evalúe

a) $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$

b) $\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv$

sobre la región definida por $0 \leq \rho \leq 5, -1 \leq z \leq 1, 0 < \phi < 2\pi$.

3.33. Si $\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y + (z^2 - 1)\mathbf{a}_z$, halle $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S está definida por $\rho = 2, 0 < z < 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

3.34. *a)* Puesto que $\mathbf{A} = xy\mathbf{a}_x + yz\mathbf{a}_y + xz\mathbf{a}_z$, evalúe $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie del cubo definido por $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

b) Repita el inciso *a)* sin cambios en S pero $\mathbf{A} = yz\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + xy\mathbf{a}_z$.

3.35. Compruebe el teorema de la divergencia

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv$$

en cada uno de los casos siguientes:

a) $\mathbf{A} = xy^2\mathbf{a}_x + y^3\mathbf{a}_y + y^2z\mathbf{a}_z$ y S es la superficie del cuboide definido por $0 < x < 1$, $0 < y < 1, 0 < z < 1$.

b) $\mathbf{A} = 2\rho z\mathbf{a}_\rho + 3z \operatorname{sen} \phi\, \mathbf{a}_\phi - 4\rho \cos \phi\, \mathbf{a}_z$ y S es la superficie de la cuña $0 < \rho < 2$, $0 < \phi < 45°, 0 < z < 5$.

c) $\mathbf{A} = r^2\mathbf{a}_r + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi\, \mathbf{a}_\theta$ y S es la superficie de un cuarto de una esfera definida por $0 < r < 3, 0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2$.

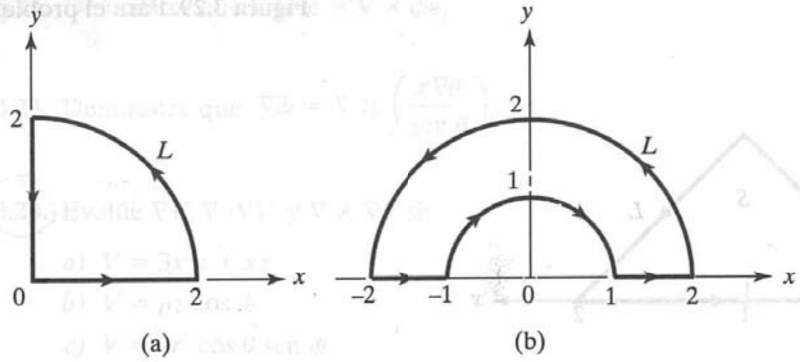


Figura 3.30. Para el problema 3.37.

3.36. El momento de inercia alrededor del eje z de un cuerpo rígido es proporcional a

$$\int_v (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

Exprese esto como flujo de un campo vectorial **A** a través de la superficie del cuerpo.

***3.37.** Sea $\mathbf{A} = \rho \operatorname{sen} \phi\, \mathbf{a}_\rho + \rho^2\, \mathbf{a}_\phi$. Evalúe $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ cuando

a) L es el contorno de la figura 3.30*(a)*.

b) L es el contorno de la figura 3.30*(b)*.

3.38. Calcule el flujo total hacia fuera del vector

$$\mathbf{F} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, \mathbf{a}_\rho + z \cos \phi\, \mathbf{a}_\phi + \rho z \mathbf{a}_z$$

a través del cilindro hueco definido por $2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq z \leq 5$.

3.39. Halle el flujo del rotacional del campo

$$\mathbf{T} = \frac{1}{r^2} \cos \theta\, \mathbf{a}_r + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi\, \mathbf{a}_\theta + \cos \theta\, \mathbf{a}_\phi$$

a través del hemisferio $r = 4, z \leq 0$.

****3.40.** Un campo vectorial está dado por

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} [(x - y)\mathbf{a}_x + (x + y)\mathbf{a}_y$$

Evalúe las integrales siguientes:

a) $\int_L \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{l}$, donde L es el borde circular del volumen en forma de cono para helado que aparece en la figura 3.31.

b) $\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S_1 es la superficie superior del volumen.

c) $\int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S_2 es la superficie inclinada del volumen.

**Dos asteriscos indican problemas de alto grado de dificultad.

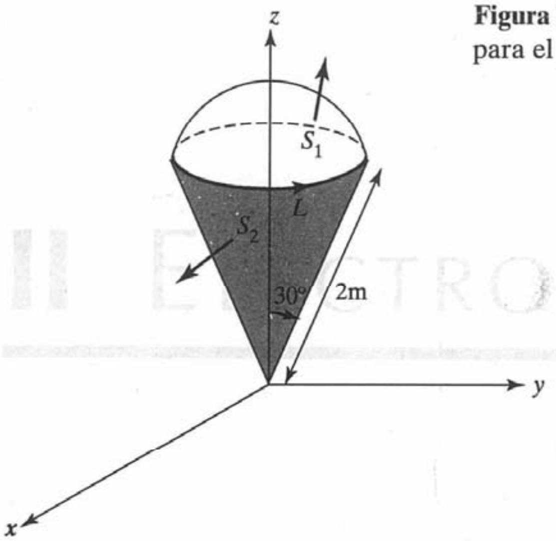


Figura 3.31. Volumen en forma de cono para helado para el problema 3.40.

d) $\int_{S_1} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S}$

e) $\int_{S_2} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S}$

f) $\int_v \nabla \cdot \mathbf{Q}\, dv$

¿Qué obtiene al comparar los resultados de los incisos *a)* a *f)*?

***3.41.** Un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Si $\mathbf{u}$ es la velocidad en cualquier punto del cuerpo, demuestre que $\boldsymbol{\omega} = 1/2\ \nabla \times \mathbf{u}$.

3.42. Sean U y V campos escalares. Demuestre que

$$\oint_L U\nabla V \cdot d\mathbf{l} = -\oint_L V\,\nabla U \cdot d\mathbf{l}$$

3.43. Demuestre que

$$\int r^n dv = \frac{1}{n+3}\oint r^n \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{r}$, r y n son como se les definió en el problema 3.26.

3.44. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{G} = (16xy - z)\mathbf{a}_x + 8x^2\mathbf{a}_y - x\mathbf{a}_z$$

a) ¿Es $\mathbf{G}$ irrotacional (ó conservativo)?

b) Halle el flujo neto de $\mathbf{G}$ sobre el cubo $0 < x, y, z, < 1$.

c) Determine la circulación de $\mathbf{G}$ alrededor del borde del cuadrado $z = 0, 0 < x, y < 1$.

Suponga la dirección contraria a las manecillas del reloj.

3.45. Si el campo vectorial

$$\mathbf{T} = (\alpha xy + \beta z^3)\mathbf{a}_x + (3x^2 - \gamma z)\mathbf{a}_y + (3xz^2 - y)\mathbf{a}_z$$

es irrotacional, determine α, β y γ. Halle $\nabla \cdot \mathbf{T}$ en $(2, -1, 0)$.

II ELECTROSTÁTICA

4 Campos electrostáticos

Corre riesgos: si ganas, serás dichoso; si pierdes, serás sabio.

PETER KREEFT

4.1. Introducción

En dominio de algunas de las herramientas matemáticas esenciales para este curso, ya estamos preparados para estudiar los conceptos básicos del electromagnetismo. Comenzaremos por los conceptos fundamentales aplicables a campos eléctricos estáticos (o invariables en el tiempo) en el vacío. Un campo elecrostático es producido por una distribución de carga estática. El ejemplo clásico de este tipo de campos es un tubo de rayos catódicos.

Pero antes examinemos brevemente la importancia de estudiar la electrostática, fascinante tema que presenta varias áreas de aplicación. La transmisión de energía eléctrica, los aparatos de rayos X y los pararrayos se asocian con potentes campos eléctricos; el diseño del equipo adecuado para tales actividades implica conocimientos de electrostática. También los dispositivos que se emplean en la electrónica de estado sólido se basan en la electrostática; entre ellos están las resistencias, los capacitores (o condensadores) y dispositivos activos como transistores bipolares y de efecto de campo, los cuales se basan en el control del movimiento de electrones mediante campos electrostáticos. Casi todos los dispositivos periféricos de computadoras, excepto la memoria magnética, se fundan en campos electrostáticos; las pantallas sensibles al tacto, los teclados de capacitancia, los tubos de rayos catódicos, las pantallas de cristal líquido y las impresoras electrostáticas son ejemplos representativos. En la labor médica, el diagnóstico suele efectuarse con la ayuda de la electrostática, incorporada en electrocardiogramas, electroencefalogramas y otros registros de órganos con actividad eléctrica como ojos, oídos y estómago. La electrostática posee asimismo numerosas aplicaciones industriales, como pintura por aspersión, electrodeposición, maquinaria electroquímica y separación de partículas finas, mientras que en la agricultura se le emplea para seleccionar semillas, rociar plantas, medir el contenido de humedad de los cultivos, hilar algodón y acelerar el horneado del pan y el ahumado de la carne.[1,2]

---

[1] Para varias aplicaciones de la electrostática, véase J. M. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1986; A. D. Moore, ed., *Electrostatics and Its Applications*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1973, y C. E. Jowett, *Electrostatics in the Electronics Environment*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1976.

[2] Una interesante exposición sobre la magia de la electrostática se encuentra en B. Bolton, *Electromagnetism and Its Applications*, Van Nostrand, Londres, 1980, p. 2.

Empezaremos nuestro estudio de la electrostática analizando las dos leyes fundamentales que rigen a los campos electrostáticos: 1. la ley de Coulomb y 2. la ley de Gauss. Estas dos leyes se basan en estudios experimentales y son interdependientes. Aunque la ley de Coulomb es aplicable a la determinación de campos eléctricos debidos a cualquier configuración de carga, es más fácil usar la ley de Gauss cuando la distribución de carga es simétrica. En este capítulo se presentará el concepto de intensidad de campo eléctrico, el cual se desprende de la ley de Coulomb y se aplicará a casos que implican cargas puntuales, lineales, superficiales y volumétricas. Problemas especiales cuya resolución con la ley de Coulomb es muy compleja se resolverán fácilmente aplicando la ley de Gauss. En este capítulo partiremos del supuesto de que el campo eléctrico se encuentra en el vacío; en el siguiente nos ocuparemos del campo eléctrico en el espacio material.

4.2. Ley de Coulomb e intensidad de campo

La ley de Coulomb es una ley experimental que debe su nombre al coronel francés Charles Augustin de Coulomb, quien la formuló en 1785. Versa sobre la fuerza que una carga puntual ejerce en otra carga puntual. Por *carga puntual* se entiende una carga localizada en un cuerpo cuyas dimensiones son mucho menores que las demás dimensiones pertinentes. Por ejemplo, una serie de cargas eléctricas en la cabeza de un alfiler son una carga puntual. Esta carga se mide por lo general en coulombs (C). Un coulomb equivale aproximadamente a 6×10^{18} electrones; se trata, así, de una unidad de carga muy grande, puesto que la carga de un electrón $e = -1.6019 \times 10^{-19}$ C.

La **ley de Coulomb** establece que la fuerza F entre dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 es:

1. De dirección igual a la de la línea que las une.
2. Directamente proporcional al producto Q_1Q_2 de las cargas.
3. Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia R entre ellas.[3]

Expresado matemáticamente,

$$F = \frac{k\,Q_1Q_2}{R^2} \tag{4.1}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. En unidades del sistema internacional (SI), las cargas Q_1 y Q_2 están en coulombs (C), la distancia R en metros (m) y la fuerza F en newtons (N), de manera que $k = 1/4\pi\varepsilon_o$. La constante ε_o se conoce como *permitividad del vacío* (en farads por metro) y posee el valor

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_o &= 8.854 \times 10^{-12} \simeq \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \text{F/m} \\ \text{o } k &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \simeq 9 \times 10^9\ \text{F/m} \end{aligned}} \tag{4.2}$$

[3] Para detalles adicionales de la comprobación experimental de la ley de Coulomb, véase W. F. Magie, *A Source Book in Physics*, Harvard University Press, Cambridge, 1963, pp. 408-420.

Así, la ecuación (4.1) se convierte en

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R^2} \tag{4.3}$$

Si las cargas puntuales Q_1 y Q_2 se localizan en puntos con vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, entonces la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ sobre Q_2 debida a Q_1, la cual se muestra en la figura 4.1, está dada por

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_{R_{12}}} \tag{4.4}$$

donde

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{4.5a}$$

$$R = |\mathbf{R}_{12}| \tag{4.5b}$$

$$\mathbf{a}_{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R} \tag{4.5c}$$

Al sustituir la ecuación (4.5) en la ecuación (4.4), podemos expresar la ecuación (4.4) como

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R^3}\,\mathbf{R}_{12} \tag{4.6a}$$

o

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\varepsilon_o |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{4.6b}$$

Cabe señalar lo siguiente

1. Como se observa en la figura 4.1, la fuerza $\mathbf{F}_{21}$ sobre Q_1 debida a Q_2 está dada por

$$\mathbf{F}_{21} = |\mathbf{F}_{12}|\mathbf{a}_{R_{21}} = |\mathbf{F}_{12}|(-\mathbf{a}_{R_{12}})$$

o

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \tag{4.7}$$

puesto que

$$\mathbf{a}_{R_{21}} = -\mathbf{a}_{R_{12}}$$

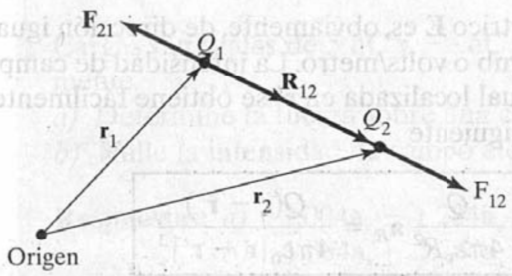


Figura 4.1. Fuerza vectorial de Coulomb sobre las cargas puntuales Q_1 y Q_2.

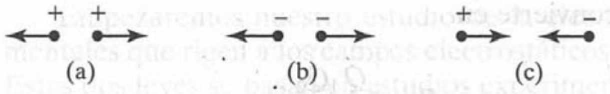


Figura 4.2. (a), (b) Cargas iguales se repelen; **(c)** cargas distintas se atraen.

2. Cargas iguales (del mismo signo) se repelen, mientras que cargas distintas se atraen. Esto se ilustra en la figura 4.2.
3. La distancia R entre los cuerpos cargados Q_1 y Q_2 debe ser grande en comparación con las dimensiones lineales de los cuerpos; esto es, Q_1 y Q_2 deben ser cargas puntuales.
4. Q_1 y Q_2 deben ser estáticas (hallarse en reposo).
5. Los signos de Q_1 y Q_2 deben tenerse en cuenta en la ecuación (4.4).

Si se tienen más de dos cargas puntuales, es posible usar el *principio de superposición* para determinar la fuerza sobre una carga particular. Este principio establece que si N cargas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ se ubican respectivamente en puntos con vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$, la fuerza resultante $\mathbf{F}$ sobre una carga Q localizada en el punto $\mathbf{r}$ es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre Q por cada una de las cargas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$. En consecuencia:

$$\mathbf{F} = \frac{QQ_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{QQ_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \cdots + \frac{QQ_N(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|^3}$$

o

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}} \tag{4.8}$$

Presentemos ahora el concepto de *intensidad de campo eléctrico*.

La **intensidad de campo eléctrico E** es la fuerza por unidad de carga en el campo eléctrico.

Así,

$$\mathbf{E} = \lim_{Q\to 0}\frac{\mathbf{F}}{Q} \tag{4.9}$$

o simplemente

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}} \tag{4.10}$$

La intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ es, obviamente, de dirección igual a la de la fuerza $\mathbf{F}$ y se mide en newtons/coulomb o volts/metro. La intensidad de campo eléctrico en el punto $\mathbf{r}$ debida a una carga puntual localizada en $\mathbf{r}'$ se obtiene fácilmente de las ecuaciones (4.6) y (4.10), de la manera siguiente

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_R = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \tag{4.11}$$

En el caso de N cargas puntuales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ localizadas en $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$, la intensidad de campo eléctrico en el punto $\mathbf{r}$ se obtiene de las ecuaciones (4.8) y (4.10) en esta forma

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Q_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \cdots + \frac{Q_N(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|^3}$$

o

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \tag{4.12}$$

Ejemplo 4.1

Cargas puntuales de 1 mC y −2 mC se localizan en (3, 2, −1) y (−1, −1, 4), respectivamente. Calcule la fuerza eléctrica sobre una carga de 10 nC localizada en (0, 3, 1) y la intensidad de campo eléctrico en ese punto.

Solución:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1,2}\frac{QQ_k}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R = \sum_{k=1,2}\frac{QQ_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{10^{-3}[(0,3,1) - (3,2,-1)]}{|(0,3,1) - (3,2,-1)|^3} - \frac{2.10^{-3}[(0,3,1) - (-1,-1,4)]}{|(0,3,1) - (-1,-1,4)|^3}\right\}$$

$$= \frac{10^{-3}\cdot 10\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot\dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\left[\frac{(-3,1,2)}{(9+1+4)^{3/2}} - \frac{2(1,4,-3)}{(1+16+9)^{3/2}}\right]$$

$$= 9\cdot 10^{-2}\left[\frac{(-3,1,2)}{14\sqrt{14}} + \frac{(-2,-8,6)}{26\sqrt{26}}\right]$$

$$\mathbf{F} = -6.507\mathbf{a}_x - 3.817\mathbf{a}_y + 7.506\mathbf{a}_z \text{ mN}$$

En ese punto,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

$$= (-6.507, -3.817, 7.506)\cdot\frac{10^{-3}}{10\cdot 10^{-9}}$$

$$\mathbf{E} = -650.7\mathbf{a}_x - 381.7\mathbf{a}_y + 750.6\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$$

Ejercicio 4.1

Cargas puntuales de 5 nC y −2 nC se localizan en (2, 0, 4) y (−3, 0, 5), respectivamente.

a) Determine la fuerza sobre una carga puntual de 1 nC localizada en (1, −3, 7).
b) Halle la intensidad de campo eléctrico **E** en (1, −3, 7).

Respuestas: *a)* $-1.004\mathbf{a}_x - 1.284\mathbf{a}_y + 1.4\mathbf{a}_z$ nN,
b) $-1.004\mathbf{a}_x - 1.284\mathbf{a}_y + 1.4\mathbf{a}_z$ V/m.

Ejemplo 4.2 Dos cargas puntuales de igual masa m y carga Q están suspendidas en un punto común por dos hilos de masa despreciable y longitud ℓ. Demuestre que, en equilibrio, el ángulo de inclinación α de cada hilo respecto de la vertical está dado por

$$Q^2 = 16\pi\, \varepsilon_o mg\ell^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \tan \alpha$$

Si α es ínfimo, demuestre que

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o mg\ell^2}}$$

Solución:

Considere el sistema de cargas que aparece en la figura 4.3, donde F_e es la fuerza eléctrica o de coulomb, T la tensión en cada hilo y mg el peso de cada carga. En A o B

$$T \operatorname{sen} \alpha = F_e$$

$$T \cos \alpha = mg$$

Por tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F_e}{mg} = \frac{1}{mg} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Pero

$$r = 2\ell \operatorname{sen} \alpha$$

Así,

$$Q^2 \cos \alpha = 16\pi\varepsilon_o mg\ell^2 \operatorname{sen}^3 \alpha$$

o

$$Q^2 = 16\pi\varepsilon_o mg\ell^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \tan \alpha$$

como se solicitó. Cuando α es ínfimo

$$\tan \alpha \simeq \alpha \simeq \operatorname{sen} \alpha$$

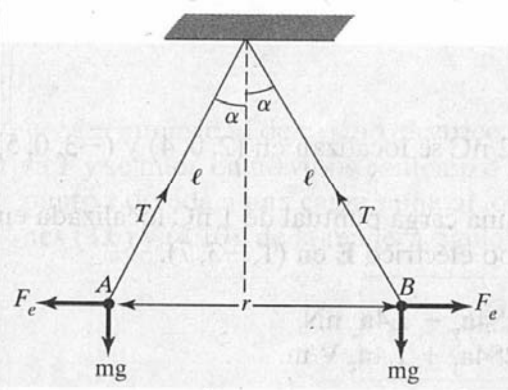


Figura 4.3. Partículas cargadas suspendidas; para el ejemplo 4.2.

de manera que

$$Q^2 = 16\pi\varepsilon_o mg\ell^2 \alpha^3$$

o

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o mg\ell^2}}$$

Ejercicio 4.2

Tres pequeñas esferas idénticas de masa m están suspendidas de un punto común por hilos de masa despreciable e igual longitud ℓ. Una carga Q se divide en partes iguales entre las esferas, las cuales alcanzan el equilibrio en los vértices de un triángulo equilátero horizontal cuyos lados son d. Demuestre que

$$Q^2 = 12\pi\varepsilon_o mgd^3\left[\ell^2 - \frac{d^2}{3}\right]^{-1/2}$$

donde g = aceleración debida a la gravedad.

Respuesta: Comprobación.

Ejemplo 4.3

La separación electrostática de sólidos es una aplicación práctica de la electrostática. El mineral de fosfato de Florida, consistente en pequeñas partículas de cuarzo y roca fosfatada, por ejemplo, puede separarse en sus componentes aplicando un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura 4.4. Si se supone una velocidad y un desplazamiento iniciales de cero, determine la separación entre las partículas tras caer 80 cm. Sea E = 500 kV/m y Q/m = 9 μC/kg para partículas de carga tanto positiva como negativa.

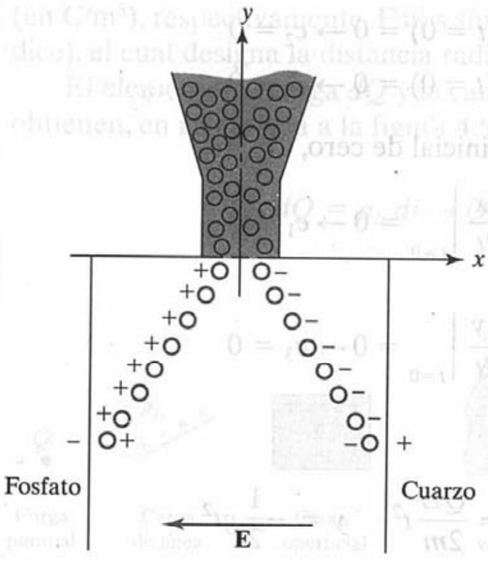


Figura 4.4. Separación electrostática de sólidos; para el ejemplo 4.3.

Solución:
Ignorando la fuerza de Coulomb entre partículas, la fuerza electrostática actúa horizontalmente sobre éstas, y la fuerza gravitacional (peso) verticalmente. Así,

$$Q\mathbf{E} = m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{a}_x$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{m}E$$

Al integrar dos veces

$$x = \frac{Q}{2m}Et^2 + c_1t + c_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración. De igual forma,

$$-mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

o

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

Al integrar dos veces obtenemos

$$y = -1/2gt^2 + c_3t + c_4$$

Puesto que el desplazamiento inicial es de cero,

$$x(t = 0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$y(t = 0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

Asimismo, a causa de la velocidad inicial de cero,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

Así

$$x = \frac{QE}{2m}t^2 \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Cuando $y = -80$ cm $= -0.8$ m

$$t^2 = \frac{0.8 \times 2}{9.8} = 0.1633$$

y

$$x = 1/2 \times 9 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5 \times 0.1633 = 0.3673 \text{ m}$$

La separación entre las partículas es $2x = 73.47$ cm.

Ejercicio 4.3

Un electrodo en forma de cuña en un cohete de iones emite iones positivos de cesio en dirección a la región descrita por $x > |y|$. El campo eléctrico es $\mathbf{E} = -400\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y$ kV/m. Los iones poseen cargas electrónicas únicas $e = -1.6019 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 2.22 \times 10^{-25}$ kg y viajan en el vacío con velocidad inicial cero. Si la emisión se confina a -40 cm $< y < 40$ cm, halle el valor máximo de x que es posible alcanzar.

Respuesta: 0.8 m.

4.3. Campos eléctricos debidos a distribuciones continuas de carga

Hasta aquí sólo hemos considerado fuerzas y campos eléctricos debidos a cargas puntuales, las que ocupan un espacio físico muy reducido. Sin embargo, también es posible una distribución continua de carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o en un volumen, como se ilustra en la figura 4.5.

Se acostumbra denotar la densidad de carga lineal o carga de línea, la densidad de carga superficial y la densidad de carga volumétrica con ρ_L (en C/m), ρ_S (en C/m^2) y ρ_v (en C/m^3), respectivamente. Estos símbolos no deben confundirse con el de ρ (sin subíndice), el cual designa la distancia radial en coordenadas cilíndricas.

El elemento de carga dQ y la carga total Q debidos a esas distribuciones de carga se obtienen, en referencia a la figura 4.5, de la manera siguiente:

$$dQ = \rho_L \, dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L \, dl \qquad \text{(carga de línea)} \tag{4.13a}$$

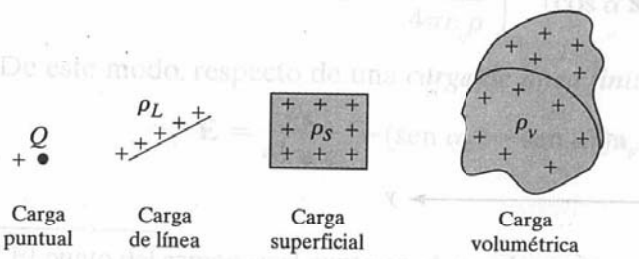


Figura 4.5. Diversas distribuciones de carga y elementos de carga.

$$dQ = \rho_S\, dS \rightarrow Q = \int_S \rho_S\, dS \qquad \text{(carga superficial)} \tag{4.13b}$$

$$dQ = \rho_v\, dv \rightarrow Q = \int_v \rho_v\, dv \qquad \text{(carga volumétrica)} \tag{4.13c}$$

La intensidad de campo eléctrico debida a cada una de las distribuciones de carga ρ_L, ρ_S y ρ_v puede considerarse como la sumatoria del campo al que contribuyen las numerosas cargas puntuales que componen la distribución de carga. Así, el reemplazo de Q en la ecuación (4.11) por el elemento de carga $dQ = \rho_L\, dl$, $\rho_S\, dS$ o $\rho_v\, dv$ y la posterior integración dan como resultado

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L\, dl}{4\pi\varepsilon_o R^2}\, \mathbf{a}_R \qquad \text{(carga de línea)} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S\, dS}{4\pi\varepsilon_o R^2}\, \mathbf{a}_R \qquad \text{(carga superficial)} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_v\, dv}{4\pi\varepsilon_o R^2}\, \mathbf{a}_R \qquad \text{(carga volumétrica)} \tag{4.16}$$

Cabe indicar que R^2 y $\mathbf{a}_R$ varían al evaluarse las integrales de las ecuaciones (4.13) a (4.16). Apliquemos ahora estas fórmulas a distribuciones de carga específicas.

A. Carga de línea

Considérese una carga de línea con densidad de carga uniforme ρ_L que se extiende de A a B a lo largo del eje z, como se muestra en la figura 4.6. El elemento de carga dQ asociado con el elemento $dl = dz$ de la línea es

$$dQ = \rho_L\, dl = \rho_L\, dz$$

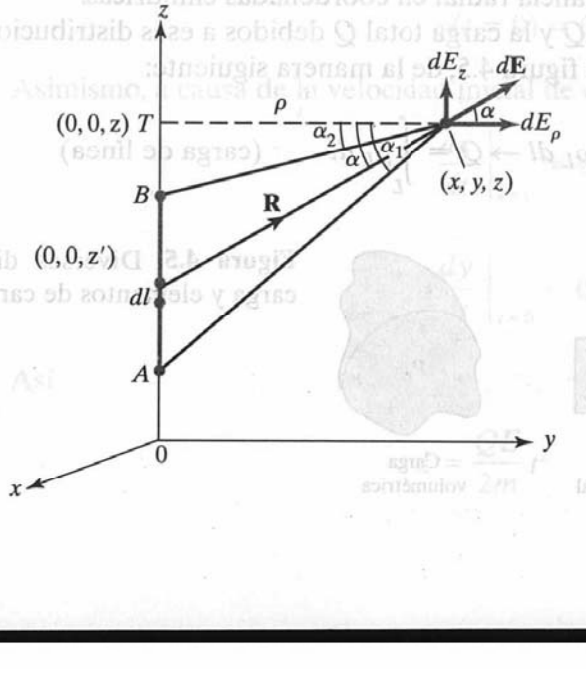


Figura 4.6. Evaluación del campo **E** debido a una carga de línea.

y de ahí que la carga total Q sea

$$Q = \int_{z_A}^{z_B} \rho_L \, dz \tag{4.17}$$

La intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un punto arbitrario $P(x, y, z)$ puede hallarse mediante la ecuación (4.14). Es importante aprender a deducir y sustituir cada término de las ecuaciones (4.14) y (4.15) en referencia a una distribución de carga dada. Se acostumbra denotar el punto del campo[4] con (x, y, z), y el punto de origen con (x', y', z'). Así, con base en la figura 4.6,

$$dl = dz'$$

$$\mathbf{R} = (x, y, z) - (0, 0, z') = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

o

$$\mathbf{R} = \rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\,\mathbf{a}_z$$

$$R^2 = |\mathbf{R}|^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Al sustituir todo esto en la ecuación (4.14) obtenemos

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \, dz' \tag{4.18}$$

Para evaluar esta expresión, es conveniente que definamos α, α_1 y α_2 como en la figura 4.6.

$$R = [\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2} = \rho \sec \alpha$$

$$z' = OT - \rho \tan \alpha, \quad dz' = -\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha$$

Así, la ecuación (4.18) se convierte en

$$\mathbf{E} = \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, [\cos \alpha \, \mathbf{a}_\rho + \operatorname{sen} \alpha \, \mathbf{a}_z] \, d\alpha}{\rho^2 \sec^2 \alpha}$$

$$= -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos \alpha \, \mathbf{a}_\rho + \operatorname{sen} \alpha \, \mathbf{a}_z] \, d\alpha \tag{4.19}$$

De este modo, respecto de una *carga de línea finita*,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o\rho} [-(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1)\mathbf{a}_\rho + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)\mathbf{a}_z] \tag{4.20}$$

---

[4] El punto del campo es el punto en el que el campo será evaluado.

En el caso especial de una *carga de línea infinita*, el punto B está en $(0, 0, \infty)$ y A en $(0, 0, -\infty)$, de manera que $\alpha_1 = \pi/2, \alpha_2 = -\pi/2$; la componente z tiende a cero y la ecuación (4.20) se convierte en

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\,\mathbf{a}_\rho} \tag{4.21}$$

Téngase en mente que la ecuación (4.21) se obtiene con relación a una carga de línea infinita a lo largo del eje z, de modo que ρ y $\mathbf{a}_\rho$ mantienen su significado usual. Si la línea no sigue la dirección del eje z, ρ es la distancia perpendicular de la línea al punto de interés y $\mathbf{a}_\rho$ un vector unitario a lo largo de esa distancia dirigido de la carga de línea al punto del campo.

B. Carga superficial

Considérese una lámina infinita de carga en el plano xy con densidad de carga uniforme ρ_S. La carga asociada con un área elemental dS es

$$dQ = \rho_S\, dS$$

y de ahí que la carga total sea

$$Q = \int \rho_S\, dS \tag{4.22}$$

A partir de la ecuación (4.15), la contribución al campo $\mathbf{E}$ en el punto $P(0, 0, h)$ por la superficie elemental 1 de la figura 4.7 es

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_R \tag{4.23}$$

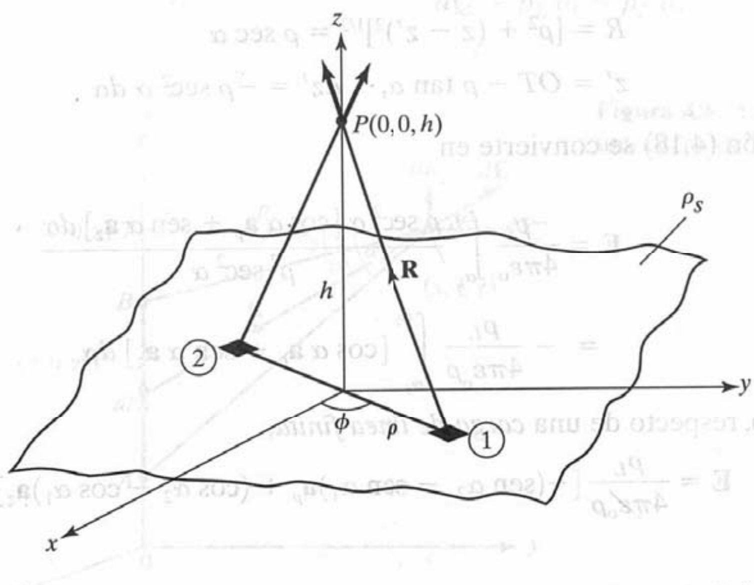


Figura 4.7. Evaluación del campo $\mathbf{E}$ debido a una lámina infinita de carga.

Con base en la figura 4.7,

$$\mathbf{R} = \rho(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z, \qquad R = |\mathbf{R}| = [\rho^2 + h^2]^{1/2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \qquad dQ = \rho_S\, dS = \rho_S\, \rho\, d\phi\, d\rho$$

La sustitución de estos términos en la ecuación (4.23) da como resultado

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S\, \rho\, d\phi\, d\rho\, [-\rho\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z]}{4\pi\varepsilon_o[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \tag{4.24}$$

A causa de la simetría de la distribución de carga, para cada elemento 1 hay un correspondiente elemento 2 cuya contribución a lo largo de $\mathbf{a}_\rho$ anula la del elemento 1, como se ilustra en la figura 4.7. Así, las contribuciones a E_ρ resultan en cero, de manera que $\mathbf{E}$ sólo tiene componente z. Esto también puede demostrarse matemáticamente reemplazando $\mathbf{a}_\rho$ por $\cos\phi\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_y$. La integración de $\cos\phi$ o $\operatorname{sen}\phi$ sobre $0 < \phi < 2\pi$ da cero. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \int d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{h\rho\, d\rho\, d\phi}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}}\,\mathbf{a}_z \\
&= \frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_o}2\pi\int_0^\infty [\rho^2 + h^2]^{-3/2}\frac{1}{2}d(\rho^2)\,\mathbf{a}_z \\
&= \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_o}\left\{-[\rho^2 + h^2]^{-1/2}\right\}_0^\infty \mathbf{a}_z \\
\mathbf{E} &= \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\,\mathbf{a}_z
\end{aligned} \tag{4.25}$$

lo cual quiere decir que $\mathbf{E}$ sólo tiene componente z si la carga está en el plano xy. En general, respecto de una *lámina infiniia* de carga

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\,\mathbf{a}_n} \tag{4.26}$$

donde $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal a la lámina. De la ecuación (4.25) o (4.26) se deduce que el campo eléctrico es normal a la lámina y, sorpresivamente, independiente de la distancia entre la lámina y el punto de observación P. En un capacitor de placas paralelas, el campo eléctrico existente entre las dos placas con cargas igual y opuesta está dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\,\mathbf{a}_n + \frac{-\rho_S}{2\varepsilon_o}(-\mathbf{a}_n) = \frac{\rho_S}{\varepsilon_o}\,\mathbf{a}_n \tag{4.27}$$

C. Carga volumétrica

Sea la distribución de carga volumétrica con densidad de carga uniforme ρ_v como se muestra en la figura 4.8. La carga dQ asociada con el volumen elemental dv es

$$dQ = \rho_v\, dv$$

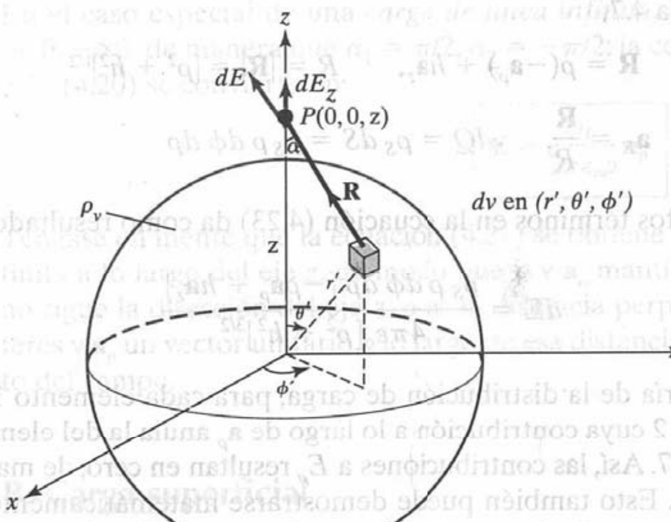


Figura 4.8. Evaluación del campo **E** debido a una distribución volumétrica de carga.

y de ahí que la carga total en una esfera de radio a sea

$$Q = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv \tag{4.28}$$

$$= \rho_v \frac{4\pi a^3}{3}$$

El campo eléctrico $d\mathbf{E}$ en $P(0, 0, z)$ debido a la carga volumétrica elemental es

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon_o R^2} \mathbf{a}_R$$

donde $\mathbf{a}_R = \cos\alpha \, \mathbf{a}_z + \text{sen}\,\alpha \, \mathbf{a}_\rho$. A causa de la simetría de la distribución de carga, las contribuciones a E_x o E_y resultan en cero. Así, sólo resta E_z, dado pór

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_z = \int dE \cos\alpha = \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dv \cos\alpha}{R^2} \tag{4.29}$$

En este caso debemos deducir expresiones para dv, R^2 y $\cos\alpha$.

$$dv = r'^2 \,\text{sen}\,\theta' \, dr' \, d\theta' \, d\phi' \tag{4.30}$$

La aplicación de la regla del coseno a la figura 4.8 produce

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\alpha$$

Es conveniente evaluar la integral de la ecuación (4.29) en términos de R y r'. Por tanto, expresamos $\cos\theta'$, $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\theta'\,d\theta'$ en términos de R y r'; esto es,

$$\cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR} \tag{4.31a}$$

$$\cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'} \tag{4.31b}$$

Tras derivar la ecuación (4.31*b*) respecto de θ' y mantener fijas z y r', obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta'\,d\theta' = \frac{R\,dR}{zr'} \tag{4.32}$$

La sustitución de las ecuaciones (4.30) a (4.32) en la ecuación (4.29) produce

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2\,\frac{R\,dR}{zr'}\,dr'\,\frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}\,\frac{1}{R^2} \\
&= \frac{\rho_v 2\pi}{8\pi\varepsilon_o z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'\left[1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2}\right] dR\,dr' \\
&= \frac{\rho_v\pi}{4\pi\varepsilon_o z^2}\int_0^a r'\left[R - \frac{(z^2 - r'^2)}{R}\right]_{z-r'}^{z+r'} dr' \\
&= \frac{\rho_v\pi}{4\pi\varepsilon_o z^2}\int_0^a 4r'^2\,dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{1}{z^2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\rho_v\right)
\end{aligned}$$

o

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o z^2}\,\mathbf{a}_z \tag{4.33}$$

Este resultado corresponde a $\mathbf{E}$ en $P(0, 0, z)$. A causa de la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico en $P(r, \theta, \phi)$ se obtiene fácilmente de la ecuación (4.33), así

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\,\mathbf{a}_r \tag{4.34}$$

lo cual es idéntico al campo eléctrico en el mismo punto debido a una carga puntual Q ubicada en el origen o en el centro de la distribución esférica de carga. La razón de esto será obvia cuando nos ocupemos de la ley de Gauss en la sección 4.5.

Ejemplo 4.4

Un anillo circular de radio a porta una carga uniforme ρ_L C/m y está situado en el plano xy con eje en el eje z.

a) Demuestre que

$$\mathbf{E}(0, 0, h) = \frac{\rho_L a h}{2\varepsilon_o[h^2 + a^2]^{3/2}}\,\mathbf{a}_z$$

b) ¿Qué valores de h produce el valor máximo de $\mathbf{E}$?
c) Si la carga total en el anillo es Q, halle $\mathbf{E}$ cuando $a \to 0$.

Solución:

a) Considere el sistema de la figura 4.9. Como ya sabemos, el truco para hallar $\mathbf{E}$ con la ecuación (4.14) es deducir cada término de la ecuación. En este caso,

$$dl = a\,d\phi, \qquad \mathbf{R} = a(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = [a^2 + h^2]^{1/2}, \qquad \mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

o

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z}{[a^2 + h^2]^{3/2}}$$

Por tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z)}{[a^2 + h^2]^{3/2}}\, a\,d\phi$$

Por simetría, las contribuciones a lo largo de $\mathbf{a}_\rho$ resultan en cero. Esto es evidente si se considera que para cada elemento dl hay un correspondiente elemento diametralmente opuesto que produce un dE_ρ igual pero de signo contrario, de manera que las dos contribuciones se anulan entre sí. De esta forma, sólo resta la componente z. Es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{4\pi\varepsilon_o[h^2 + a^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{2\varepsilon_o[h^2 + a^2]^{3/2}}$$

como se solicitó.

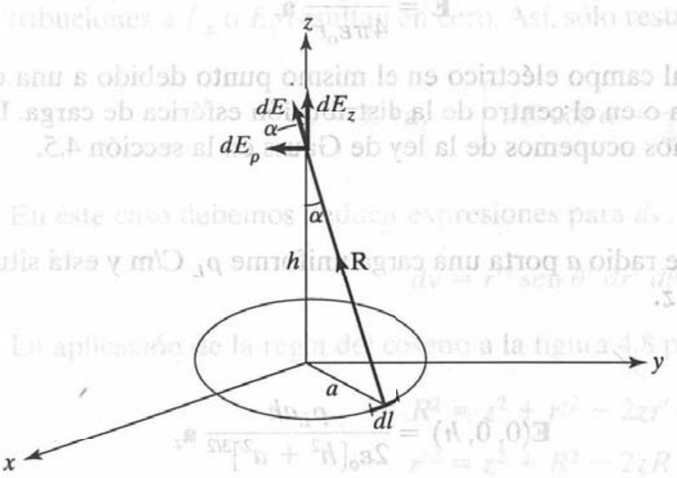


Figura 4.9. Anillo cargado; para el ejemplo 4.4.

b)
$$\frac{d|\mathbf{E}|}{dh} = \frac{\rho_L a}{2\varepsilon_o}\left\{\frac{[h^2+a^2]^{3/2}(1) - \frac{3}{2}(h)2h[h^2+a^2]^{1/2}}{[h^2+a^2]^3}\right\}$$

Respecto de **E** máxima, $\frac{d|\mathbf{E}|}{dh} = 0$, lo que implica que

$$[h^2 + a^2]^{1/2}[h^2 + a^2 - 3h^2] = 0$$

$$a^2 - 2h^2 = 0 \quad \text{o} \quad h = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

c) Puesto que la carga está uniformemente distribuida, la densidad de carga de línea es

$$\rho_L = \frac{Q}{2\pi a}$$

de manera que

$$\mathbf{E} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_o[h^2 + a^2]^{3/2}}\,\mathbf{a}_z$$

Cuando $a \to 0$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o h^2}\,\mathbf{a}_z$$

o en general

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\,\mathbf{a}_R$$

lo que es igual que en el caso de una carga puntual, como era de esperar.

Ejercicio 4.4

Un disco circular de radio a está uniformemente cargado con ρ_S C/m². Si el disco se sitúa en el plano $z = 0$ con su eje a lo largo del eje z,

a) Demuestre que en el punto $(0, 0, h)$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\left\{1 - \frac{h}{[h^2 + a^2]^{1/2}}\right\}\mathbf{a}_z$$

b) Deduzca de ello el campo **E** debido a una lámina infinita de carga en el plano $z = 0$.

c) Si $a \ll h$, demuestre que **E** es similar al campo debido a una carga puntual.

Respuestas: *a)* Comprobación, *b)* $\frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\,\mathbf{a}_z$ y *c)* Comprobación.

Ejemplo 4.5 La lámina finita $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ en el plano $z = 0$ tiene una densidad de carga $\rho_S = xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}$ nC/m². Halle

a) La carga total en la lámina.
b) El campo eléctrico en $(0, 0, 5)$.
c) La fuerza experimentada por una carga de -1 mC localizada en $(0, 0, 5)$.

Solución:

a) $$Q = \int \rho_S \, dS = \int_0^1 \int_0^1 xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} \, dx \, dy \text{ nC}$$

Puesto que $x\,dx = 1/2\; d(x^2)$, ahora integramos respecto de x^2 (o cambiamos variables: $x^2 = u$ de manera que $x\,dx = du/2$).

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2}\int_0^1 y \int_0^1 (x^2 + y^2 + 25)^{3/2} \, d(x^2) \, dy \text{ nC} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y \frac{2}{5}(x^2 + y^2 + 25)^{5/2}\Big|_0^1 dy \\
&= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1}{2}[(y^2 + 26)^{5/2} - (y^2 + 25)^{5/2}] \, d(y^2) \\
&= \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{7}[(y^2 + 26)^{7/2} - (y^2 + 25)^{7/2}]\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{35}[(27)^{7/2} + (25)^{7/2} - 2(26)^{7/2}] \\
Q &= 33.15 \text{ nC}
\end{aligned}$$

b) $$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S \, dS \, \mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \int \frac{\rho_S \, dS \, (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

donde $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (0, 0, 5) - (x, y, 0) = (-x, -y, 5)$. Así,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{10^{-9} xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}(-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) dx\, dy}{4\pi \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}} \\
&= 9\left[-\int_0^1 x^2 \, dx \int_0^1 y \, dy \, \mathbf{a}_x - \int_0^1 x \, dx \int_0^1 y^2 dy \, \mathbf{a}_y + 5\int_0^1 x \, dx \int_0^1 y \, dy \, \mathbf{a}_z\right] \\
&= 9\left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{4}\right) \\
&= (-1.5, -1.5, 11.25) \text{ V/m}
\end{aligned}$$

c) $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = (1.5, 1.5, -11.25)$ mN

Ejercicio 4.5

Una placa cuadrada descrita por $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $z = 0$ porta una carga de $12\,|y|$ mC/m^2. Halle la carga total sobre la placa y la intensidad de campo eléctrico en $(0, 0, 10)$.

Respuesta: 192 mC, 16.46 $\mathbf{a}_z$ MV/m.

Ejemplo 4.6

Los planos $x = 2$ y $y = -3$ portan cargas de 10 nC/m^2 y 15 nC/m^2, respectivamente. Si la línea $x = 0, z = 2$ porta una carga de 10π nC/m, calcule $\mathbf{E}$ en $(1, 1, -1)$ debida a las tres distribuciones de carga.

Solución:

Sea

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

donde $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$ son, respectivamente, las contribuciones a $\mathbf{E}$ en el punto $(1, 1, -1)$ debidas a la lámina infinita 1, la lámina infinita 2 y la línea infinita 3, como se muestra en la figura 4.10*(a)*. La aplicación de las ecuaciones (4.26) y (4.21) da como resultado

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{S_1}}{2\varepsilon_o}(-\mathbf{a}_x) = -\frac{10 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\mathbf{a}_x = -180\pi\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho_{S_2}}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_y = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\mathbf{a}_y = 270\pi\,\mathbf{a}_y$$

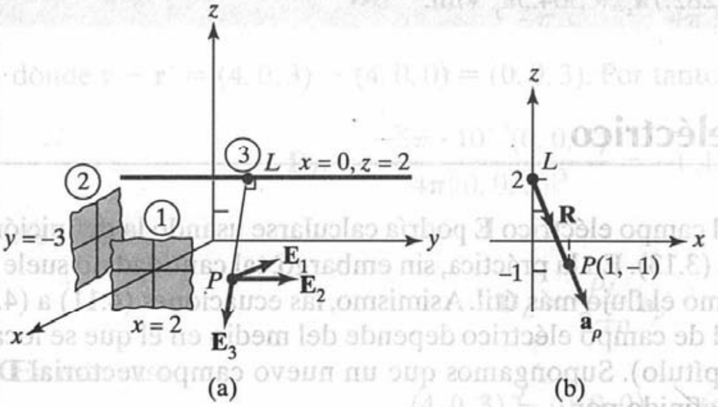


Figura 4.10. Para el ejemplo 4.6: **(a)** tres distribuciones de carga; **(b)** determinación de ρ y $\mathbf{a}_\rho$ en el plano $y = 1$.

y

$$\mathbf{E}_3 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\,\mathbf{a}_\rho$$

donde $\mathbf{a}_\rho$ (no $\mathbf{a}_\rho$ regular, pero de significado semejante) es un vector unitario a lo largo de LP perpendicular a la carga de línea y ρ es la longitud LP por determinar con base en la figura 4.10*(b)*. Esta última figura se desprende de la figura 4.10*(a)* si se considera el plano $y = 1$ en el cual reside $\mathbf{E}_3$. A partir de la figura 4.10*(b)*, el vector de distancia de L a P es

$$\mathbf{R} = -3\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_x$$

$$\rho = |\mathbf{R}| = \sqrt{10}, \qquad \mathbf{a}_\rho = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathbf{a}_x - \frac{3}{\sqrt{10}}\,\mathbf{a}_z$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_3 = \frac{10\pi \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}} \cdot \frac{1}{10}\,(\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z)$$

$$= 18\pi(\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z)$$

Así, sumando $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$, obtenemos el campo total, de esta manera

$$\mathbf{E} = -162\pi\mathbf{a}_x + 270\pi\mathbf{a}_y - 54\pi\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Nótese que para obtener $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\rho$ o $\mathbf{a}_n$ lo cual siempre es indispensable para hallar $\mathbf{F}$ o $\mathbf{E}$, debemos ir de la carga (en el vector de posición $\mathbf{r}'$) al punto del campo (en el vector de posición $\mathbf{r}$); de ahí que $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\rho$ o $\mathbf{a}_n$ sea un vector unitario a lo largo de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Observe esto atentamente en las figuras 4.6 a 4.10.

Ejercicio 4.6

En el ejemplo 4.6, si la línea $x = 0$, $z = 2$ rota 90° alrededor del punto $(0, 2, 2)$ de manera que se convierte en $x = 0$, $y = 2$, halle $\mathbf{E}$ en $(1, 1, -1)$.

Respuesta: $-282.7\mathbf{a}_x + 564.5\mathbf{a}_y$ V/m.

4.4. Densidad de flujo eléctrico

El flujo debido al campo eléctrico $\mathbf{E}$ podría calcularse usando la definición general de flujo en la ecuación (3.13). En la práctica, sin embargo, tal cantidad no suele considerarse en electrostática como el flujo más útil. Asimismo, las ecuaciones (4.11) a (4.16) demuestran que la intensidad de campo eléctrico depende del medio en el que se localiza la carga (el vacío en este capítulo). Supongamos que un nuevo campo vectorial $\mathbf{D}$ independiente del medio está definido por

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_o\mathbf{E}} \tag{4.35}$$

Definimos el *flujo eléctrico* Ψ en términos de **D** usando la ecuación (3.13), es decir,

$$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \tag{4.36}$$

En unidades del sistema internacional (SI), una línea de flujo eléctrico emana de $+1$ C y termina en -1 C. En consecuencia, el flujo eléctrico se mide en coulombs. Así, el campo vectorial **D** se llama *densidad de flujo eléctrico* y se mide en coulombs por metro cuadrado. Por razones históricas, a la densidad de flujo eléctrico también se le conoce como *desplazamiento eléctrico.*

La ecuación (4.35) deja ver claramente que todas las fórmulas deducidas para **E** de la ley de Coulomb en las secciones 4.2 y 4.3 pueden usarse para calcular **D**, salvo que se les debe multiplicar por ε_o. En el caso de una lámina infinita de carga, por ejemplo, las ecuaciones (4.26) y (4.35) resultan en

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2}\,\mathbf{a}_n \tag{4.37}$$

mientras que en el de una distribución de carga volumétrica, las ecuaciones (4.16) y (4.35) resultan en

$$\mathbf{D} = \int \frac{\rho_v\, dv}{4\pi R^2}\,\mathbf{a}_R \tag{4.38}$$

Nótese en las ecuaciones (4.37) y (4.38) que **D** es sólo una función de carga y posición; es independiente del medio.

Ejemplo 4.7

Determine **D** en (4, 0, 3) en presencia de una carga puntual de -5π mC en (4, 0, 0) y de una carga de línea de 3π mC/m a lo largo del eje *y*.

Solución:

Sea $\mathbf{D} = \mathbf{D}_Q + \mathbf{D}_L$, donde $\mathbf{D}_Q$ y $\mathbf{D}_L$ son densidades de flujo debidas a la carga puntual y la carga de línea, respectivamente, como se muestra en la figura 4.11:

$$\mathbf{D}_Q = \varepsilon_o \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\mathbf{a}_R = \frac{Q\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

donde $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (4, 0, 3) - (4, 0, 0) = (0, 0, 3)$. Por tanto,

$$\mathbf{D}_Q = \frac{-5\pi \cdot 10^{-3}(0, 0, 3)}{4\pi|(0, 0, 3)|^3} = -0.138\,\mathbf{a}_z \text{ mC/m}^2$$

Asimismo,

$$\mathbf{D}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\rho$$

En este caso,

$$\mathbf{a}_\rho = \frac{(4, 0, 3) - (0, 0, 0)}{|(4, 0, 3) - (0, 0, 0)|} = \frac{(4, 0, 3)}{5}$$

$$\rho = |(4, 0, 3) - (0, 0, 0)| = 5$$

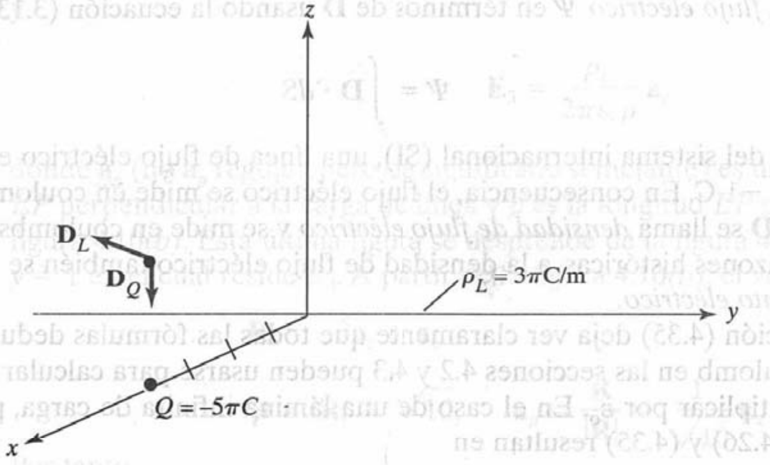


Figura 4.11. Densidad de flujo **D** debida a una carga puntual y una carga de línea infinita.

En consecuencia,

$$\mathbf{D}_L = \frac{3\pi}{2\pi(25)}(4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z) = 0.24\mathbf{a}_x + 0.18\mathbf{a}_z \text{ mC/m}^2$$

Así

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_Q + \mathbf{D}_L \\ &= 240\mathbf{a}_x + 42\mathbf{a}_z \ \mu\text{C/m}^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.7

Una carga puntual de 30 nC se localiza en el origen, mientras que el plano $y = 3$ porta una carga de 10 nC/m^2. Halle **D** en (0, 4, 3).

Respuesta: $5.076\mathbf{a}_y + 0.0573\mathbf{a}_z$ nC/m^2.

4.5. Ley de Gauss—Ecuación de Maxwell

La ley de Gauss[5] es una de las leyes fundamentales del electromagnetismo.

La **ley de Gauss** establece que el flujo eléctrico total Ψ a través de cualquier superficie *cerrada* es igual a la carga total encerrada por esa superficie.

[5] Karl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemán, elaboró el teorema de la divergencia (expuesto en la sección 3.6), popularmente conocido con su nombre. Fue el primer físico en medir cantidades eléctricas y magnéticas en unidades absolutas. Para detalles sobre las mediciones de Gauss, véase W. F. Magie, *op. cit.*, pp. 519-524.

Por tanto,

$$\Psi = Q_{\text{enc}} \tag{4.39}$$

esto es,

$$\Psi = \oint d\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \text{Carga total encerrada } Q = \int \rho_v \, dv \tag{4.40}$$

o

$$\boxed{Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv} \tag{4.41}$$

Si se aplica el teorema de la divergencia al término intermedio de la ecuación (4.41),

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv \tag{4.42}$$

La comparación de las dos integrales de volumen de las ecuaciones (4.41) y (4.42) resulta en

$$\boxed{\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}} \tag{4.43}$$

la cual es la primera de las cuatro *ecuaciones de Maxwell* por deducir. La ecuación (4.43) establece que la densidad de carga volumétrica es igual a la divergencia de la densidad de flujo eléctrico. Esto no es de sorprender si se considera la definición de divergencia de un vector en la ecuación (3.32) y el hecho de que ρ_v en un punto es simplemente la carga por unidad de volumen en ese punto.

Cabe destacar lo siguiente:

1. Las ecuaciones (4.41) y (4.43) enuncian básicamente la ley de Gauss de diferentes maneras: la ecuación (4.41) es la forma integral y la ecuación (4.43) la forma diferencial o puntual.
2. La ley de Gauss es una formulación alterna de la ley de Coulomb; la adecuada aplicación del teorema de la divergencia a la ley de Coulomb da como resultado la ley de Gauss.
3. La ley de Gauss aporta un medio simple para hallar **E** o **D** en el caso de distribuciones simétricas de carga como las de carga puntual, carga de línea infinita, carga superficial cilíndrica infinita y distribución esférica de carga. Una distribución continua de carga posee simetría rectangular si sólo depende de x (o y o z), simetría cilíndrica si sólo depende de ρ y simetría esférica si sólo depende de r (es independiente de θ y ϕ). Cabe destacar que la ley de Gauss se sostiene aun si la distribución de carga no es simétrica. Considérese, por ejemplo, la distribución de carga de la figura 4.12, donde v_1 y v_2 son superficies cerradas (o volúmenes cerrados). El flujo total que sale de v_1 es $10 - 5 = 5$ nC, puesto que 10 nC y -5 nC son las únicas cargas encerradas por v_1. Aunque las cargas 20 nC y 15 nC fuera de v_1 contribuyen al flujo que cruza por ella, de acuerdo con la ley de Gauss el flujo neto que cruza v_1 no toma en cuenta las cargas fuera de ella. De igual forma, el flujo total que sale de v_2 es de cero, puesto que esta superficie no encierra ningu-

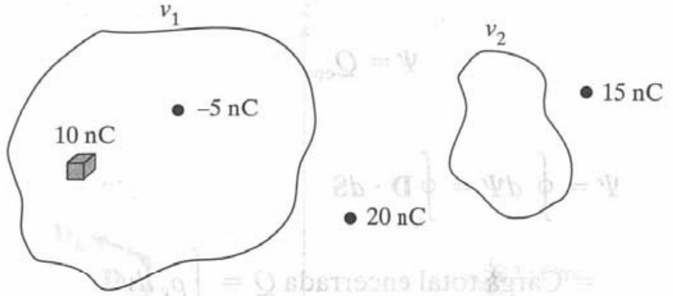


Figura 4.12. Ilustración de la ley de Gauss; el flujo que sale de v_1 es de 5 nC, y el que sale de v_2 de 0 C.

na carga. Esto confirma que la ley de Gauss, $\Psi = Q_{\text{encerrada}}$, no pierde validez pese a que la distribución de carga no sea simétrica. Aun así, no podemos utilizarla en esa circunstancia en la determinación de **E** o **D**, caso para el que debemos recurrir necesariamente a la ley de Coulomb.

4.6. Aplicaciones de la ley de Gauss

El procedimiento para aplicar la ley de Gauss al cálculo del campo eléctrico supone saber antes si existe simetría. Una vez detectada una distribución simétrica de carga, se elabora una superficie cerrada matemática (llamada *superficie gaussiana*). **D** debe ser normal o tangencial a la superficie gaussiana. En el primer caso, $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D\, dS$, puesto que **D** es constante sobre la superficie; en el segundo, $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Así, debe elegirse una superficie que reproduzca en cierto grado la simetría exhibida por la distribución de carga. Apliquemos ahora estas ideas básicas a casos específicos.

A. Carga puntual

Supongamos una carga puntual Q localizada en el origen. Para determinar **D** en un punto P, las condiciones de simetría serían evidentemente satisfechas por una superficie esférica que contenga a P. Así, en este caso la superficie gaussiana es una superficie esférica centrada en el origen como la que aparece en la figura 4.13.

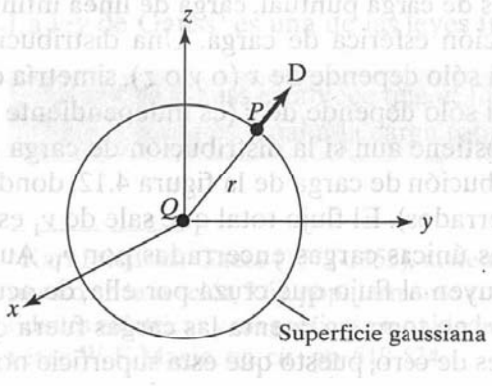


Figura 4.13. Superficie gaussiana alrededor de una carga puntual.

Puesto que **D** es normal en todas partes a la superficie gaussiana, esto es, $\mathbf{D} = D_r\,\mathbf{a}_r$, la aplicación de la ley de Gauss ($\Psi = Q_{\text{encerrada}}$) da como resultado

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r\, 4\pi r^2 \tag{4.44}$$

donde $\oint dS = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi r^2$ es el área de la superficie gaussiana. Así,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\mathbf{a}_r \tag{4.45}$$

como era de esperar de las ecuaciones (4.11) y (4.35).

B. Carga de línea infinita

Supongamos que la línea infinita de carga uniforme ρ_L C/m se ubica a lo largo del eje z. Para determinar **D** en un punto P, elegimos una superficie cilíndrica que contenga a P para satisfacer la condición de simetría, como se muestra en la figura 4.14. **D** es constante en y normal a la superficie gaussiana cilíndrica; es decir, $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$. Si aplicamos la ley de Gauss a una longitud arbitraria ℓ de la línea

$$\rho_L \ell = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_\rho \oint dS = D_\rho\, 2\pi\rho\ell \tag{4.46}$$

donde $\oint dS = 2\pi\rho\ell$ es el área de la superficie gaussiana. Nótese que $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ evaluada en las superficies superior e inferior del cilindro es cero, puesto que **D** carece de componente z; esto significa que **D** es tangencial a esas superficies. Así,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\rho \tag{4.47}$$

como cabía esperar de las ecuaciones (4.21) y (4.35).

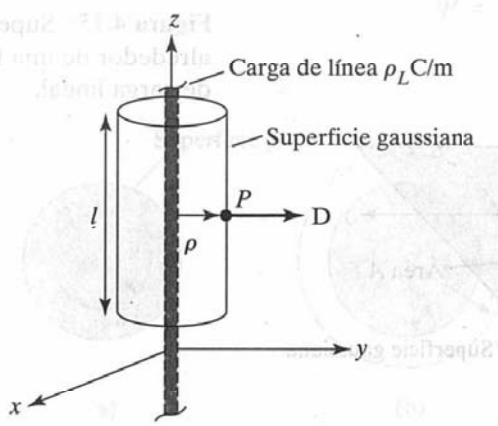


Figura 4.14. Superficie gaussiana alrededor de una carga de línea infinita.

C. Lámina infinita de carga

Considérese la lámina infinita de carga uniforme ρ_S C/m² situada sobre el plano $z = 0$. Para determinar **D** en un punto P, elegimos una caja rectangular simétricamente cortada por la lámina de carga y con dos de sus caras paralelas a la lámina, como se muestra en la figura 4.15. Puesto que **D** es normal a la lámina, $\mathbf{D} = D_z\mathbf{a}_z$, y la aplicación de la ley de Gauss da como resultado

$$\rho_S \int dS = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_z \left[\int_{\text{superior}} dS + \int_{\text{inferior}} dS \right] \tag{4.48}$$

Nótese que $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ evaluada en los lados de la caja es cero porque **D** carece de componentes a lo largo de $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_y$. Si las superficies superior e inferior de la caja poseen cada cual un área A, la ecuación (4.48) se convierte en

$$\rho_S A = D_z(A + A) \tag{4.49}$$

de manera que

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2}\mathbf{a}_z$$

o

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_z \tag{4.50}$$

como cabía esperar de la ecuación (4.25).

D. Esfera con carga uniforme

Considérese una esfera de radio a con una carga uniforme ρ_v C/m³. Para determinar **D** en cualquier punto, se elaboran por separado superficies gaussianas para los casos $r \leq a$ y $r \geq a$. Puesto que la carga posee simetría esférica, es obvio que la superficie gaussiana apropiada es una superficie esférica.

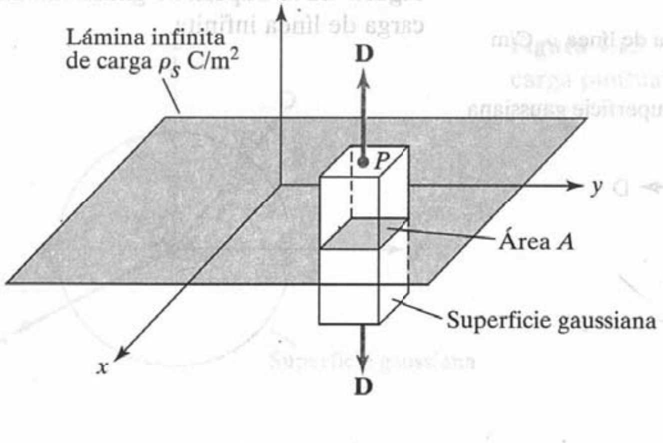


Figura 4.15. Superficie gaussiana alrededor de una lámina infinita de carga lineal.

En el caso de $r \leq a$, la carga total encerrada por la superficie esférica de radio r, como se muestra en la figura 4.16*(a)*, es

$$Q_{\text{enc}} = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r} r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \tag{4.51}$$

$$= \rho_v \frac{4}{3} \pi r^3$$

y

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= D_r \, 4\pi r^2 \tag{4.52}$$

Por tanto, $\Psi = Q_{\text{enc}}$ da como resultado

$$D_r \, 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_v$$

o

$$\mathbf{D} = \frac{r}{3} \rho_v \, \mathbf{a}_r \qquad 0 < r \leq a \tag{4.53}$$

En el caso de $r \geq a$, la superficie gaussiana es la que aparece en la figura 4.16*(b)*. Esta vez la superficie encierra la totalidad de la carga; es decir,

$$Q_{\text{enc}} = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \rho_v \frac{4}{3} \pi a^3 \tag{4.54}$$

mientras que

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \, 4\pi r^2 \tag{4.55}$$

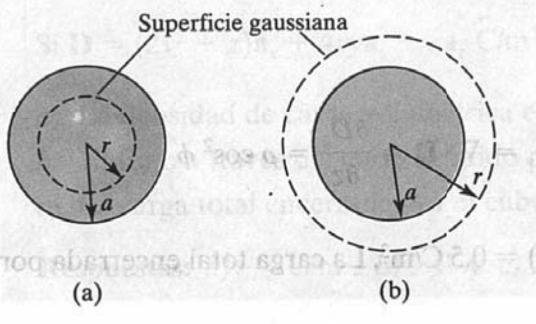


Figura 4.16. Superficie gaussiana para una esfera uniformemente cargada cuando: **(a)** r $\geq a$ y **(b)** $r \leq a$.

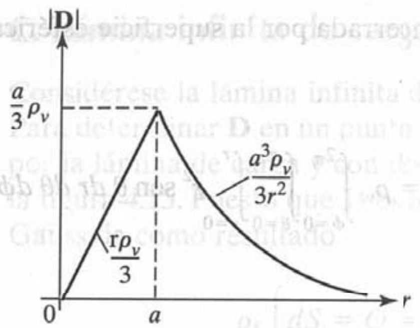


Figura 4.17. Diagrama de $|\mathbf{D}|$ contra r en el caso de una esfera con carga uniforme.

como en la ecuación (4.52). Por tanto:

$$D_r 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v$$

o

$$\mathbf{D} = \frac{a^3}{3r^2}\rho_v \, \mathbf{a}_r \qquad r \geq a \tag{4.56}$$

Así, a partir de las ecuaciones (4.53) y (4.56), $\mathbf{D}$ en cualquier punto está dada por

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \dfrac{r}{3}\rho_v \, \mathbf{a}_r & 0 < r \leq a \\ \dfrac{a^3}{3r^2}\rho_v \, \mathbf{a}_r & r \geq a \end{cases} \tag{4.57}$$

y $|\mathbf{D}|$ es como se indica en la figura 4.17.

Adviértase en las ecuaciones (4.44), (4.46), (4.48) y (4.52) que la posibilidad de eximir a $\mathbf{D}$ del signo de la integral es la clave para hallar $\mathbf{D}$ mediante la ley de Gauss. En otras palabras, $\mathbf{D}$ debe ser constante en la superficie gaussiana.

Ejemplo 4.8

Puesto que $\mathbf{D} = z\rho \cos^2\phi \, \mathbf{a}_z$ C/m^2, calcule la densidad de carga en $(1, \pi/4, 3)$ y la carga total encerrada por el cilindro de radio 1 m con $-2 \leq z \leq 2$ m.

Solución:

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \cos^2 \phi$$

En $(1, \pi/4, 3)$, $\rho_v = 1 \cdot \cos^2(\pi/4) = 0.5$ C/m^3. La carga total encerrada por el cilindro puede hallarse de dos maneras.

Método 1. Este método se basa directamente en la definición de la carga volumétrica total.

$$Q = \int_v \rho_v \, dv = \int_v \rho \cos^2 \phi \, \rho \, d\phi \, d\rho \, dz$$
$$= \int_{z=-2}^{2} dz \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \int_{\rho=0}^{1} \rho^2 \, d\rho = 4(\pi)(1/3)$$
$$= \frac{4\pi}{3} \text{ C}$$

Método 2. Alternativamente, es posible aplicar la ley de Gauss.

$$Q = \Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\int_s + \int_t + \int_b \right] \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$
$$= \Psi_s + \Psi_t + \Psi_b$$

donde Ψ_s, Ψ_t y Ψ_b son el flujo a través de los lados, la superficie superior y la superficie inferior del cilindro, respectivamente (fig. 3.17). Puesto que $\mathbf{D}$ carece de componente a lo largo de $\mathbf{a}_\rho$, $\Psi_s = 0$, respecto de Ψ_t, $d\mathbf{S} = \rho \, d\phi \, d\rho \, \mathbf{a}_z$, de modo que

$$\Psi_t = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} z\rho \cos^2 \phi \, \rho \, d\phi \, d\rho \, \bigg|_{z=2} = 2 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}\right)\pi = \frac{2\pi}{3}$$

y respecto de Ψ_b, $d\mathbf{S} = -\rho \, d\phi \, d\rho \, \mathbf{a}_z$, de manera que

$$\Psi_b = -\int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} z\rho \cos^2 \phi \, \rho \, d\phi \, d\rho \, \bigg|_{z=-2} = 2 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi$$
$$= \frac{2\pi}{3}$$

Así

$$Q = \Psi = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ C}$$

como se obtuvo anteriormente.

Ejercicio 4.8

Si $\mathbf{D} = (2y^2 + z)\mathbf{a}_x + 4xy\mathbf{a}_y + x\mathbf{a}_z$ C/m², determine

a) La densidad de carga volumétrica en $(-1, 0, 3)$.

b) El flujo a través del cubo definido por $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

c) La carga total encerrada por el cubo.

Respuestas: *a)* -4 C/m³, *b)* 2 C y *c)* 2 C.

Ejemplo 4.9 Una distribución de carga con simetría esférica posee la densidad

$$\rho_v = \begin{cases} \dfrac{\rho_o r}{R}, & 0 \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Determine **E** en cualquier punto.

Solución:

La distribución de carga es similar a la de la figura 4.16. Puesto que existe simetría, es posible aplicar la ley de Gauss para hallar **E**.

$$\varepsilon_o \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} = \int \rho_v \, dv$$

a) Respecto de $r < R$

$$\varepsilon_o E_r \, 4\pi r^2 = Q_{\text{enc}} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v \, r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\rho_o r}{R} \, dr = \frac{\rho_o \pi r^4}{R}$$

o

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o r^2}{4\varepsilon_o R} \mathbf{a}_r$$

b) Respecto de $r > R$,

$$\varepsilon_o E_r 4\pi r^2 = Q_{\text{enc}} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^R \frac{\rho_o r}{R} 4\pi r^2 \, dr + \int_R^r 0 \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \pi \rho_o R^3$$

o

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o R^3}{4\varepsilon_o r^2} \mathbf{a}_r$$

Ejercicio 4.9

Una distribución de carga en el vacío posee $\rho_v = 2r$ nC/m³ en el caso de $0 \leq r \leq 10$ m y cero en las demás condiciones. Determine **E** en $r = 2$ m y $r = 12$ m.

Respuesta: $226\mathbf{a}_r$ V/m, $3.927\mathbf{a}_r$ kV/m.

4.7. Potencial eléctrico

Con fundamento en las secciones anteriores, la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ debida a una distribución de carga puede obtenerse de la ley de Coulomb en la generalidad de los casos o de la ley de Gauss cuando la distribución de carga es simétrica. Sin embargo, también es posible obtener $\mathbf{E}$ a partir del potencial escalar eléctrico V, que definiremos en la presente sección. Este método para determinar $\mathbf{E}$ es, en cierto sentido, más sencillo, ya que resulta más fácil manejar escalares que vectores.

Supongamos que se desea mover una carga puntual Q del punto A al punto B en el campo eléctrico $\mathbf{E}$ que aparece en la figura 4.18. Con base en la ley de Coulomb, la fuerza sobre Q es $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$, de modo que el *trabajo realizado* en el desplazamiento de la carga por $d\mathbf{l}$ es

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{4.58}$$

El signo negativo indica que el trabajo es realizado por un agente externo. Así, el trabajo realizado total, o la energía potencial requerida, para mover Q de A a B es

$$\boxed{W = -Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \tag{4.59}$$

La división de W entre Q en la ecuación (4.59) da como resultado la energía potencial por unidad de carga. Esta cantidad, denotada con V_{AB}, se conoce como *diferencia de potencial* entre los puntos A y B. Así

$$\boxed{V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \tag{4.60}$$

Conviene destacar lo siguiente

1. Al determinar V_{AB}, A es el punto inicial y B es el final.
2. Si V_{AB} es negativo, hay una pérdida de energía potencial en el desplazamiento de Q de A a B; esto implica que el trabajo es realizado por el campo. Si, en cambio, V_{AB} es positivo, hay una ganancia de energía potencial en el desplazamiento; un agente externo realiza el trabajo.
3. V_{AB} es independiente de la trayectoria adoptada (lo que se demostrará más adelante).
4. V_{AB} se mide en joules por coulomb, unidad comúnmente llamada *volt* (V).

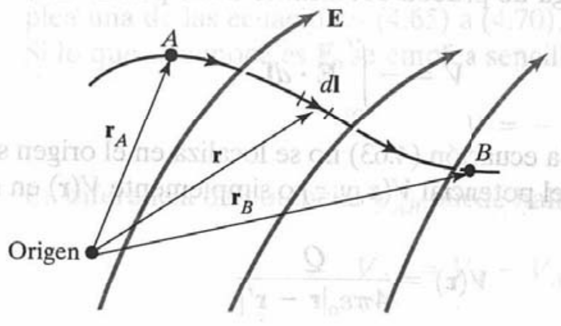


Figura 4.18. Desplazamiento de una carga puntual Q en un campo electrostático $\mathbf{E}$.

Si, por ejemplo, el campo **E** en la figura 4.18 se debe a una carga puntual Q situada en el origen, entonces

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\,\mathbf{a}_r \tag{4.61}$$

de manera que la ecuación (4.60) se convierte en

$$V_{AB} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\,\mathbf{a}_r \cdot dr\,\mathbf{a}_r \tag{4.62a}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

o

$$V_{AB} = V_B - V_A \tag{4.62b}$$

donde V_B y V_A son los **potenciales** (o **potenciales absolutos**) en B y A, respectivamente. De este modo, la diferencia de potencial V_{AB} puede considerarse como el potencial en B en referencia a A. En problemas que implican cargas puntuales se acostumbra elegir el infinito como referencia; es decir, se parte del supuesto de que el potencial en el infinito es cero. Por tanto, si $V_A = 0$ cuando $r_A \to \infty$ en la ecuación (4.62), el potencial en cualquier punto ($r_B \to r$) debido a una carga puntual Q situada en el origen es

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}} \tag{4.63}$$

Nótese en la ecuación (4.62a) que puesto que **E** apunta en la dirección radial, cualquier contribución de un desplazamiento en la dirección de θ o ϕ es anulada por el producto punto $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \cos\theta\, dl = E\, dr$. De ahí que la diferencia de potencial V_{AB} sea independiente de la trayectoria, como ya se indicó.

El **potencial** en cualquier punto es la diferencia de potencial entre ese punto y un punto elegido como referencia en el que el potencial sea cero.

En otras palabras, al suponer un potencial cero en el infinito, el potencial en una distancia r desde la carga puntual es el trabajo por unidad de carga realizado por un agente externo para transferir una carga de prueba del infinito a ese punto. Así,

$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{4.64}$$

Si la carga puntual Q de la ecuación (4.63) no se localiza en el origen sino en un punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}'$, el potencial $V(x, y, z)$ o simplemente $V(\mathbf{r})$ en $\mathbf{r}$ se convierte en

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{4.65}$$

Hasta aquí sólo hemos considerado el potencial eléctrico debido a una carga puntual. No obstante, las ideas básicas a este respecto también se aplican a otros tipos de distribuciones de carga, de todas las cuales es posible afirmar que consisten en cargas puntuales. El principio de superposición, que ya aplicamos a campos eléctricos, se aplica asimismo a potenciales. En el caso de n cargas puntuales $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, situadas en puntos con vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, el potencial en $\mathbf{r}$ es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

o

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}} \quad \text{(cargas puntuales)} \tag{4.66}$$

En el caso de distribuciones continuas de carga, en la ecuación (4.66) se reemplaza Q_k por el elemento de carga $\rho_L\, dl$, $\rho_S\, dS$ o $\rho_v\, dv$ y la sumatoria se convierte en integración, de manera que el potencial en $\mathbf{r}$ se convierte en

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{(carga de línea)} \tag{4.67}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{(carga superficial)} \tag{4.68}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_v \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{(carga volumétrica)} \tag{4.69}$$

donde las coordenadas primas denotan habitualmente la ubicación del punto de origen y las coordenadas no primas se refieren al punto del campo (el punto en el que se determinará V).

Cabe señalar lo siguiente:

1. Recuérdese que en la obtención de las ecuaciones (4.63) a (4.69) se eligió arbitrariamente el infinito como punto (de referencia) de potencial cero. De elegirse como referencia cualquier otro punto, la ecuación (4.65), por ejemplo, se convierte en

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + C \tag{4.70}$$

donde C es una constante que se determina en el punto de referencia elegido. Esta idea también se aplica a las ecuaciones (4.63) a (4.69).

2. El potencial en un punto puede determinarse de dos maneras, según sea lo que se conoce, la distribución de carga o $\mathbf{E}$. Si lo que se conoce es la distribución de carga, se emplea una de las ecuaciones (4.65) a (4.70), según la distribución de carga de que se trate. Si lo que se conoce es $\mathbf{E}$, se emplea sencillamente

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + C \tag{4.71}$$

La diferencia de potencial V_{AB} puede hallarse generalmente a partir de

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{W}{Q} \tag{4.72}$$

Ejemplo 4.10 Dos cargas puntuales $-4\ \mu$C y $5\ \mu$C se localizan en $(2, -1, 3)$ y $(0, 4, -2)$, respectivamente. Halle el potencial en $(1, 0, 1)$, suponiendo potencial cero en el infinito.

Solución:
Sea

$$Q_1 = -4\ \mu\text{C}, \quad Q_2 = 5\ \mu\text{C}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + C_o$$

Si $V(\infty) = 0, C_o = 0,$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |(1, 0, 1) - (2, -1, 3)| = |(-1, 1, -2)| = \sqrt{6}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = |(1, 0, 1) - (0, 4, -2)| = |(1, -4, 3)| = \sqrt{26}$$

Por tanto

$$V(1, 0, 1) = \frac{10^{-6}}{4\pi \times \dfrac{10^{-9}}{36\pi}} \left[\frac{-4}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{26}}\right]$$

$$= 9 \times 10^3\,(-1.633 + 0.9806)$$

$$= -5.872 \text{ kV}$$

Ejercicio 4.10

Si, además de las dos cargas referidas en el ejemplo 4.10, la carga puntual $3\ \mu$C se localiza en el origen, halle el potencial en $(-1, 5, 2)$ suponiendo $V(\infty) = 0$.

Respuesta: 10.23 kV.

Ejemplo 4.11 Una carga puntual de 5 nC se localiza en $(-3, 4, 0)$, mientras que la línea $y = 1, z = 1$ porta una carga uniforme de 2 nC/m.

a) Si $V = 0$ V en $O(0, 0, 0)$, halle V en $A(5, 0, 1)$.
b) Si $V = 100$ V en $B(1, 2, 1)$, halle V en $C(-2, 5, 3)$.
c) Si $V = -5$ V en O, halle V_{BC}.

Solución:
Sea el potencial en cualquier punto

$$V = V_Q + V_L$$

donde V_Q y V_L son las contribuciones a V en ese punto debidas a la carga puntual y la carga de línea, respectivamente. Respecto de la carga puntual,

$$V_Q = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\, \mathbf{a}_r \cdot dr\, \mathbf{a}_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + C_1$$

Respecto de la carga de línea infinita,

$$V_L = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho}\, \mathbf{a}_\rho \cdot d\rho\, \mathbf{a}_\rho$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} \ln \rho + C_2$$

Por tanto,

$$V = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} \ln \rho + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + C$$

donde $C = C_1 + C_2$ = constante, ρ es la distancia perpendicular de la línea $y = 1, z = 1$ al punto del campo y r es la distancia de la carga puntual al punto del campo.

a) Si $V = 0$ en $O(0, 0, 0)$ y lo que debe determinarse es V en $A(5, 0, 1)$, primero deben determinarse los valores de ρ y r en O y A. Hallar r es fácil; sencillamente se emplea la ecuación (2.31). Para hallar ρ respecto de cualquier punto (x, y, z), se parte del hecho de que ρ es la distancia perpendicular de (x, y, z) a la línea $y = 1, z = 1$, la cual es paralela al eje x. Así, ρ es la distancia entre (x, y, z) y $(x, 1, 1)$, puesto que el vector de distancia entre los dos puntos es perpendicular a $\mathbf{a}_x$. De este modo

$$\rho = |(x, y, z) - (x, 1, 1)| = \sqrt{(y-1)^2 + (z-1)^2}$$

La aplicación de esta expresión a ρ y de la ecuación (2.31) a r en los puntos O y A produce

$$\rho_O = |(0, 0, 0) - (0, 1, 1)| = \sqrt{2}$$

$$r_O = |(0, 0, 0) - (-3, 4, 0)| = 5$$

$$\rho_A = |(5, 0, 1) - (5, 1, 1)| = 1$$

$$r_A = |(5, 0, 1) - (-3, 4, 0)| = 9$$

Por tanto,

$$V_O - V_A = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} \ln \frac{\rho_O}{\rho_A} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$= \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \ln \frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right]$$

$$0 - V_A = -36 \ln \sqrt{2} + 45\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)$$

o

$$V_A = 36 \ln \sqrt{2} - 4 = 8.477 \text{ V}$$

Adviértase que se ha evitado calcular la constante C restando un potencial a otro y que no importa cuál se reste a cuál.

b) Si $V = 100$ en $B(1, 2, 1)$ y lo que debe determinarse es V en $C(-2, 5, 3)$, se halla

$$\rho_B = |(1, 2, 1) - (1, 1, 1)| = 1$$

$$r_B = |(1, 2, 1) - (-3, 4, 0)| = \sqrt{21}$$

$$\rho_C = |(-2, 5, 3) - (-2, 1, 1)| = \sqrt{20}$$

$$r_C = |(-2, 5, 3) - (-3, 4, 0)| = \sqrt{11}$$

$$V_C - V_B = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} \ln \frac{\rho_C}{\rho_B} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B}\right]$$

$$V_C - 100 = -36 \ln \frac{\sqrt{20}}{1} + 45 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{21}}\right]$$

$$= -50.175 \text{ V}$$

o

$$V_C = 49.825 \text{ V}$$

c) Para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos no se precisa de una referencia de potencial si se parte del supuesto de una referencia común.

$$V_{BC} = V_C - V_B = 49.825 - 100$$
$$= -50.175 \text{ V}$$

como se obtuvo en el inciso *b)*.

Ejercicio 4.11

Una carga puntual de 5 nC se localiza en el origen. Si $V = 2$ V en $(0, 6, -8)$, halle

a) El potencial en $A(-3, 2, 6)$.
b) El potencial en $B(1, 5, 7)$.
c) La diferencia de potencial V_{AB}.

Respuestas: *a)* 3.929 V, *b)* 2.696 V y *c)* −1.233 V.

4.8. Relación entre E y *V*—Ecuación de Maxwell

Como se demostró en la sección anterior, la diferencia de potencial entre los puntos A y B es independiente de la trayectoria adoptada. Por tanto,

$$V_{BA} = -V_{AB}$$

esto es, $V_{BA} + V_{AB} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

o

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0} \tag{4.73}$$

Esto indica que, como se muestra en la figura 4.19, la integral de línea de **E** a lo largo de una trayectoria cerrada debe ser de cero. En términos físicos, esto implica que en un campo electrostático el desplazamiento de una carga a lo largo de una trayectoria cerrada no supone la realización de ningún trabajo neto. La aplicación del teorema de Stokes a la ecuación (4.73) da como resultado

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

o

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \tag{4.74}$$

De todo campo vectorial que satisface la ecuación (4.73) o (4.74) se dice que es conservativo o irrotacional como se explicó en la sección 3.8. Así, un campo electrostático es un campo conservativo. La ecuación (4.73) o (4.74) es la ecuación de Maxwell para campos eléctricos estáticos (la segunda ecuación de Maxwell por deducir). La ecuación (4.73) es la forma integral y la ecuación (4.74) la forma diferencial; ambas describen la naturaleza conservativa de un campo electrostático.

De nuestra definición de potencial, $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, se deduce que

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz$$

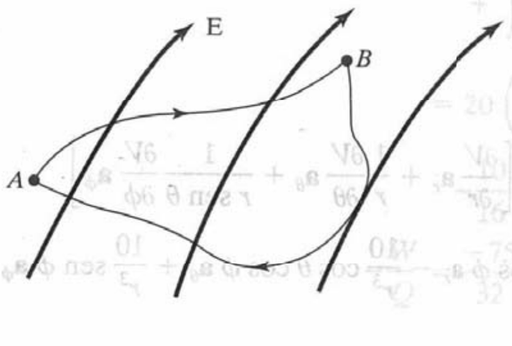


Figura 4.19. Naturaleza conservativa de un campo electrostático.

Pero

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Al comparar las dos expresiones de dV obtenemos

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{4.75}$$

Así:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \tag{4.76}$$

lo cual quiere decir que la intensidad de campo eléctrico es el gradiente de V. El signo negativo indica que la dirección de **E** es la opuesta a la dirección del incremento de V; **E** se dirige de niveles superiores a niveles inferiores de V. Puesto que el rotacional del gradiente de una función escalar es siempre cero ($\nabla \times \nabla V = 0$), la ecuación (4.74) implica obviamente que **E** debe ser un gradiente de alguna función escalar. Así, la ecuación (4.76) habría podido obtenerse de la ecuación (4.74).

La ecuación (4.76) constituye otro medio para la obtención del campo **E** aparte de las leyes de Coulomb y de Gauss. Si el campo potencial V es conocido, **E** puede hallarse mediante la ecuación (4.76). Aunque podría sorprender que una función V contenga la totalidad de la información de las tres componentes de **E**, lo cierto es que éstas no son independientes entre sí; están explícitamente interrelacionadas por la condición $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. La formulación potencial se vale de esta peculiaridad, con lo que un problema de vectores se ve reducido a uno de escalares.

Ejemplo 4.12 Dado el potencial $V = \dfrac{10}{r^2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi$,

a) Halle la densidad de flujo eléctrico **D** en $(2, \pi/2, 0)$.

b) Calcule el trabajo realizado en el desplazamiento de una carga de 10 μC del punto $A(1, 30°, 120°)$ a $B(4, 90°, 60°)$.

Solución:

a) $\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}$

Pero

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi\right]$$

$$= \frac{20}{r^3}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_r - \frac{10}{r^3}\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta + \frac{10}{r^3}\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

En $(2, \pi/2, 0)$,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}\,(r = 2, \theta = \pi/2, \phi = 0) = \varepsilon_o\left(\frac{20}{8}\,\mathbf{a}_r - 0\mathbf{a}_\theta + 0\mathbf{a}_\phi\right)$$

$$= 2.5\varepsilon_o \mathbf{a}_r \text{ C/m}^2 = 22.1\ \mathbf{a}_r \text{ pC/m}^2$$

b) El trabajo realizado puede hallarse de dos maneras: mediante **E** o V.

Método 1:

$$W = -Q\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \quad \text{o} \quad -\frac{W}{Q} = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

y puesto que el campo electrostático es conservativo, la trayectoria de integración es inmaterial. De ahí que el trabajo realizado al desplazar Q de $A(1, 30°, 120°)$ a $B(4, 90°, 60°)$ sea el mismo que para desplazar Q de A a A', de A' a B' y de B' a B, donde

$$\begin{array}{ccc} A(1, 30°, 120°) & & B(4, 90°, 60°) \\ \downarrow d\mathbf{l} = dr\,\mathbf{a}_r & d\mathbf{l} = r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta & \uparrow d\mathbf{l} = r \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, a_\phi \\ A'(4, 30°, 120°) & \longrightarrow & B'(4, 90°, 120°) \end{array}$$

Esto es, en vez de desplazar Q directamente de A a B, se le desplaza de $A \to A'$, $A' \to B'$, $B' \to B$, de manera que sólo cambie una variable cada vez. Esto facilita enormemente la evaluación de la integral de línea. Así,

$$\frac{-W}{Q} = \frac{1}{Q}(W_{AA'} + W_{A'B'} + W_{B'B})$$

$$= \left(\int_{AA'} + \int_{A'B'} + \int_{B'B}\right)\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_{r=1}^{4} \frac{20 \operatorname{sen}\theta\cos\phi}{r^3}\,dr\,\Bigg|_{\theta=30°,\,\phi=120°}$$

$$+ \int_{\theta=30°}^{90°} \frac{-10\cos\theta\cos\phi}{r^3}\,r\,d\theta\,\Bigg|_{r=4,\,\phi=120°}$$

$$+ \int_{\phi=120°}^{60°} \frac{10\operatorname{sen}\phi}{r^3}\,r\operatorname{sen}\theta\,d\phi\,\Bigg|_{r=4,\,\theta=90°}$$

$$= 20\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left[-\frac{1}{2r^2}\Bigg|_{r=1}^{4}\right]$$

$$- \frac{10}{16}\frac{(-1)}{2}\operatorname{sen}\theta\Bigg|_{30°}^{90°} + \frac{10}{16}(1)\left[-\cos\phi\Bigg|_{120°}^{60°}\right]$$

$$-\frac{W}{Q} = \frac{-75}{32} + \frac{5}{32} - \frac{10}{16}$$

o

$$W = \frac{45}{16} Q = 28.125\ \mu\text{J}$$

Método 2:

Puesto que V es conocida, este método es mucho más sencillo.

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = QV_{AB} \\ &= Q(V_B - V_A) \\ &= 10 \left(\frac{10}{16} \operatorname{sen} 90° \cos 60° - \frac{10}{1} \operatorname{sen} 30° \cos 120° \right) \cdot 10^{-6} \\ &= 10 \left(\frac{10}{32} - \frac{-5}{2} \right) \cdot 10^{-6} \\ &= 28.125\ \mu\text{J como se obtuvo anteriormente} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.12

Puesto que $\mathbf{E} = (3x^2 + y)\,\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$ kV/m, halle el trabajo realizado en el desplazamiento de una carga de $-2\ \mu$C de (0, 5, 0) a (2, −1, 0) siguiendo la trayectoria

a) $(0, 5, 0) \rightarrow (2, 5, 0) \rightarrow (2, -1, 0)$

b) $y = 5 - 3x$

Respuestas: *a)* 12 mJ, y *b)* 12 mJ.

4.9. Dipolo eléctrico y líneas de flujo

Un **dipolo eléctrico** se forma cuando dos cargas puntuales de igual magnitud pero signo contrario están separadas por una distancia reducida.

La importancia del campo debido a un dipolo será evidente en capítulos posteriores.

Considérese el dipolo que aparece en la figura 4.20. El potencial en el punto $P(r, \theta, \phi)$ está dado por

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right] \tag{4.77}$$

donde r_1 y r_2 son las distancias entre P y $+Q$ y P y $-Q$, respectivamente. Si $r \gg d$, $r_2 - r_1 \simeq d \cos\theta$, $r_2 r_1 \simeq r^2$, y la ecuación (4.77) se convierte en

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{d \cos\theta}{r^2} \tag{4.78}$$

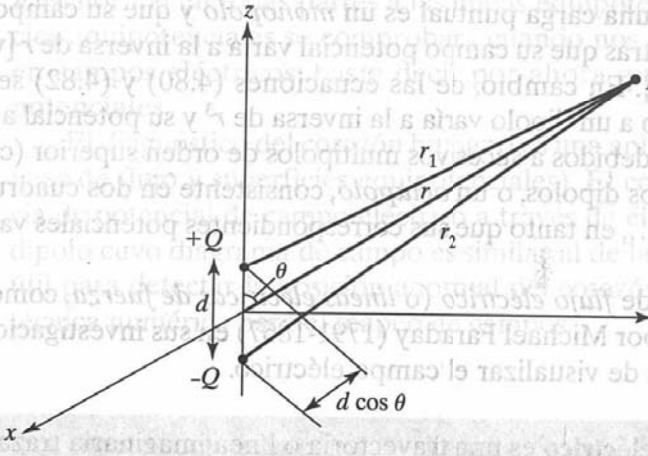


Figura 4.20. Dipolo eléctrico.

Puesto que $d \cos \theta = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r$, donde $\mathbf{d} = d\mathbf{a}_z$, si definimos

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \tag{4.79}$$

como el *momento del dipolo*, la ecuación (4.78) puede expresarse como

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_o r^2} \tag{4.80}$$

Téngase en cuenta que el momento del dipolo **p** se dirige de $-Q$ a $+Q$. Si el centro del dipolo no se encuentra en el origen sino en $\mathbf{r}'$, la ecuación (4.80) se convierte en

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \tag{4.81}$$

El campo eléctrico debido al dipolo con centro en el origen que se muestra en la figura 4.20 puede obtenerse fácilmente de las ecuaciones (4.76) y (4.78), de la manera siguiente

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta\right]$$

$$= \frac{Qd \cos\theta}{2\pi\varepsilon_o r^3}\mathbf{a}_r + \frac{Qd \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}\mathbf{a}_\theta$$

o

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}(2\cos\theta\, \mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta)} \tag{4.82}$$

donde $p = |\mathbf{p}| = Qd$.

Cabe señalar que una carga puntual es un *monopolo* y que su campo eléctrico varía a la inversa de r^2, mientras que su campo potencial varía a la inversa de r [véanse las ecuaciones (4.61) y (4.63)]. En cambio, de las ecuaciones (4.80) y (4.82) se deduce que el campo eléctrico debido a un dipolo varía a la inversa de r^3 y su potencial a la inversa de r^2. Los campos eléctricos debidos a sucesivos multipolos de orden superior (como un *cuadrupolo*, consistente en dos dipolos, o un *octupolo*, consistente en dos cuadrupolos) varían a la inversa de $r^4, r^5, r^6, \ldots$, en tanto que sus correspondientes potenciales varían a la inversa de $r^3, r^4, r^5, \ldots$

La idea de líneas de *flujo eléctrico* (o *líneas eléctricas de fuerza*, como también se les llama) fue propuesta por Michael Faraday (1791-1867) en sus investigaciones experimentales, como una forma de visualizar el campo eléctrico.

Una **línea de flujo eléctrico** es una trayectoria o línea imaginaria trazada de tal manera que su dirección en cualquier punto sea la dirección del campo eléctrico en ese punto.

En otras palabras, las líneas de flujo son las líneas a las cuales la densidad de campo eléctrico **D** es tangencial en cualquier punto.

Toda superficie con igual potencial en cualquier punto se conoce como *superficie equipotencial*. La intersección de una superficie equipotencial y un plano resulta en una trayectoria o línea llamada *línea equipotencial*. El desplazamiento de una carga de un punto a otro a lo largo de una línea o superficie equipotencial ($V_A - V_B = 0$) no implica la realización de trabajo alguno, y de ahí que

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{4.83}$$

sobre la línea o superficie. Con base en la ecuación (4.83) se puede concluir que las líneas de fuerza o líneas de flujo (o la dirección de **E**) son siempre normales a superficies equipotenciales. En la figura 4.21 se muestran ejemplos de superficies equipotenciales con relación a una carga puntual y un dipolo. Nótese en estos ejemplos que la dirección de

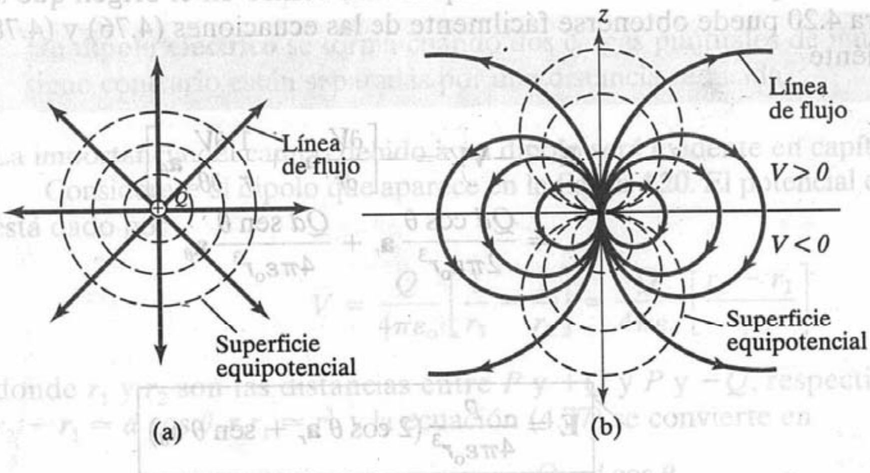


Figura 4.21. Superficies equipotenciales para **(a)** una carga puntual y **(b)** un dipolo eléctrico.

E es normal en todas partes a las líneas equipotenciales. La importancia de las superficies equipotenciales se comprobará cuando nos ocupemos de los cuerpos conductores en campos eléctricos; baste decir por ahora que tales cuerpos son volúmenes equipotenciales.

El diagnóstico del corazón humano es una aplicación común del mapeo de campo (líneas de flujo y superficies equipotenciales). El corazón late en respuesta a una diferencia de potencial de campo eléctrico a través de él. Así, se le puede caracterizar como un dipolo cuyo diagrama de campo es similar al de la figura 4.21(*b*). Tal mapeo de campo es útil para detectar la posición anormal del corazón.[6] En la sección 15.2 se expondrá una técnica numérica para el mapeo de campos.

Ejemplo 4.13

Dos dipolos con momentos de dipolo $-5\mathbf{a}_z$ nC/m y $9\mathbf{a}_z$ nC/m se localizan en los puntos $(0, 0, -2)$ y $(0, 0, 3)$, respectivamente. Halle el potencial en el origen.

Solución:

$$V = \sum_{k=1}^{2} \frac{\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}_k}{4\pi\varepsilon_o r_k^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3}\right]$$

donde

$$\mathbf{p}_1 = -5\mathbf{a}_z, \quad \mathbf{r}_1 = (0,0,0) - (0,0,-2) = 2\mathbf{a}_z, \quad r_1 = |\mathbf{r}_1| = 2$$

$$\mathbf{p}_2 = 9\mathbf{a}_z, \quad \mathbf{r}_2 = (0,0,0) - (0,0,3) = -3\mathbf{a}_z, \quad r_2 = |\mathbf{r}_2| = 3$$

Por tanto,

$$V = \frac{1}{4\pi \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\left[\frac{-10}{2^3} - \frac{27}{3^3}\right] \cdot 10^{-9}$$

$$= -20.25 \text{ V}$$

Ejercicio 4.13

Un dipolo eléctrico de 100 $\mathbf{a}_z$ pC · m se localiza en el origen. Halle V y **E** en los puntos

a) $(0, 0, 10)$
b) $(1, \pi/3, \pi/2)$

Respuestas: *a)* 9 mV, $1.8\mathbf{a}_r$ mV/m y *b)* 0.45 V, $0.9\mathbf{a}_r + 0.7794\mathbf{a}_\theta$ V/m.

---

[6] Para mayor información sobre este tema, véase R. Plonsey, *Bioelectric Phenomena*, McGraw-Hill, Nueva York, 1969.

4.10. Densidad de energía en campos electrostáticos

Para determinar la energía presente en un conjunto de cargas, primero debemos determinar la cantidad de trabajo necesario para reunirlas. Supongamos que se desea situar tres cargas puntuales Q_1, Q_2 y Q_3 en un espacio inicialmente vacío, como el que aparece sombreado en la figura 4.22. La transferencia de Q_1 del infinito a P_1 no demanda trabajo alguno, puesto que el espacio está inicialmente libre de carga y no hay campo eléctrico [de acuerdo con la ecuación (4.59), $W = 0$]. El trabajo realizado al transferir Q_2 del infinito a P_2 es igual al producto de Q_2 y el potencial V_{21} en P_2 debido a Q_1. De igual forma, el trabajo realizado al situar Q_3 en P_3 es igual a $Q_3(V_{32} + V_{31})$, donde V_{32} y V_{31} son los potenciales en P_3 debidos a Q_2 y Q_1, respectivamente. De ahí que el trabajo realizado total para situar las tres cargas sea

$$\begin{aligned} W_E &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= 0 + Q_2V_{21} + Q_3(V_{31} + V_{32}) \end{aligned} \tag{4.84}$$

Si las cargas se sitúan en orden inverso,

$$\begin{aligned} W_E &= W_3 + W_2 + W_1 \\ &= 0 + Q_2V_{23} + Q_1(V_{12} + V_{13}) \end{aligned} \tag{4.85}$$

donde V_{23} es el potencial en P_2 debido a Q_3, y V_{12} y V_{13} los potenciales en P_1 debidos a Q_2 y Q_3, respectivamente. La adición de las ecuaciones (4.84) y (4.85) da como resultado

$$\begin{aligned} 2W_E &= Q_1(V_{12} + V_{13}) + Q_2(V_{21} + V_{23}) + Q_3(V_{31} + V_{32}) \\ &= Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3) \end{aligned}$$

o

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3) \tag{4.86}$$

donde V_1, V_2 y V_3 son los potenciales totales en P_1, P_2 y P_3, respectivamente. En general, si hay n cargas puntuales, la ecuación (4.86) se convierte en

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_kV_k} \qquad \text{(en joules)} \tag{4.87}$$

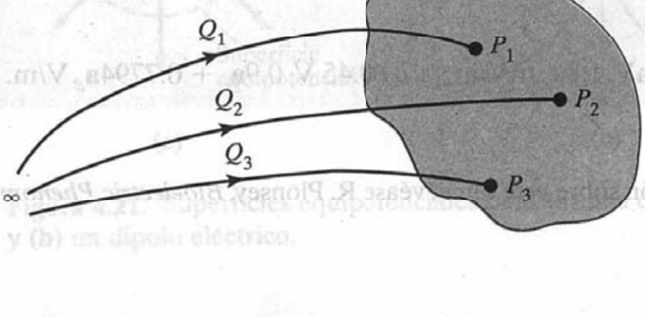


Figura 4.22. Reunión de cargas.

Si en lugar de cargas puntuales la región posee una distribución continua de carga, la sumatoria de la ecuación (4.87) se convierte en integración; es decir,

$$W_E = \frac{1}{2}\int \rho_L V\, dl \qquad \text{(carga de línea)} \tag{4.88}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int \rho_S V\, dS \qquad \text{(carga superficial)} \tag{4.89}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int \rho_v V\, dv \qquad \text{(carga volumétrica)} \tag{4.90}$$

Puesto que $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$, la ecuación (4.90) puede desarrollarse aún más, de lo que resulta

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v (\nabla \cdot \mathbf{D})\, V\, dv \tag{4.91}$$

Pero respecto de todo vector $\mathbf{A}$ y escalar V es válida la identidad

$$\nabla \cdot V\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \nabla V + V(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

o

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})V = \nabla \cdot V\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla V \tag{4.92}$$

De la aplicación de esta identidad a las ecuaciones (4.91) y (4.92) se obtiene

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v (\nabla \cdot V\mathbf{D})\, dv - \frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V)\, dv \tag{4.93}$$

Al aplicar el teorema de la divergencia al primer término del miembro derecho de esta ecuación se tiene que

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V)\, dv \tag{4.94}$$

Recuérdese que, como se indicó en la sección 4.9, en el caso de cargas puntuales V varía cuando $1/r$ y $\mathbf{D}$ cuando $1/r^2$; en el de dipolos, V varía cuando $1/r^2$ y $\mathbf{D}$ cuando $1/r^3$, y así sucesivamente. De ahí que $V\mathbf{D}$ en el primer término del miembro derecho de la ecuación (4.94) deba variar al menos cuando $1/r^3$, mientras que dS varía cuando r^2. En consecuencia, la primera integral de la ecuación (4.94) debe tender a cero al crecer la superficie S. Así, la ecuación (4.94) se reduce a

$$W_E = -\frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V)\, dv = \frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\, dv \tag{4.95}$$

y puesto que $\mathbf{E} = -\nabla V$ y $\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv = \frac{1}{2}\int \varepsilon_o E^2\, dv} \tag{4.96}$$

Con base en ello, la densidad de energía electrostática w_E (en J/m³) puede definirse como

$$w_E = \frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon_o} \tag{4.97}$$

de modo que la ecuación (4.95) podría expresarse como

$$W_E = \int w_E \, dv \tag{4.98}$$

Ejemplo 4.14 Tres cargas puntuales −1 nC, 4 nC y 3 nC se localizan en (0, 0, 0), (0, 0, 1) y (1, 0, 0), respectivamente. Halle la energía en el sistema.

Solución:

$$\begin{aligned}
W &= W_1 + W_2 + W_3 \\
&= 0 + Q_2V_{21} + Q_3(V_{31} + V_{32}) \\
&= Q_2 \cdot \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|(0,0,1) - (0,0,0)|} \\
&\quad + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{Q_1}{|(1,0,0) - (0,0,0)|} + \frac{Q_2}{|(1,0,0) - (0,0,1)|}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + \frac{Q_2Q_3}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\left(-4 - 3 + \frac{12}{\sqrt{2}}\right)\cdot 10^{-18} \\
&= 9\left(\frac{12}{\sqrt{2}} - 7\right)\text{ nJ} = 13.37 \text{ nJ}
\end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} Q_kV_k = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3) \\
&= \frac{Q_1}{2}\left[\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o(1)} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_o(1)}\right] + \frac{Q_2}{2}\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o(1)} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_o(\sqrt{2})}\right] \\
&\quad + \frac{Q_3}{2}\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o(1)} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o(\sqrt{2})}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + \frac{Q_2Q_3}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 9\left(\frac{12}{\sqrt{2}} - 7\right)\text{ nJ} = 13.37 \text{ nJ}
\end{aligned}$$

como se obtuvo antes.

Ejercicio 4.14

Las cargas puntuales $Q_1 = 1$ nC, $Q_2 = -2$ nC, $Q_3 = 3$ nC y $Q_4 = -4$ nC se ubican una a la vez y en ese orden en (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, −1) y (0, 0, 1), respectivamente. Calcule la energía en el sistema tras la ubicación de cada carga.

Respuesta: 0, −18 nJ, −29.18 nJ, −68.27 nJ.

Ejemplo 4.15

Una distribución de carga con simetría esférica posee una densidad

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_o, & 0 \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Determine V en cualquier punto y la energía almacenada en la región $r < R$.

Solución:

El campo **D** ya se halló en la sección 4.6D mediante la ley de Gauss.

a) Respecto de $r \geq R$, $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o r^2}\,\mathbf{a}_r$.

Una vez conocida **E**, V se determina así

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o} \int \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= \frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o r} + C_1, \qquad r \geq R$$

Puesto que $V(r = \infty) = 0$, $C_1 = 0$.

b) Respecto de $r \leq R$, $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_o r}{3\varepsilon_o}\,\mathbf{a}_r$.

Por tanto,

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\rho_o}{3\varepsilon_o} \int r\, dr$$

$$= -\frac{\rho_o r^2}{6\varepsilon_o} + C_2$$

Con base en el inciso *a)*, $V(r = R) = \dfrac{\rho_o R^2}{3\varepsilon_o}$. Así,

$$\frac{R^2 \rho_o}{3\varepsilon_o} = -\frac{\rho_o R^2}{6\varepsilon_o} + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{R^2 \rho_o}{2\varepsilon_o}$$

y

$$V = \frac{\rho_o}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2)$$

De este modo, con base en los incisos *a)* y *b)*,

$$V = \begin{cases} \dfrac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o r}, & r \geq R \\ \dfrac{\rho_o}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2), & r \leq R \end{cases}$$

c) La energía almacenada está dada por

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon_o \int E^2\, dv$$

Respecto de $r \leq R$,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o r}{3\varepsilon_o}\mathbf{a}_r$$

Por tanto,

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_o \frac{\rho_o^2}{9\varepsilon_o^2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{\rho_o^2}{18\varepsilon_o} 4\pi \cdot \frac{r^5}{5}\bigg|_0^R = \frac{2\pi\rho_o^2 R^5}{45\varepsilon_o}\ \mathrm{J}$$

Ejercicio 4.15

Si $V = x - y + xy + 2z$ V, halle **E** en (1, 2, 3) y la energía electrostática almacenada en un cubo de 2 m por lado centrado en el origen.

Respuesta: $-3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_z$ V/m, 0.2358 nJ.

Resumen

1. En este capítulo se presentaron las dos leyes fundamentales relativas a los campos electrostáticos (la de Coulomb y la de Gauss). La ley de la fuerza de Coulomb establece que

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

2. Con base en la ley de Coulomb, la intensidad de campo eléctrico **E** es la fuerza por unidad de carga; es decir

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R = \frac{Q\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon R^3} \quad \text{(sólo en caso de cargas puntuales)}$$

3. En el caso de una distribución continua de carga, la carga total está dada por

$$Q = \int \rho_L \, dl \qquad \text{para carga de línea}$$

$$Q = \int \rho_S \, dS \qquad \text{para carga superficial}$$

$$Q = \int \rho_v \, dv \qquad \text{para carga volumétrica}$$

El campo **E** debido a una distribución continua de carga se obtiene a partir de la fórmula para carga puntual reemplazando Q por $dQ = \rho_L \, dl$, $dQ = \rho_S \, dS$ o $dQ = \rho_v \, dv$ e integrando sobre la línea, superficie o volumen, respectivamente.

4. En el caso de una carga de línea infinita,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho} \mathbf{a}_\rho$$

y en el de una lámina infinita de carga,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o} \mathbf{a}_n$$

5. La densidad de flujo eléctrico **D** se relaciona con la intensidad de campo eléctrico (en el vacío) de esta manera

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}$$

El flujo eléctrico a través de una superficie S es

$$\Psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

6. La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico neto que penetra en una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada por esa superficie, es decir, $\Psi = Q_{\text{enc}}$. Por tanto,

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} = \int \rho_v \, dv$$

o

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} \qquad \text{(primera ecuación de Maxwell por deducir)}$$

Cuando la distribución de carga es simétrica y en consecuencia es posible hallar una superficie gaussiana (donde $\mathbf{D} = D_n \mathbf{a}_n$ es constante), la ley de Gauss es útil para determinar **D**; esto es,

$$D_n \oint dS = Q_{\text{enc}} \qquad \text{o} \qquad D_n = \frac{Q_{\text{enc}}}{S}$$

7. El trabajo realizado total, o la energía de potencial eléctrico, al desplazar una carga puntual Q del punto A a B en un campo eléctrico E es

$$W = -Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

8. El potencial en $\mathbf{r}$ debido a una carga puntual Q en $\mathbf{r}'$ es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C$$

donde C se evalúa en un punto de potencial dado elegido como punto de referencia; por ejemplo, $C = 0$ si $V(\mathbf{r} \to \infty) = 0$. Para determinar el potencial debido a una distribución continua de carga, Q de la fórmula para carga puntual se reemplaza por $dQ = \rho_L\, dl$, $dQ = \rho_S\, dS$ o $dQ = \rho_v\, dv$ y se integra sobre la línea, superficie o volumen, respectivamente.

9. Si la distribución de carga no es conocida pero la intensidad de campo $\mathbf{E}$ está dada, el potencial se halla mediante

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + C$$

10. La diferencia de potencial V_{AB}, el potencial en B en referencia a A, es

$$V_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{W}{Q} = V_B - V_A$$

11. Puesto que un campo electrostático es conservativo (lo cual significa que el trabajo realizado neto a lo largo de una trayectoria cerrada en un campo $\mathbf{E}$ estático es de cero),

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

o

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \text{(segunda ecuación de Maxwell por deducir)}$$

12. Dado el campo potencial, el campo eléctrico correspondiente se halla mediante

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

13. En el caso de un dipolo eléctrico centrado en $\mathbf{r}'$ con momento del dipolo $\mathbf{p}$, el potencial en $\mathbf{r}$ está dado por

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

14. $\mathbf{D}$ es tangencial a la líneas de flujo eléctrico en cualquier punto. Una superficie (o línea) equipotencial es aquella en la que V = constante. En cualquier punto, la línea equipotencial es ortogonal a la línea de flujo eléctrico.

15. La energía electrostática debida a n cargas puntuales es

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k V_k$$

En el caso de una distribución continua de carga volumétrica,

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dv = \frac{1}{2}\int \varepsilon_o |\mathbf{E}|^2\, dv$$

Preguntas de repaso

4.1. Las cargas puntuales $Q_1 = 1$ nC y $Q_2 = 2$ nC están separadas. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son incorrectos?

a) La fuerza sobre Q_1 es repulsiva.
b) La fuerza sobre Q_2 es de igual magnitud que la fuerza sobre Q_1.
c) Conforme la distancia entre ellas decrece, la fuerza sobre Q_1 aumenta linealmente.
d) La fuerza sobre Q_2 es de igual dirección que la de la línea que une a las cargas.
e) Una carga puntual $Q_3 = -3$ nC localizada en el punto intermedio entre Q_1 y Q_2 no experimenta ninguna fuerza neta.

4.2. El plano $z = 10$ m porta una carga de 20 nC/m². La intensidad de campo eléctrico en el origen es

a) $-10\, \mathbf{a}_z$ V/m
b) $-18\pi\, \mathbf{a}_z$ V/m
c) $-72\pi\, \mathbf{a}_z$ V/m
d) $-360\pi\, \mathbf{a}_z$ V/m

4.3. Cargas puntuales de 30 nC, −20 nC y 10 nC se localizan en $(-1, 0, 2)$, $(0, 0, 0)$ y $(1, 5, -1)$, respectivamente. El flujo total que sale de un cubo de 6 m por lado centrado en el origen es de:

a) − 20 nC
b) 10 nC
c) 20 nC
d) 30 nC
e) 60 nC

4.4. La densidad de flujo eléctrico en una superficie esférica $r = b$ es la misma para una carga puntual Q localizada en el origen y para una carga Q uniformemente distribuida sobre la superficie $r = a (a < b)$.

a) Sí
b) No
c) No necesariamente

4.5. El trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ N para dar a una carga de 1 nC un desplazamiento de $10\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 7\mathbf{a}_z$ m es de

a) 103 nJ
b) 60 nJ
c) 64 nJ
d) 20 nJ

4.6. La afirmación de que el campo electrostático es conservativo *no* significa que

a) Tal campo sea el gradiente de un potencial escalar.
b) Su circulación sea idéntica a cero.
c) Su rotacional sea idéntico a cero.
d) El trabajo realizado en una trayectoria cerrada dentro del campo sea cero.
e) La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera sea cero.

4.7. Supongamos que en la habitación en la que usted está trabajando existe un campo eléctrico uniforme, de manera que las líneas de fuerza son horizontales y forman ángulos rectos con una pared. Al caminar hacia la pared de la que emergen las líneas de fuerza en dirección a la habitación, ¿usted se dirige a

a) Puntos de mayor potencial?
b) Puntos de menor potencial?
c) Puntos de igual potencial (línea equipotencial)?

4.8. Una carga Q está uniformemente distribuida en una esfera de radio a. Considerando que el potencial en el infinito es de cero, el potencial en $r = b < a$ es

a) $-\int_{\infty}^{b} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\, dr$

b) $-\int_{\infty}^{b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$

c) $-\int_{\infty}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr - \int_{a}^{b} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\, dr$

d) $-\int_{\infty}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\, dr.$

4.9. Un campo potencial está dado por $V = 3x^2y - yz$. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es cierto?

a) En el punto $(1, 0, -1)$, V y $\mathbf{E}$ tienden a cero.
b) $x^2y = 1$ es una línea equipotencial en el plano xy.
c) La superficie equipotencial $V = -8$ pasa por el punto $P(2, -1, 4)$.
d) El campo eléctrico en P es $12\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ V/m.
e) Un vector unitario normal a la superficie equipotencial $V = -8$ en P es $-0.83\mathbf{a}_x + 0.55\mathbf{a}_y + 0.07\mathbf{a}_z$.

4.10. Un campo potencial eléctrico es producido por las cargas puntuales 1 μC y 4 μC localizadas en $(-2, 1, 5)$ y $(1, 3, -1)$, respectivamente. La energía almacenada en el campo es de

a) 2.57 mJ.
b) 5.14 mJ.
c) 10.28 mJ.
d) Ninguno de los valores anteriores.

Respuestas: 4.1*c*, *e*, 4.2*d*, 4.3*b*, 4.4*a*, 4.5*d*, 4.6*e*, 4.7*a*, 4.8*c*, 4.9*a*, 4.10*b*.

Problemas

4.1. Las cargas puntuales $Q_1 = 5\ \mu$C y $Q_2 = -4\ \mu$C se sitúan en $(3, 2, 1)$ y $(-4, 0, 6)$, respectivamente. Determine la fuerza sobre Q_1.

4.2. Cinco cargas puntuales idénticas de 15 μC se localizan en el centro y vértices de un cuadrado definido por $-1 < x, y < 1, z = 0$.

a) Halle la fuerza sobre la carga puntual de 10 μC en $(0, 0, 2)$.
b) Calcule la intensidad de campo eléctrico en $(0, 0, 2)$.

4.3. Las cargas puntuales Q_1 y Q_2 se localizan en $(4, 0, -3)$ y $(2, 0, 1)$, respectivamente. Si $Q_2 = 4$ nC, halle Q_1 de manera que

a) La $\mathbf{E}$ en $(5, 0, 6)$ carezca de componente z.
b) La fuerza sobre una carga de prueba en $(5, 0, 6)$ carezca de componente x.

4.4. Las cargas $+Q$ y $+3Q$ están separadas por una distancia de 2 m. Una tercera carga está ubicada de tal forma que el sistema electrostático se halla en equilibrio. Determine la ubicación y el valor de la tercera carga en términos de Q.

4.5. Determine la carga total

a) Sobre la línea $0 < x < 5$ m si $\rho_L = 12x^2$ mC/m.
b) Sobre el cilindro $\rho = 3, 0 < z < 4$ m si $\rho_S = \rho z^2$ nC/m².
c) Dentro de la esfera $r = 4$ m si $\rho_v = \dfrac{10}{r \operatorname{sen} \theta}$ C/m³.

4.6. Calcule la carga total debida a las distribuciones de carga designadas como A, B y C en la figura 4.23.

4.7. Halle $\mathbf{E}$ en $(5, 0, 0)$ debida a la distribución de carga designada como A en la figura 4.23.

4.8. Debido a la distribución de carga designada como B en la figura 4.23,

a) Halle $\mathbf{E}$ en el punto $(0, 0, 3)$ si $\rho_S = 5$ mC/m².
b) Halle $\mathbf{E}$ en el punto $(0, 0, 3)$ si $\rho_S = 5 \operatorname{sen} \phi$ mC/m².

4.9. Un disco circular de radio a porta una carga de $\rho_S = \dfrac{1}{\rho}$ C/m². Calcule el potencial en $(0, 0, h)$.

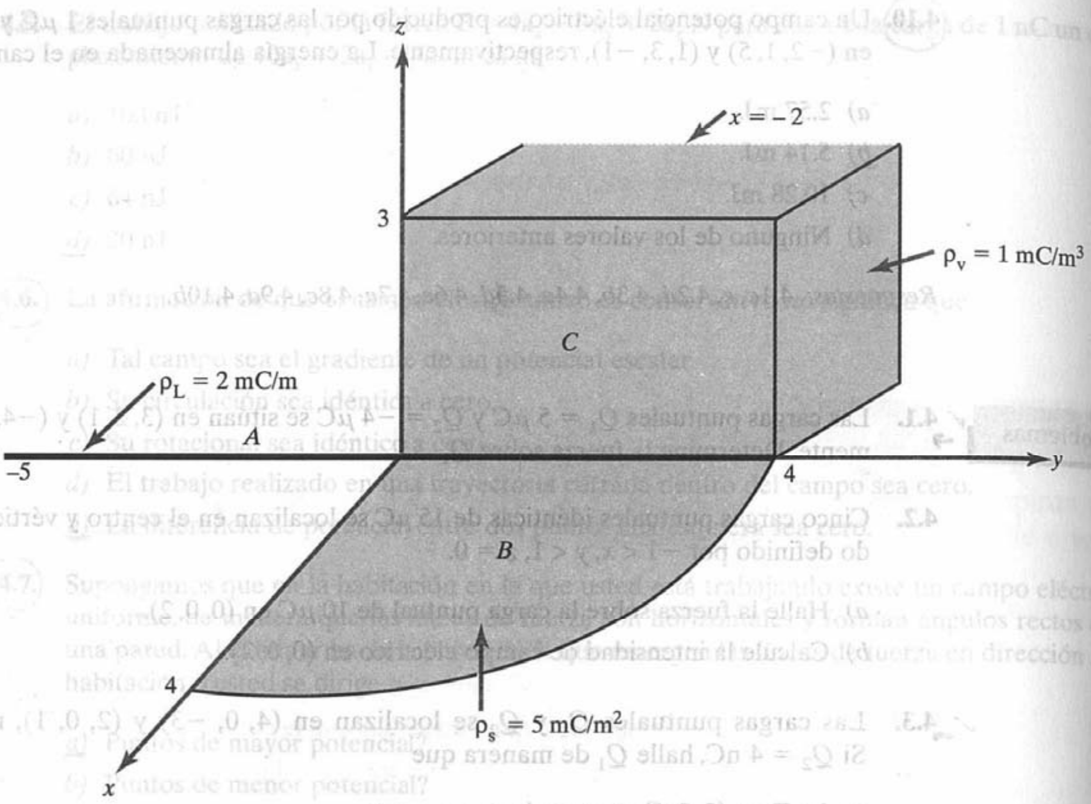


Figura 4.23. Para el problema 4.6.

4.10. Un anillo situado a lo largo de $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$ porta una carga uniforme de 5 μC/m.

a) Halle **D** en $P(3, 0, 0)$.

b) Si, además del anillo, dos cargas puntuales Q idénticas se localizan en $(0, -3, 0)$ y $(0, 3, 0)$, halle el valor de Q de tal manera que $\mathbf{D} = 0$ en P.

***4.11.** *a)* Demuestre que el campo eléctrico en el punto $(0, 0, h)$ debido al rectángulo descrito por $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $z = 0$ y que porta una carga uniforme de ρ_S C/m² es

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\left[\frac{ab}{h(a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}}\right]\mathbf{a}_z$$

b) Si $a = 2$, $b = 5$, $\rho_S = 10^{-5}$, encuentre la carga total en la placa y la intensidad de campo eléctrico en $(0, 0, 10)$.

4.12. Una carga puntual de 100 pC se localiza en $(4, 1, -3)$, mientras que el eje x porta una carga de 2 nC/m. Si el plano $z = 3$ también porta una carga de 5 nC/m², halle **E** en $(1, 1, 1)$.

4.13. La línea $x = 3$, $z = -1$, porta una carga de 20 nC/m, mientras que el plano $x = -2$ porta una carga de 4 nC/m². Halle la fuerza sobre una carga puntual de -5 mC localizada en el origen.

4.14. Cargas puntuales se sitúan en los vértices de un cuadrado de 4 m por lado, como el que se muestra en la figura 4.24. Si $Q = 15$ μC, halle **D** en $(0, 0, 6)$.

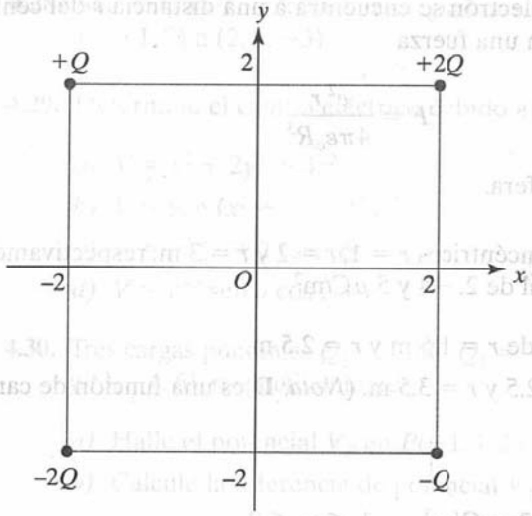


Figura 4.22. Para el problema 4.14.

***4.15.** Enuncie la ley de Gauss. Deduzca la ley de Coulomb de la de Gauss, lo que equivale a afirmar que ésta es una formulación alterna de la de Coulomb, la que a su vez está implícita en la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$.

4.16. Determine la densidad de carga debida a cada una de las siguientes densidades de flujo eléctrico:

a) $\mathbf{D} = 8xy\mathbf{a}_x + 4x^2\mathbf{a}_y$ C/m²

b) $\mathbf{D} = \rho \operatorname{sen} \phi\, \mathbf{a}_\rho + 2\rho \cos \phi\, \mathbf{a}_\phi + 2z^2\mathbf{a}_z$ C/m²

c) $\mathbf{D} = \dfrac{2 \cos \theta}{r^3}\mathbf{a}_r + \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{r^3}\mathbf{a}_\theta$ C/m²

4.17. Sea $\mathbf{E} = xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$, halle

a) La densidad de flujo eléctrico **D**.

b) La densidad de carga volumétrica ρ_v.

4.18. El plano $x + 2y = 5$ porta una carga de $\rho_S = 6$ nC/m². Determine **E** en $(-1, 0, 1)$.

4.19. En el vacío, $\mathbf{D} = 2y^2\mathbf{a}_x + 4xy\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ mC/m². Determine la carga total almacenada en la región $1 < x < 2, 1 < y < 2, -1 < z < 4$.

4.20. En cierta región, el campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{D} = 2\rho(z + 1)\cos \phi\, \mathbf{a}_\rho - \rho(z + 1)\operatorname{sen} \phi\, \mathbf{a}_\phi + \rho^2 \cos \phi\, \mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$$

a) Halle la densidad de carga.

b) Calcule la carga total encerrada por el volumen $0 < \rho < 2, 0 < \phi < \pi/2, 0 < z < 4$.

c) Confirme la ley de Gauss hallando el flujo neto a través de la superficie del volumen descrito en el inciso *b)*.

***4.21.** El modelo del átomo de hidrógeno de Thomson es una esfera de carga positiva con un electrón (una carga puntual) como su centro. La carga total positiva equivale a la carga electrónica *e*.

Compruebe que cuando el electrón se encuentra a una distancia r del centro de la esfera de carga positiva, es atraído con una fuerza

$$F = \frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

donde R es el radio de la esfera.

4.22. Tres cascarones esféricos concéntricos $r = 1$, $r = 2$ y $r = 3$ m, respectivamente, poseen distribuciones de carga superficial de 2, −4 y 5 μC/m².

a) Calcule el flujo a través de $r = 1.5$ m y $r = 2.5$ m.

b) Halle **D** en $r = 0.5$, $r = 2.5$ y $r = 3.5$ m. (*Nota:* **D** es una función de cambio y posición.)

4.23. Puesto que

$$\rho_v = \begin{cases} 12\rho \text{ nC/m}^3, & 1 < \rho < 2 \\ 0, & \text{en las demás condiciones} \end{cases}$$

determine **D** en cualquier punto.

4.24. Sea

$$\rho_v = \begin{cases} \dfrac{10}{r^2} \text{ mC/m}^3, & 1 < r < 4 \\ 0, & r > 0 \end{cases}$$

a) Halle el flujo neto que cruza la superficie $r = 2$ m y $r = 6$ m.

b) Determine **D** en $r = 1$ m y $r = 5$ m.

4.25. Halle el trabajo realizado en la transferencia de una carga de 5 C de $P(1, 2, -4)$ a $R(3, -5, 6)$ en un campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x + z^2\mathbf{a}_y + 2yz\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

4.26. Puesto que el campo eléctrico en cierta región es

$$\mathbf{E} = (z+1) \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_\rho + (z+1)\, \rho \cos \phi \, \mathbf{a}_\phi + \rho \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

determine el trabajo realizado en el desplazamiento de una carga de 4 nC de

a) $A(1, 0, 0)$ a $B(4, 0, 0)$

b) $B(4, 0, 0)$ a $C(4, 30°, 0)$

c) $C(4, 30°, 0)$ a $D(4, 30°, -2)$

d) A a D

4.27. En un campo eléctrico $\mathbf{E} = 20r \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{a}_r + 10r \cos \theta \, \mathbf{a}_\theta$ V/m, calcule la energía consumida para transferir una carga de 10 nC

a) De $A(5, 30°, 0°)$ a $B(5, 90°, 0°)$.

b) De A a $C(10, 30°, 0°)$.

c) De A a $D(5, 30°, 60°)$.

d) De A a $E(10, 90°, 60°)$.

4.28. Sea $V = xy^2z$, calcule la energía consumida para transferir una carga puntual de 2 μC de $(1, -1, 2)$ a $(2, 1, -3)$.

4.29. Determine el campo eléctrico debido a los potenciales siguientes:

a) $V = x^2 + 2y^2 + 4z^2$

b) $V = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

c) $V = \rho^2 (z + 1) \operatorname{sen} \phi$

d) $V = e^{-r} \operatorname{sen} \theta \cos 2\phi$

4.30. Tres cargas puntuales $Q_1 = 1$ mC, $Q_2 = -2$ mC y $Q_3 = 3$ mC se localizan en $(0, 0, 4)$, $(-2, 5, 1)$ y $(3, -4, 6)$, respectivamente.

a) Halle el potencial V_P en $P(-1, 1, 2)$.

b) Calcule la diferencia de potencial V_{PQ} si Q es $(1, 2, 3)$.

4.31. En el vacío, $V = x^2y(z + 3)$ V. Halle

a) $\mathbf{E}$ en $(3, 4, -6)$.

b) La carga dentro del cubo $0 < x,y,z < 1$.

4.32. Una distribución esférica de carga está dada por

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_o \dfrac{r}{a}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Halle V en cualquier punto.

4.33. Para comprobar que $\mathbf{E} = yz\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y + xy\mathbf{a}_z$ V/m es realmente un campo eléctrico, demuestre que

a) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

b) $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, donde L es el borde del cuadrado definido por $0 < x, y < 2$, $z = 1$.

4.34. *a)* Una carga total $Q = 60$ μC está dividida en dos cargas iguales localizadas a intervalos de 180° alrededor de un circuito circular de 4 m de radio. Halle el potencial en el centro del circuito.

b) Si Q está dividida en tres cargas iguales espaciadas a intervalos de 120° alrededor del circuito, halle el potencial en el centro.

c) Si en el límite $\rho_L = \dfrac{Q}{8\pi}$, halle el potencial en el centro.

4.35. Respecto de una distribución esférica de carga

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_o (a^2 - r^2), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

a) Halle $\mathbf{E}$ y V en el caso $r \geq a$.

b) Halle $\mathbf{E}$ y V en el caso $r \leq a$.

c) Halle la carga total.

d) Demuestre que $\mathbf{E}$ alcanza su máximo valor cuando $r = 0.145a$.

***4.36.** *a)* Compruebe que cuando una partícula de masa y carga constantes es acelerada en un campo eléctrico a partir del estado de reposo, su velocidad final es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de potencial de su aceleración.

b) Halle la magnitud de la constante de proporcionalidad si la partícula es un electrón.

c) ¿A qué voltaje debe ser acelerado un electrón, suponiendo que su masa no sufra cambio alguno, para alcanzar una velocidad equivalente a la décima parte de la velocidad de la luz? (A tales velocidades, la masa de un cuerpo se vuelve apreciablemente mayor que su "masa en reposo" y no puede considerarse constante.)

***4.37.** Un electrón proyectado con una velocidad inicial de $u_o = 10^7$ m/s en el campo uniforme entre las placas paralelas que aparecen en la figura 4.25 entra en ese campo por la vía entre las placas. Si el electrón no toca la placa superior al salir del campo,

a) Halle la intensidad de campo eléctrico.

b) Calcule la velocidad del electrón al emerger del campo. Ignore los efectos marginales.

4.38. Un dipolo eléctrico con $\mathbf{p} = p\mathbf{a}_z$ C · m está situado en $(x, z) = (0, 0)$. Si el potencial en $(0, 1)$ nm es de 9 V, halle el potencial en $(1, 1)$ nm.

4.39. Las cargas puntuales Q y $-Q$ se localizan en $(0, d/2, 0)$ y $(0, -d/2, 0)$. Demuestre que en el punto (r, θ, ϕ), donde $\gg d$,

$$V = \frac{Qd \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Halle el correspondiente campo **E**.

4.40. Determine el trabajo necesario para transferir las cargas $Q_1 = 1$ mC y $Q_2 = -2$ mC del infinito a los puntos $(-2, 6, 1)$ y $(3, -4, 0)$, respectivamente.

4.41. Una carga puntual Q se localiza en el origen. Calcule la energía almacenada en la región $r > a$.

4.42. Determine la energía acumulada en la región hemisférica $r \leq 2$ m, $0 < \theta < \pi$, donde existe

$$\mathbf{E} = 2r \operatorname{sen}\theta \cos\phi\, \mathbf{a}_r + r\cos\theta\cos\phi\, \mathbf{a}_\theta - r\operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$$

4.43. Si $V = \rho^2 z \operatorname{sen}\phi$, calcule la energía dentro de la región definida por $1 < \rho < 4$, $-2 < z < 2$, $0 < \phi < \pi/3$.

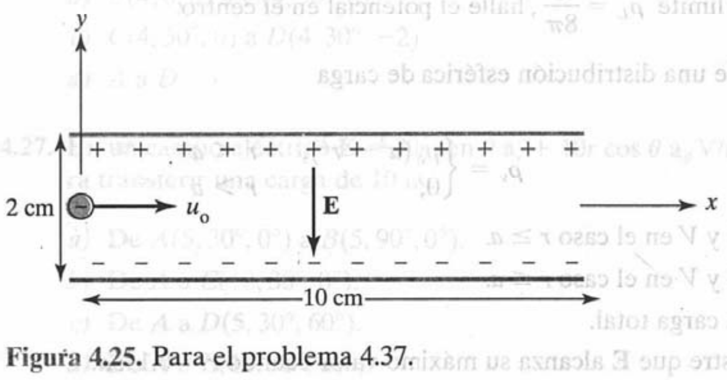


Figura 4.25. Para el problema 4.37.

5 Campos eléctricos en el espacio material

Los 12 principios del carácter: 1. honestidad, 2. discernimiento, 3. compasión, 4. gratitud, 5. paciencia, 6. disciplina, 7. fortaleza, 8. perseverancia, 9. humor, 10. humildad, 11. generosidad y 12. respeto.

KATHRYN B. JOHNSON

5.1. Introducción

En el capítulo anterior nos ocupamos de campos electrostáticos en el vacío o espacio sin materiales. En consecuencia, hasta aquí hemos estudiado lo que podría denominarse la *teoría electrostática del campo vacío*, y en este capítulo nos ocuparemos de la teoría de los fenómenos eléctricos en el espacio material. Pronto comprobaremos que la mayor parte de las fórmulas deducidas en el capítulo 4 también son aplicables en esta área, aunque con ciertas modificaciones en algunos casos.

Así como pueden existir en el vacío, también pueden existir campos eléctricos en medios materiales. En sentido amplio, los materiales se dividen, de acuerdo con sus propiedades eléctricas, en conductores y no conductores. Los materiales no conductores se denominan *aisladores* o *dieléctricos*. Una breve exposición sobre las propiedades eléctricas de los materiales en general permitirá comprender los conceptos de conducción, corriente eléctrica y polarización. En este capítulo también se examinarán propiedades de los materiales dieléctricos como susceptibilidad, permitividad, linealidad, isotropía, homogeneidad, resistencia dieléctrica y tiempo de relajación. Finalmente, se presentará el concepto de condiciones en la frontera de campos eléctricos existentes en dos medios distintos.

5.2. Propiedades de los materiales

Una exposición sobre las propiedades eléctricas de los materiales podría parecer fuera de lugar en un libro como éste. Sin embargo, preguntas como por qué un electrón no abandona la superficie de un conductor, por qué un cable portador de corriente permanece sin carga, los materiales se comportan de diferente manera en un campo eléctrico y por qué las ondas viajan con menor velocidad en conductores que en dieléctricos son fáciles de responder cuando se consideran las propiedades eléctricas de los materiales. Este tema suele tratarse en forma exhaustiva en textos de electrónica física o ingeniería eléctrica. Aquí bastará una breve explicación para comprender el mecanismo por el cual los materiales influyen en un campo eléctrico.

En términos generales, los materiales se clasifican en conductores o no conductores o, técnicamente, en metales y aisladores (o dieléctricos), según su *conductividad* σ, en mhos por metro (℧/m) o siemens por metro (S/m). La conductividad de un material depende usualmente de la temperatura y la frecuencia. Un material de *alta conductividad* ($\sigma \gg 1$)se denomina *metal*; uno de *baja conductividad* ($\sigma \ll 1$), *aislador*, y uno de conductividad intermedia, *semiconductor*. En la tabla B.1 del apéndice B aparecen los valores de conductividad de materiales comunes. Con fundamento en ella, resulta claro que materiales como el cobre y el aluminio son metales; el silicio y el germanio, semiconductores, y el vidrio y el caucho aisladores.

La conductividad de los metales suele aumentar al disminuir la temperatura. En una temperatura cercana al cero absoluto ($T = 0$ °K), algunos conductores exhiben conductividad infinita, motivo por el que se les llama *superconductores*. El plomo y el aluminio son ejemplos representativos de esos metales. La conductividad del plomo a 4 °K es del orden de 10^{20} mhos/m. El lector interesado puede consultar la bibliografía sobre superconductividad.[1]

En este texto sólo nos ocuparemos de metales y aisladores. Microscópicamente, la principal diferencia entre un metal y un aislador radica en la cantidad de electrones disponibles para la conducción de corriente. Los materiales dieléctricos poseen pocos electrones disponibles para la conducción de corriente, en contraste con los metales, que poseen abundantes electrones libres. En secciones posteriores se abordará detalladamente la presencia de conductores y dieléctricos en un campo eléctrico.

5.3. Corrientes de convección y de conducción

Voltaje (o diferencia de potencial) y corriente eléctricos son dos cantidades fundamentales en ingeniería eléctrica. En el capítulo anterior tratamos el potencial. Antes de examinar el comportamiento del campo eléctrico en un conductor o en un dieléctrico es conveniente considerar la corriente eléctrica. La corriente eléctrica suele ser causada por el movimiento de cargas eléctricas.

> La **corriente** (en amperes) a través de un área dada es la carga eléctrica que pasa por esa área por unidad de tiempo.

Es decir,

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{5.1}$$

Así, en una corriente de un ampere, la carga es transferida a razón de un coulomb por segundo.

[1] La edición de agosto de 1989 de *Proceedings of IEEE* se dedicó a "Aplicaciones de la superconductividad".

Introduzcamos ahora el concepto de *densidad de corriente* **J**. Si la corriente ΔI fluye a través de una superficie ΔS, la densidad de corriente es

$$J_n = \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

o

$$\Delta I = J_n \Delta S \tag{5.2}$$

si se parte del supuesto de que la densidad de corriente es perpendicular a la superficie. Si la densidad de corriente no es normal a la superficie,

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S} \tag{5.3}$$

De este modo, la corriente total que fluye a través de una superficie S es

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.4}$$

Según cómo se produzca I, existen diferentes tipos de densidad de corriente: densidad de corriente de convección, densidad de corriente de conducción y densidad de corriente de desplazamiento. Aquí nos detendremos en la densidad de corriente de convección y de conducción; estudiaremos la densidad de corriente de desplazamiento en el capítulo 9. Téngase siempre presente que la ecuación (5.4) se aplica a cualquier tipo de densidad de corriente. En comparación con la definición general de flujo en la ecuación (3.13), la ecuación (5.4) indica que la corriente I a través de S es sencillamente el flujo de la densidad de corriente **J**.

La corriente de convección, en cuanto que distinta a la corriente de conducción, no implica conductores y, en consecuencia, no satisface la ley de Ohm. Ocurre cuando la corriente fluye a través de un medio aislador como líquido, gas enrarecido o en el vacío. Un haz de electrones en un tubo al vacío, por ejemplo, es una corriente de convección.

Considérese el filamento de la figura 5.1. En presencia de un flujo de carga de densidad ρ_v a una velocidad $\mathbf{u} = a_y \mathbf{a}_y$, y con fundamento en la ecuación (5.1), la corriente a través del filamento es

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \, \Delta S \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = \rho_v \, \Delta S \, u_y \tag{5.5}$$

La **densidad de corriente** en un punto dado es la corriente a través de un área unitaria normal en ese punto.

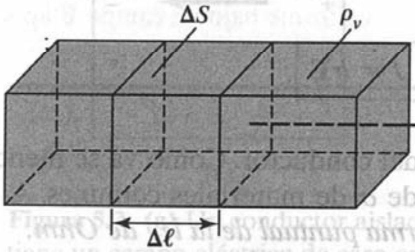


Figura 5.1. Corriente en un filamento.

La densidad de corriente en dirección y J_y está dada por

$$J_y = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v u_y \tag{5.6}$$

Así pues, en general

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}} \tag{5.7}$$

La corriente I es la *corriente de convección* y J es la *densidad de corriente de convección*, en amperes/metro cuadrado (A/m²).

La corriente de conducción requiere de un conductor. Un conductor se caracteriza por una gran cantidad de electrones libres, los cuales suministran corriente de conducción debida a un campo eléctrico aplicado. Cuando se aplica un campo eléctrico $\mathbf{E}$, la fuerza sobre un electrón con carga $-e$ es

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} \tag{5.8}$$

Puesto que tal electrón no se encuentra en el vacío, no se acelerará por efecto del campo eléctrico. Sufrirá en cambio una colisión constante con la red atómica e irá a la deriva de un átomo a otro. Si, de acuerdo con la ley de Newton, el electrón con masa m se desplaza en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ con una velocidad de deriva promedio de $\mathbf{u}$, el cambio promedio en el momento del electrón libre debe ser proporcional a la fuerza aplicada. Así,

$$\frac{m\mathbf{u}}{\tau} = -e\mathbf{E}$$

o

$$\mathbf{u} = -\frac{e\tau}{m}\mathbf{E} \tag{5.9}$$

donde τ es el intervalo temporal promedio entre colisiones. Esto indica que la velocidad de deriva del electrón es directamente proporcional al campo aplicado. Si hay n electrones por unidad de volumen, la densidad de carga electrónica está dada por

$$\rho_v = -ne \tag{5.10}$$

Así, la *densidad de corriente de conducción* es

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$$

o

$$\boxed{J = \sigma\mathbf{E}} \tag{5.11}$$

donde $\sigma = ne^2\tau/m$ es la conductividad del conductor. Como ya se mencionó, en la tabla B.1 del apéndice B se ofrecen valores de σ de materiales comunes. A la relación de la ecuación (5.11) se le conoce como la *forma puntual de la ley de Ohm*.

5.4. Conductores

Un conductor posee abundante carga con libertad de desplazamiento. Considérese el conductor aislado que aparece en la figura 5.2*(a)*. Cuando se aplica un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_e$, las cargas libres positivas son impulsadas en igual dirección que la del campo aplicado, mientras que las cargas libres negativas se mueven en la dirección contraria. Esta migración de carga ocurre muy rápidamente. Las cargas libres hacen dos cosas. Primero, se acumulan en la superficie del conductor y forman una *carga superficial inducida*. Segundo, las cargas inducidas establecen un campo inducido interno $\mathbf{E}_i$, el cual anula al campo externamente aplicado $\mathbf{E}_e$. El resultado se ilustra en la figura 5.2*(b)*. De esto se desprende una importante propiedad de un conductor:

> Un **conductor perfecto** no puede contener un campo electrostático.

A un conductor se le llama cuerpo *equipotencial*, lo que implica que en cualquiera de sus puntos el potencial es el mismo. Esto se basa en el hecho de que $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$.

La ley de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, permite entender este fenómeno de otra manera. Para mantener una densidad de corriente finita $\mathbf{J}$ en un conductor perfecto ($\sigma \to \infty$) es necesario que el campo eléctrico dentro del conductor tienda a cero. En otras palabras, $\mathbf{E} \to 0$, puesto que $\sigma \to \infty$ en un conductor perfecto. Si en éste se introducen algunas cargas, estas últimas se desplazarán a la superficie y se redistribuirán rápidamente en tal forma que el campo dentro del conductor tenderá a cero. De acuerdo con la ley de Gauss, si $\mathbf{E} = 0$, la densidad de carga ρ_v debe ser de cero. En consecuencia, esto también nos lleva a la conclusión de que un conductor perfecto no puede contener un campo electrostático. En condiciones estáticas,

$$\boxed{\mathbf{E} = 0, \qquad \rho_v = 0, \qquad V_{ab} = 0 \qquad \text{dentro de un conductor}} \tag{5.12}$$

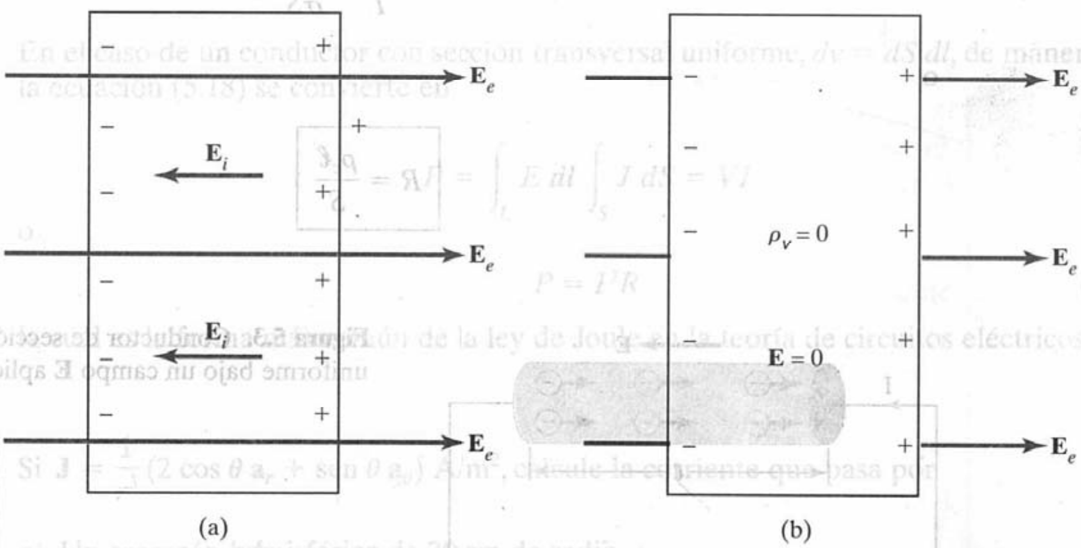


Figura 5.2. (a) Un conductor aislado bajo la influencia de un campo aplicado; **(b)** un conductor tiene un campo eléctrico de cero en condiciones estáticas.

Consideremos ahora un conductor cuyos extremos se mantienen en una diferencia de potencial V, como se muestra en la figura 5.3. Obsérvese que en este caso $\mathbf{E} \neq 0$ dentro del conductor, en contraste con la figura 5.2. ¿Cuál es la diferencia? En la figura 5.3 no hay equilibrio estático, ya que el conductor no está aislado, sino conectado a una fuente de fuerza electromotriz, la cual compele a las cargas libres a moverse e impide que se establezca el equilibrio electrostático. En el caso de la figura 5.3, así, es preciso que dentro del conductor exista un campo eléctrico, para que sea posible sostener el flujo de corriente. Cuando los electrones se mueven, se topan con fuerzas amortiguadoras llamadas *resistencia*. Deduzcamos la resistencia del material conductor de la ley de Ohm en la ecuación (5.11). Supongamos que el conductor posee una sección transversal *uniforme* S y es de longitud ℓ. La dirección del campo eléctrico $\mathbf{E}$ producido es la misma que la del flujo de cargas positivas o corriente I. Esta dirección es contraria a la del flujo de electrones. El campo eléctrico aplicado es uniforme y su magnitud está dada por

$$E = \frac{V}{\ell} \tag{5.13}$$

Puesto que el conductor posee una sección transversal uniforme,

$$J = \frac{I}{S} \tag{5.14}$$

La sustitución de las ecuaciones (5.11) y (5.13) en la ecuación (5.14) da como resultado

$$\frac{I}{S} = \sigma E = \frac{\sigma V}{\ell} \tag{5.15}$$

Por tanto,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$$

o

$$\boxed{R = \frac{\rho_c \ell}{S}} \tag{5.16}$$

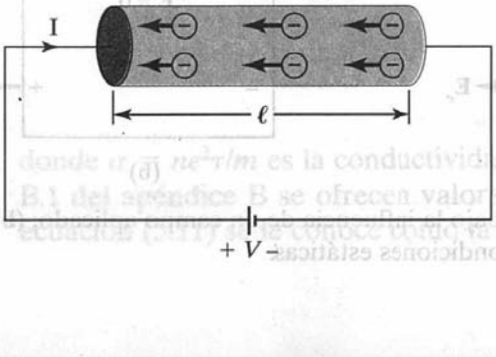


Figura 5.3. Conductor de sección transversal uniforme bajo un campo **E** aplicado.

donde $\rho_c = 1/\sigma$ es la *resistividad* del material. La ecuación (5.16) es útil para determinar la resistencia de cualquier conductor de sección transversal uniforme. Si la sección transversal del conductor no es uniforme, la ecuación (5.16) no es aplicable. Sin embargo, la definición básica de resistencia R como la razón de la diferencia de potencial V entre los dos extremos del conductor y la corriente I a través del conductor sigue vigente. En consecuencia, la aplicación de las ecuaciones (4.60) y (5.4) da como resultado la resistencia de un conductor de sección transversal no uniforme; es decir,

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \sigma E \cdot d\mathbf{S}}} \tag{5.17}$$

Nótese que en la ecuación (5.17) se ha eliminado el signo negativo que precede a $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, a causa de que $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0$ si $I > 0$. No utilizaremos esta ecuación hasta la sección 6.5.

La potencia P (en watts) es la rapidez de cambio de la energía W (en joules) o fuerza por velocidad. Así,

$$\int \rho_v \, dv \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \int \mathbf{E} \cdot \rho_v \mathbf{u} \, dv$$

o

$$\boxed{P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dv} \tag{5.18}$$

lo que se conoce como la *ley de Joule*. La densidad de potencia w_P (en watts/m^3) está dada por el integrando de la ecuación (5.18); esto es,

$$w_P = \frac{dP}{dv} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma \, |\mathbf{E}|^2 \tag{5.19}$$

En el caso de un conductor con sección transversal uniforme, $dv = dS \, dl$, de manera que la ecuación (5.18) se convierte en

$$P = \int_L E \, dl \int_S J \, dS = VI$$

o

$$P = I^2 R \tag{5.20}$$

la cual es la forma más común de la ley de Joule en la teoría de circuitos eléctricos.

Ejemplo 5.1

Si $\mathbf{J} = \frac{1}{r^3}(2\cos\theta \, \mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta \, \mathbf{a}_\theta)$ A/m^2, calcule la corriente que pasa por

a) Un cascarón hemisférico de 20 cm de radio.
b) Un cascarón esférico de 10 cm de radio.

Solución:

$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$, donde $d\mathbf{S} = r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\phi \, d\theta \, \mathbf{a}_r$ en este caso.

a) $$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^3} 2 \cos \theta \, r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\phi \, d\theta \Big|_{r=0.2}$$

$$= \frac{2}{r} 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \, d(\operatorname{sen} \theta) \Big|_{r=0.2}$$

$$= \frac{4\pi}{0.2} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 10\pi = 31.4A$$

b) La única diferencia aquí es que tenemos $0 \leq \theta \leq \pi$ en vez de $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $r = 0.1$. Por tanto,

$$I = \frac{4\pi}{0.1} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 0$$

Alternativamente, en este caso

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv = 0$$

puesto que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Ejercicio 5.1

Con relación a la densidad de corriente $\mathbf{J} = 10z \operatorname{sen}^2 \phi \, \mathbf{a}_\rho$ A/m², halle la corriente a través de la superficie cilíndrica $\rho = 2, 1 \leq z \leq 5$ m.

Respuesta: 754 A.

Ejemplo 5.2

Un ejemplo usual de transporte de carga de convección es el generador de Van de Graaff, donde la carga es trasladada por una correa transportadora desde la base hasta la bóveda, como se muestra en la figura 5.4. Si una densidad de carga superficial de 10^{-7} C/m² es transportada a una velocidad de 2 m/s, calcule la carga acumulada en 5 s. Adopte un ancho de correa de 10 cm.

Solución:

Si ρ_S = densidad de carga superficial, u = velocidad de la correa y w = ancho de la correa, la corriente en la bóveda es

$$I = \rho_S uw$$

La carga total acumulada en $t = 5$ s es

$$Q = It = \rho_S uwt = 10^{-7} \times 2 \times 0.1 \times 5$$
$$= 100 \text{ nC}$$

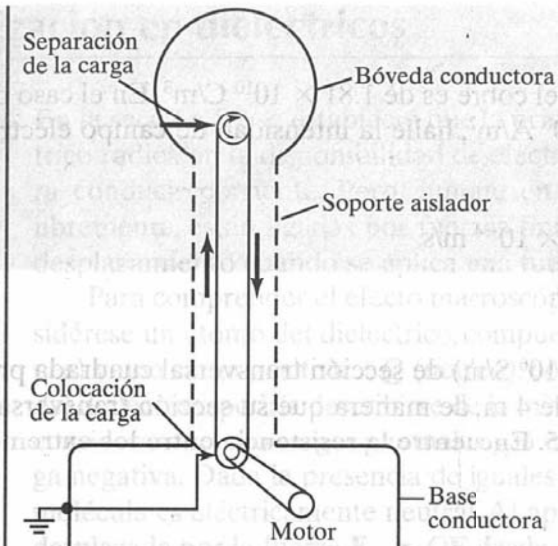


Figura 5.4. Generador de Van de Graaff, para el ejemplo 5.2.

Ejercicio 5.2

En un generador de Van de Graaff, $w = 0.1$ m, $u = 10$ m/s y las trayectorias de dispersión tienen una resistencia de $10^{14}\ \Omega$. Si la correa porta una carga de $0.5\ \mu\text{C/m}^2$, halle la diferencia de potencial entre la bóveda y la base.

Respuesta: 50 MV.

Ejemplo 5.3

Un cable de 1 mm de diámetro y conductividad de 5×10^7 S/m posee 10^{29} electrones libres/m^3 cuando se aplica un campo eléctrico de 10 mV/m. Determine

a) La densidad de carga de los electrones libres.

b) La densidad de corriente.

c) La corriente en el cable.

d) La velocidad de deriva de los electrones. Adopte la carga electrónica $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C.

Solución:

(En este problema, las corrientes de convección y conducción son lo mismo).

a) $\rho_v = ne = (10^{29})(-1.6 \times 10^{-19}) = -1.6 \times 10^{10}\ \text{C/m}^3$

b) $J = \sigma E = (5 \times 10^7)(10 \times 10^{-3}) = 500\ \text{kA/m}^2$

c) $I = JS = (5 \times 10^5)\left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right) = \dfrac{5\pi}{4} \cdot 10^{-6} \cdot 10^5 = 0.393\ \text{A}$

d) Puesto que $J = \rho_v u$, $u = \dfrac{J}{\rho_v} = \dfrac{5 \times 10^5}{1.6 \times 10^{10}} = 3.125 \times 10^{-5}\ \text{m/s}$.

Ejercicio 5.3

La densidad de carga libre del cobre es de 1.81×10^{10} C/m^3. En el caso de una densidad de corriente de 8×10^6 A/m^2, halle la intensidad de campo eléctrico y la velocidad de deriva.

Respuesta: 0.138 V/m, 4.42×10^{-4} m/s.

Ejemplo 5.4

Una barra de plomo ($\sigma = 5 \times 10^6$ S/m) de sección transversal cuadrada presenta un orificio a lo largo de su longitud de 4 m, de manera que su sección transversal corresponde a la que aparece en la figura 5.5. Encuentre la resistencia entre los extremos cuadrados.

Solución:

En virtud de que la sección transversal de la barra es uniforme, podemos aplicar la ecuación (5.16); es decir,

$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

donde $S = d^2 - \pi r^2 = 3^2 - \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9 - \frac{\pi}{4}$ cm^2.

Por tanto,

$$R = \frac{4}{5 \times 10^6(9 - \pi/4) \times 10^{-4}} = 974\ \mu\Omega$$

Ejercicio 5.4

Si el orificio de la barra de plomo del ejemplo 5.4 se rellena con cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^6$ mhos/m), determine la resistencia de la barra compuesta.

Respuesta: 876.7 $\mu\Omega$

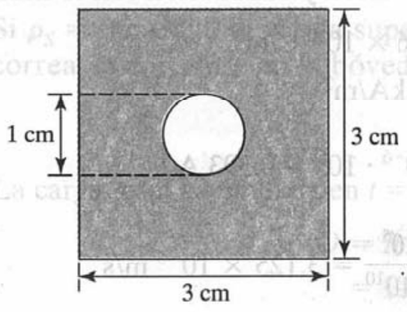


Figura 5.5. Sección transversal de la barra de plomo del ejemplo 5.4.

5.5. Polarización en dieléctricos

En la sección 5.2 se estableció que la principal diferencia entre un conductor y un dieléctrico radica en la disponibilidad de electrones libres en las capas atómicas exteriores para conducir corriente. Pero aunque en un dieléctrico las cargas no pueden moverse libremente, están ligadas por fuerzas finitas, de modo que ciertamente es de esperar un desplazamiento cuando se aplica una fuerza externa.

Para comprender el efecto macroscópico de un campo eléctrico en un dieléctrico, considérese un átomo del dieléctrico, compuesto por una carga negativa $-Q$ (nube de electrones) y una carga positiva $+Q$ (núcleo), como se advierte en la figura 5.6*(a)*. Una molécula del dieléctrico podría describirse de la misma manera; los núcleos de las moléculas podrían considerarse como cargas puntuales y la estructura electrónica como una sola nube de carga negativa. Dada la presencia de iguales montos de carga positiva y negativa, el átomo o molécula es eléctricamente neutral. Al aplicarse un campo eléctrico $\mathbf{E}$, la carga positiva es desplazada por la fuerza $\mathbf{F}_+ = Q\mathbf{E}$ desde su posición de equilibrio hacia la dirección de $\mathbf{E}$, en tanto que la carga negativa es desplazada en dirección opuesta por la fuerza $\mathbf{F}_- = Q\mathbf{E}$. En razón de que del desplazamiento de las cargas resulta un dipolo, se dice que el dieléctrico ha sido *polarizado*. En el estado polarizado, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ aplicado distorsiona la nube de electrones. Esta distribución distorsionada de carga equivale, en virtud del principio de superposición, a la distribución original más un dipolo cuyo momento es

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \tag{5.21}$$

donde $\mathbf{d}$ es el vector de distancia de $-Q$ a $+Q$ del dipolo, como se observa en la figura 5.6*(b)*. Si hay N dipolos en un volumen Δ_v del dieléctrico, el momento del dipolo total debido al campo eléctrico es

$$Q_1\mathbf{d}_1 + Q_2\mathbf{d}_2 + \cdots + Q_N\mathbf{d}_N = \sum_{k=1}^{N} Q_k\mathbf{d}_k \tag{5.22}$$

En cuanto que medida de intensidad de la polarización, la *polarización* $\mathbf{P}$ (en coulombs/metro cuadrado) es el momento del dipolo por unidad de volumen del dieléctrico; es decir,

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\displaystyle\lim_{\Delta v \to 0} \sum_{k=1}^{N} Q_k\mathbf{d}_k}{\Delta v}} \tag{5.23}$$

Así, concluimos que el principal efecto del campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre un dieléctrico es la creación de momentos del dipolo que se alinean en la dirección de $\mathbf{E}$. Se dice que este

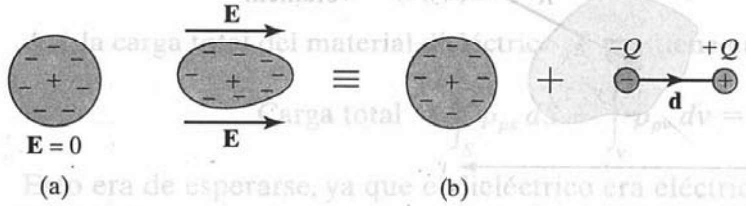


Figura 5.6. Polarización de un átomo o molécula no polar.

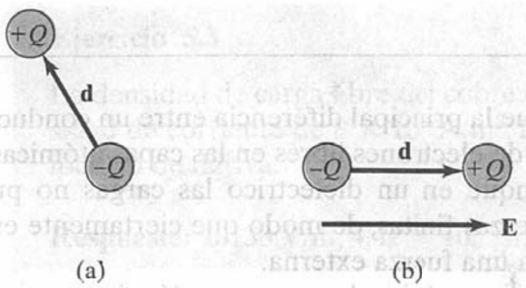


Figura 5.7. Polarización de una molécula polar: **(a)** dipolo permanente ($\mathbf{E} = 0$), y **(b)** alineación del dipolo permanente ($\mathbf{E} \neq 0$).

tipo de dieléctrico es *no polar.* Ejemplos de tales dieléctricos son el hidrógeno, el oxígeno, el nitrógeno y los gases enrarecidos. Las moléculas de dieléctricos no polares no poseen dipolos hasta la aplicación del campo eléctrico, como ya se indicó. Otros tipos de moléculas —como las del agua, el dióxido de azufre y el ácido clorhídrico— poseen dipolos permanentes integrados de orientación aleatoria, como se advierte en la figura 5.7*(a)*, y de ellos se dice que son *polares*. Cuando se aplica un campo eléctrico **E** a una molécula polar, el dipolo permanente de ésta experimenta un torque que tiende a alinear el momento del dipolo de la molécula en paralelo con **E**, como se muestra en la figura 5.7*(b)*.

Calculemos ahora el campo debido a un dieléctrico polarizado. Considérese el material dieléctrico que se muestra en la figura 5.8 como consistente en dipolos con momento de dipolo **P** por unidad de volumen. De acuerdo con la ecuación (4.80), el potencial dV en un punto exterior O debido al momento del dipolo **P** dv' es

$$dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R \, dv'}{4\pi\varepsilon_o R^2} \tag{5.24}$$

donde $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ y R es la distancia entre el elemento de volumen dv' en (x', y', z') y el punto del campo O (x, y, z). Transformemos la ecuación (5.24) para facilitar la interpretación física. Podríamos comprobar rápidamente (véase la sección 7.7) que el gradiente de $1/R$ respecto de las coordenadas primas es

$$\nabla' = \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$$

Así,

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R}\right)$$

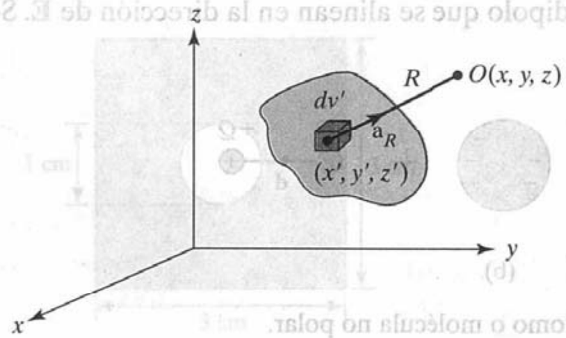


Figura 5.8. Bloque de material dieléctrico con momento del dipolo **P** por unidad de volumen.

Tras aplicar la identidad vectorial $\nabla' \cdot f\mathbf{A} = f\nabla' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla' f$,

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} \tag{5.25}$$

De la sustitución de esta expresión en la ecuación (5.24) y la posterior integración sobre el volumen entero v' del dieléctrico se obtiene

$$V = \int_{v'} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left[\nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{P} \right] dv'$$

La aplicación del teorema de la divergencia al primer término conduce finalmente a

$$V = \int_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}'_n}{4\pi\varepsilon_o R} dS' + \int_{v'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\varepsilon_o R} dv' \tag{5.26}$$

donde $\mathbf{a}'_n$ es el vector unitario hacia fuera normal a la superficie dS' del dieléctrico. La comparación de los dos términos del miembro derecho de la ecuación (5.26) con las ecuaciones (4.68) y (4.69) indica que tales términos denotan el potencial debido a las distribuciones de carga superficial y volumétrica con densidades (tras la eliminación de las primas)

$$\boxed{\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n} \tag{5.27a}$$

$$\boxed{\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}} \tag{5.27b}$$

En otras palabras, la ecuación (5.26) revela que cuando ocurre polarización, en todo el dieléctrico se forma una densidad de carga volumétrica ρ_{pv} equivalente, mientras que sobre la superficie del dieléctrico se forma una densidad de carga superficial ρ_{ps} equivalente. A ρ_{ps} y ρ_{pv} se les conoce respectivamente como *densidades de carga superficial* (o por *polarización*) y *volumétrica latente*, para diferenciarlas de las densidades de carga superficial y volumétrica *libre* ρ_S y ρ_v. Las cargas latentes no gozan de libertad de movimientos dentro del material dieléctrico; son causadas por el desplazamiento que ocurre a escala molecular durante la polarización. Las cargas libres, en cambio, pueden moverse sobre una distancia macroscópica, como los electrones en un conductor; son la materia que controlamos. La carga latente positiva total sobre la superficie S que delimita al dieléctrico es

$$Q_b = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{ps}\, dS \tag{5.28a}$$

mientras que la carga que permanece dentro de S es

$$-Q_b = \int_v \rho_{pv}\, dv = -\int_v \nabla \cdot \mathbf{P}\, dv \tag{5.28b}$$

Así, la carga total del material dieléctrico se mantiene en cero; es decir,

$$\text{Carga total} = \oint_S \rho_{ps}\, dS + \int_v \rho_{pv}\, dv = Q_b - Q_b = 0$$

Esto era de esperarse, ya que el dieléctrico era eléctricamente neutral antes de la polarización.

Consideremos ahora el caso en el que la región dieléctrica contiene carga libre. Si ρ_v es la densidad de volumen de carga libre, la densidad de carga volumétrica total ρ_t está dada por

$$\rho_t = \rho_v + \rho_{pv} = \nabla \cdot \varepsilon_o \mathbf{E} \tag{5.29}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \rho_v &= \nabla \cdot \varepsilon_o \mathbf{E} - \rho_{pv} \\ &= \nabla \cdot (\varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \tag{5.30}$$

donde

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}} \tag{5.31}$$

Concluimos que el efecto neto del dieléctrico sobre el campo eléctrico **E** es incrementar la **D** dentro de éste en un monto **P**. En otras palabras, a causa de la aplicación de **E** al material dieléctrico, la densidad de flujo es mayor que en el vacío. Cabe indicar que la definición de **D** en la ecuación (4.35) con referencia al vacío es un caso especial de la definición en la ecuación (5.31), ya que **P** = 0 en el vacío.

Sería de suponer que la polarización **P** variará con relación directa al campo eléctrico **E** aplicado. Éste suele ser el caso en algunos dieléctricos, de lo que se desprende que

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_o \mathbf{E}} \tag{5.32}$$

donde χ_e, llamada *susceptibilidad eléctrica* del material, es en mayor o menor grado una medida de cuán susceptible (o sensible) es un dieléctrico dado a campos eléctricos.

5.6. Constante y resistencia dieléctricas

Al sustituir la ecuación (5.32) en la ecuación (5.31) se obtiene

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o(1 + \chi_e)\,\mathbf{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \mathbf{E} \tag{5.33}$$

o

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}} \tag{5.34}$$

donde

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r} \tag{5.35}$$

y

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}} \tag{5.36}$$

En las ecuaciones (5.33) a (5.36), ε es la *permitividad* del dieléctrico; ε_0, la permitividad del vacío, definida en la ecuación (4.2) como de aproximadamente $10^{-9}/36\pi$ F/m, y ε_r la *constante dieléctrica* o *permitividad relativa.*

La **constante dieléctrica** (o **permitividad relativa**) ε_r es la razón de la permitividad del dieléctrico a la del vacío.

Cabe señalar asimismo que ε_r y χ_e son adimensionales, en tanto que ε y ε_0 están en farads/metro. El valor aproximado de la constante dieléctrica de algunos materiales comunes se ofrece en la tabla B.2 del apéndice B. Tal valor rige en campos estáticos o de baja frecuencia (< 1000 Hz); podría variar en altas frecuencias. Repárese en esa tabla en que ε_r siempre es mayor que o igual a la unidad. En el caso del vacío y materiales no dieléctricos (como metales), $\varepsilon_r = 1$.

La teoría de los dieléctricos hasta aquí explicada parte del supuesto de dieléctricos ideales. En la práctica, sin embargo, ningún dieléctrico es ideal. Cuando el campo eléctrico en un dieléctrico es suficientemente grande, comienza a arrebatar electrones a las moléculas y el dieléctrico se convierte en conductor, caso en el que se dice que ha ocurrido una *disrupción dieléctrica*. Ésta puede suceder en todo tipo de materiales dieléctricos (gases, líquidos y sólidos) y depende de la naturaleza del material, la temperatura, la humedad y la duración del periodo de aplicación del campo. El valor mínimo del campo eléctrico en el que ocurre la disrupción dieléctrica se llama *resistencia dieléctrica* del material dieléctrico.

La **resistencia dieléctrica** es el campo eléctrico máximo que un dieléctrico puede tolerar o soportar sin disrupción.

En la tabla B.2 también aparece la resistencia dieléctrica de dieléctricos comunes. Puesto que nuestra teoría de los dieléctricos pierde vigencia al ocurrir la disrupción dieléctrica, supondremos siempre dieléctricos ideales y eludiremos la disrupción dieléctrica.

†5.7. Dieléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos

Mientras que las ecuaciones (5.24) a (5.31) son asignables a los materiales dieléctricos en general, las ecuaciones (5.32) a (5.34) sólo lo son a materiales lineales isotrópicos. Un material dieléctrico es *lineal* si **D** varía linealmente con **E**, y *no lineal* en caso contrario. Es *homogéneo* cuando ε (o σ) no varía en la región en consideración, sino que es igual en todos los puntos (es decir, independiente de x, y, z), e *inhomogéneo* (o no homogéneo) si ε depende de las coordenadas espaciales. La atmósfera es un ejemplo clásico de medio no homogéneo; su permitividad varía con la altitud. Por último, un material dieléctrico es *isotrópico* cuando **D** y **E** siguen la misma dirección, es decir, cuando posee las mismas propiedades en todas direcciones, y *anisotrópico* (o no isotrópico) cuando **D**, **E** y **P** no son paralelas; ε o χ_e posee en este caso nueve componentes llamados colectivamente

tensor. En lugar de la ecuación (5.34), por ejemplo, para los materiales anisotrópicos rige esta otra:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

Los materiales cristalinos y el plasma magnetizado son anisotrópicos.

Un **material dieléctrico** (en el que se aplica $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) es lineal si ε no cambia con el campo **E** aplicado, homogéneo si ε no cambia de un punto a otro e isotrópico si ε no cambia con la dirección.

Lo mismo puede decirse de un material conductor en el que se aplique $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. El material es lineal si σ no varía con **E**, homogéneo si σ es igual en todos los puntos e isotrópico si σ no varía con la dirección.

En este libro trataremos casi exclusivamente con medios lineales, isotrópicos y homogéneos, a los que se aplican todas las fórmulas deducidas en el capítulo 4 con referencia al vacío mediante el simple reemplazo de ε_o por $\varepsilon_o\varepsilon_r$. Al aplicarse a un medio dieléctrico, así, la ley de Coulomb de la ecuación (4.4), por ejemplo, se convierte en

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R^2}\,\mathbf{a}_R \tag{5.38}$$

y la ecuación (4.96) en

$$W = \frac{1}{2}\int \varepsilon_o\varepsilon_r E^2\,dv \tag{5.39}$$

Ejemplo 5.5

Un cubo dieléctrico de lado L y centro en el origen tiene una polarización radial dada por $\mathbf{P} = a\mathbf{r}$, donde a es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$. Halle todas las densidades de carga latente y demuestre explícitamente que la carga latente total tiende a cero.

Solución:

Respecto de cada una de las seis caras del cubo, hay una carga superficial ρ_{ps}. En el caso de la cara localizada en $x = L/2$, por ejemplo,

$$\rho_{ps} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_x\Big|_{x=L/2} = ax\Big|_{x=L/2} = aL/2$$

La carga superficial latente total es

$$Q_s = \int \rho_{ps}\,dS = 6\int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2} \rho_{ps}\,dy\,dz = \frac{6aL}{2}L^2$$
$$= 3aL^3$$

La densidad de carga volumétrica latente está dada por

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -(a + a + a) = -3a$$

y la carga volumétrica latente total es

$$Q_v = \int \rho_{ps}\, dv = -3a \int dv = -3aL^3$$

Así, la carga total es

$$Q_t = Q_s + Q_v = 3aL^3 - 3aL^3 = 0$$

Ejercicio 5.5

Una varilla delgada de sección transversal A se extiende a lo largo del eje x de $x = 0$ a $x = L$. Su polarización sigue la dirección de su longitud y está dada por $P_x = ax^2 + b$. Calcule ρ_{pv} y ρ_{ps} en cada extremo. Demuestre explícitamente que la carga latente total tiende a cero en este caso.

Respuesta: $0, -2aL, -b, aL^2 + b$, comprobación.

Ejemplo 5.6

La intensidad de campo eléctrico del poliestireno ($\varepsilon_r = 2.55$) que ocupa el espacio entre las placas de un capacitor (o condensador) de placas paralelas es de 10 kV/m. La distancia entre las placas es de 1.5 mm. Calcule

a) D.

b) P.

c) La densidad de carga superficial de la carga libre en las placas.

d) La densidad superficial de la carga por polarización.

e) La diferencia de potencial entre las placas.

Solución:

a) $D = \varepsilon_o \varepsilon_r E = \dfrac{10^{-9}}{36\pi} \cdot (2.55) \cdot 10^4 = 225.4 \text{ nC/m}^2$

b) $P = \chi_e \varepsilon_o E = (1.55) \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 10^4 = 137 \text{ nC/m}^2$

c) $\rho_S = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n = D_n = 225.4 \text{ nC/m}^2$

d) $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n = P_n = 137 \text{ nC/m}^2$

e) $V = Ed = 10^4 (1.5 \times 10^{-3}) = 15 \text{ V}$

Ejercicio 5.6

Se aplica un voltaje de 1 kV a las placas de un capacitor de placas paralelas separadas por 2 mm. Si este espacio está ocupado por poliestireno ($\varepsilon_r = 2.55$), halle **E**, **P** y ρ_{ps}.

Respuesta: $500\mathbf{a}_x$ kV/m, $6.853\mathbf{a}_x$ μC/m², 6.853 μC/m².

Ejemplo 5.7

Una esfera dieléctrica ($\varepsilon_r = 5.7$) de 10 cm de radio tiene una carga puntual de 2 pC situada en su centro. Calcule:

a) La densidad superficial de la carga por polarización sobre la superficie de la esfera.

b) La fuerza ejercida por la carga sobre una carga puntual de –4 pC colocada sobre la esfera.

Solución:

a) Se aplica la ley de Coulomb o de Gauss para obtener

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2}\,\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{P} = \chi_e\varepsilon_o\mathbf{E} = \frac{\chi_e Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}\,\mathbf{a}_r$$

$$\rho_{ps} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r r^2} = \frac{(4.7)2\times10^{-12}}{4\pi(5.7)100\times10^{-4}}$$

$$= 13.12 \text{ pC/m}^2$$

b) Mediante la ley de Coulomb, tenemos

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2}\,\mathbf{a}_r = \frac{(-4)(2)\times10^{-24}}{4\pi\cdot\dfrac{10^{-9}}{36\pi}(5.7)\,100\times10^{-4}}\,\mathbf{a}_r$$

$$= -1.263\ \mathbf{a}_r \text{ pN}$$

Ejercicio 5.7

En un material dieléctrico, $E_x = 5$ V/m y $\mathbf{P} = \dfrac{1}{10\pi}(3\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z)$ nC/m².

Calcule:

a) χ_e

b) **E**

c) **D**

Respuestas: *a)* 2.16, *b)* $5\mathbf{a}_x - 1.67\mathbf{a}_y + 6.67\mathbf{a}_z$ V/m y *c)* $139.7\mathbf{a}_x - 46.6\mathbf{a}_y + 186.3\mathbf{a}_z$ pC/m^2.

Ejemplo 5.8

Halle la fuerza con la que las placas de un capacitor de placas paralelas se atraen entre sí. Determine asimismo la presión sobre la superficie de cada placa debida al campo.

Solución:

Con base en la ecuación (4.26), la intensidad de campo eléctrico sobre la superficie de cada placa es

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\mathbf{a}_n$$

donde $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal a la placa y ρ_S la densidad de carga superficial. La fuerza total sobre cada placa es

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} = \rho_S S \cdot \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\mathbf{a}_n = \frac{\rho_S^2 S}{2\varepsilon_o\varepsilon_r}\mathbf{a}_n$$

o

$$F = \frac{\rho_S^2 S}{2\varepsilon} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}$$

La presión o fuerza/área es $\dfrac{\rho_S^2}{2\varepsilon_o\varepsilon_r}$.

Ejercicio 5.8

En la figura 5.9 aparece un medidor de potencial llamado *electrómetro*. Se trata básicamente de un capacitor de placas paralelas cuya placa de guarda cuelga de uno de los brazos de una balanza, de manera que la fuerza F sobre ella sea mensurable en términos de peso. Si S es el área de cada placa, demuestre que

$$V_1 - V_2 = \left[\frac{2\,Fd^2}{\varepsilon_o S}\right]^{1/2}$$

Respuesta: Comprobación.

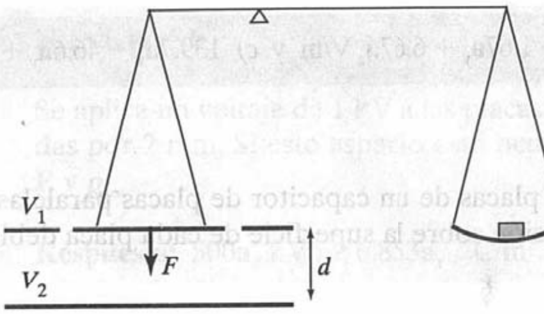


Figura 5.9. Electrómetro; para el ejercicio 5.8.

5.8. Ecuación de continuidad y tiempo de relajación

De acuerdo con el principio de conservación de la carga, la rapidez de reducción de la carga dentro de un volumen dado debe ser igual al flujo neto de corriente hacia fuera a través de la superficie cerrada del volumen. Así, la corriente I_{fue} que sale de la superficie cerrada es

$$I_{\text{fue}} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{-dQ_{\text{ent}}}{dt} \tag{5.40}$$

donde Q_{ent} es la carga total encerrada por la superficie cerrada. Si se aplica el teorema de la divergencia,

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv \tag{5.41}$$

Pero

$$\frac{-dQ_{\text{ent}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_v \rho_v\, dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv \tag{5.42}$$

La sustitución de las ecuaciones (5.41) y (5.42) en la ecuación (5.40) da como resultado

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv$$

o

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \tag{5.43}$$

la cual recibe el nombre de *ecuación de continuidad de la corriente*. Esta ecuación se deduce del principio de conservación de la carga y establece en esencia que no puede haber acumulación de carga en ningún punto. En el caso de corrientes estacionarias, $\partial\rho_v/dt = 0$, y por tanto $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, lo que indica que la carga total que sale de un volumen es la misma que la carga total que entra en él. La ley de la corriente de Kirchhoff se desprende de este principio.

Examinemos ahora, tras haber considerado la ecuación de continuidad y las propiedades σ y ε de los materiales, el efecto de la introducción de carga en algún punto *interior*

de un material (conductor o dieléctrico) dado. A ello se aplica la ecuación (5.43) junto con la ley de Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{5.44}$$

y la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{5.45}$$

La sustitución de las ecuaciones (5.44) y (5.45) en la ecuación (5.43) da como resultado

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho_v}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

o

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v = 0 \tag{5.46}$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea. Al separar las variables de la ecuación (5.46) se obtiene

$$\frac{\partial \rho_v}{\rho_v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \partial t \tag{5.47}$$

y la integración de ambos miembros resulta en

$$\ln \rho_v = -\frac{\sigma t}{\varepsilon} + \ln \rho_{vo}$$

donde $\ln \rho_{vo}$ es una constante de integración. Así

$$\boxed{\rho_v = \rho_{vo} e^{-t/T_r}} \tag{5.48}$$

donde

$$\boxed{T_r = \frac{\varepsilon}{\sigma}} \tag{5.49}$$

En la ecuación (5.48), ρ_{vo} es la densidad de carga inicial (es decir, ρ_v en $t = 0$). Esta ecuación indica que, como resultado de la introducción de carga en algún punto interior del material, hay un descenso de densidad de carga volumétrica ρ_v. Con ese descenso se asocia un desplazamiento de carga del punto interior en el que ésta fue introducida a la superficie del material. La constante temporal T_r (en segundos) se llama *tiempo de relajación* o *tiempo de reacomodo*.

> El **tiempo de relajación** es el tiempo que tarda una carga colocada en el interior de un material para descender a $e^{-1} = 36.8\%$ de su valor inicial.

Este tiempo es breve para buenos conductores y largo para buenos dieléctricos. En el caso del cobre, por ejemplo, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ mhos/m, $\varepsilon_r = 1$, y

$$T_r = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_o}{\sigma} = 1 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{1}{5.8 \times 10^7} \qquad (5.50)$$

$$= 1.53 \times 10^{-19} \text{ s}$$

lo que indica un rápido descenso de la carga colocada dentro del material. Esto implica que, en lo que se refiere a los buenos conductores, el tiempo de relajación es tan breve que la mayor parte de la carga tenderá a cero desde cualquier punto interior y aparecerá en la superficie (como carga superficial). En el caso del vidrio de cuarzo, en cambio, $\sigma = 10^{-17}$ mhos/m, $\varepsilon_r = 5.0$,

$$T_r = 5 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{1}{10^{-17}} \qquad (5.51)$$

$$= 51.2 \text{ días}$$

lo que indica un tiempo de relajación muy prolongado. Respecto de buenos dieléctricos, así, puede considerarse que la carga introducida permanece donde se le haya colocado.

5.9. Condiciones en la frontera

Hasta aquí sólo nos hemos ocupado de la existencia del campo eléctrico en un medio homogéneo. Sin embargo, un campo también existe en una región compuesta por dos medios distintos, caso en el que en la interfaz que separa a esos medios debe satisfacer las llamadas *condiciones en la frontera*. Estas condiciones son útiles para determinar el campo en uno de los lados de la frontera si el campo en el otro lado es conocido. Obviamente, tales condiciones son impuestas por el tipo de material con el que se han producido los medios. Consideraremos las condiciones en la frontera en una interfaz entre

- dieléctrico (ε_{r1}) y dieléctrico (ε_{r2})
- conductor y dieléctrico
- conductor y vacío

Para determinar las condiciones en la frontera debemos emplear las ecuaciones de Maxwell

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad (5.52)$$

y

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} \qquad (5.53)$$

y descomponer la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ en dos componentes ortogonales:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n \qquad (5.54)$$

donde $\mathbf{E}_t$ y $\mathbf{E}_n$ son, respectivamente, las componentes de $\mathbf{E}$ tangencial y normal a la interfaz de interés. También la densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D}$ puede descomponerse de la misma manera

A. Condiciones en la frontera dieléctrico-dieléctrico

Considérese el campo **E** existente en una región compuesta por dos dieléctricos distintos caracterizados por $\varepsilon_1 = \varepsilon_o\varepsilon_{r1}$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_o\varepsilon_{r2}$, como se muestra en la figura 5.10*(a)*. $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ en los medios 1 y 2, respectivamente, pueden descomponerse así:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1t} + \mathbf{E}_{1n} \tag{5.55a}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} \tag{5.55b}$$

Se aplica entonces la ecuación (5.52) a la trayectoria cerrada *abcda* de la figura 5.10*(a)*, partiendo del supuesto de que tal trayectoria es muy reducida respecto de la variación de **E**. De ello se obtiene

$$0 = E_{1t}\,\Delta w - E_{1n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2t}\,\Delta w + E_{2n}\frac{\Delta h}{2} + E_{1n}\frac{\Delta h}{2} \tag{5.56}$$

donde $E_t = |\mathbf{E}_t|$ y $E_n = |\mathbf{E}_n|$. Cuando $\Delta h \to 0$, la ecuación (5.56) se convierte en

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \tag{5.57}$$

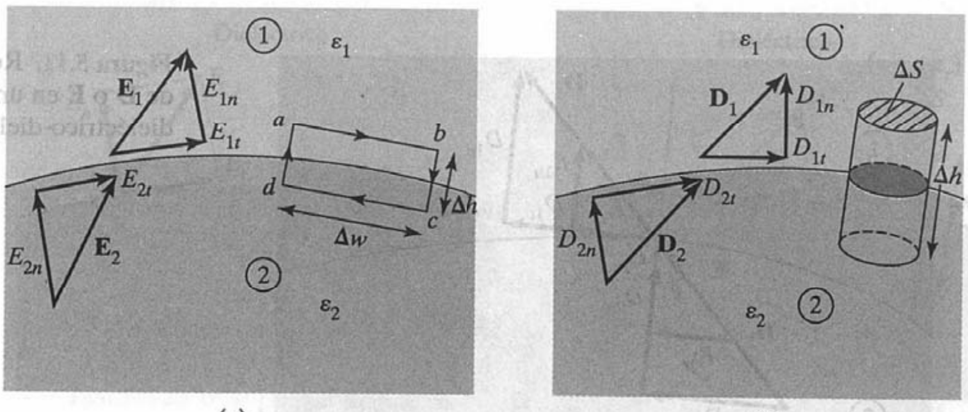
Así, las componentes tangenciales de **E** son iguales en los dos lados de la frontera. En otras palabras, $\mathbf{E}_t$ no sufre ningún cambio en la frontera: es *continua* de un lado a otro de la frontera. Puesto que $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_n$, la ecuación (5.57) puede expresarse como

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = E_{1t} = E_{2t} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

o

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \tag{5.58}$$

es decir, D_t sufre algún cambio a través de la interfaz: es *discontinua* de un lado a otro de la interfaz.



(a) (b)

Figura 5.10. Frontera dieléctrico-dieléctrico.

En forma similar, se aplica la ecuación (5.53) al objeto (superficie gaussiana) de la figura 5.10*(b)*. Si concedemos que $\Delta h \to 0$, entonces

$$\Delta Q = \rho_S \, \Delta S = D_{1n} \, \Delta S - D_{2n} \, \Delta S$$

o

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \rho_S} \tag{5.59}$$

donde ρ_S es la densidad de carga libre deliberadamente colocada en la frontera. Téngase presente que la ecuación (5.59) se basa en el supuesto de que $\mathbf{D}$ se dirige de la región 2 a la región 1, de modo que esta ecuación debe aplicarse en consecuencia. Si en la interfaz no existe ninguna carga libre (es decir, si ahí no se han colocado cargas en forma deliberada), $\rho_S = 0$ y la ecuación (5.59) se convierte en

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}} \tag{5.60}$$

De esta manera, la componente normal de $\mathbf{D}$ es continua de un lado a otro de la interfaz; esto es, D_n no sufre ningún cambio en la frontera. Puesto que $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, la ecuación (5.60) puede expresarse como

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \tag{5.61}$$

lo que indica que la componente normal de $\mathbf{E}$ es discontinua en la frontera. Las ecuaciones (5.57) y (5.59) o (5.60) reciben en conjunto el nombre de *condiciones en la frontera*; deben ser satisfechas por un campo eléctrico en la frontera que separa a dos dieléctricos distintos.

Como ya se mencionó, las condiciones en la frontera suelen aplicarse para determinar el campo eléctrico en un lado de la frontera dado el campo en el otro lado. Pero además, las condiciones en la frontera pueden usarse para determinar la "refracción" del campo eléctrico a través de la interfaz. Considérse $\mathbf{D}_1$ o $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{D}_2$ o $\mathbf{E}_2$, los cuales foman los ángulos θ_1 y θ_2 con la *normal* a la interfaz, como se ilustra en la figura 5.11. Usando la ecuación (5.57), tenemos

$$E_1 \text{ sen } \theta_1 = E_{1t} = E_{2t} = E_2 \text{ sen } \theta_2$$

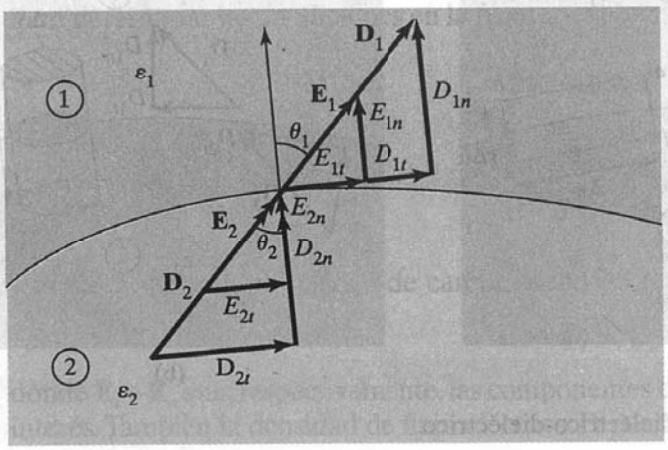


Figura 5.11. Refracción de **D** o **E** en una frontera dieléctrico-dieléctrico.

o

$$E_1 \operatorname{sen} \theta_1 = E_2 \operatorname{sen} \theta_2 \tag{5.62}$$

De igual forma, la aplicación de la ecuación (5.60) o (5.61) resulta en

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = D_{1n} = D_{2n} = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

o

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2 \tag{5.63}$$

Al dividir la ecuación (5.62) entre la ecuación (5.63) se obtiene

$$\frac{\tan \theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\varepsilon_2} \tag{5.64}$$

Puesto que $\varepsilon_1 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1}$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r2}$, la ecuación (5.64) se convierte en

$$\boxed{\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \tag{5.65}$$

Ésta es la *ley de refracción* del campo eléctrico en una frontera libre de carga (puesto que se da por sentado que en la interfaz $\rho_S = 0$). En general, así, una interfaz entre dos dieléctricos produce una flexión en las líneas de flujo como resultado de la acumulación en los lados de la interfaz de cargas por polarización desiguales.

B. Condiciones en la frontera conductor-dieléctrico

Este caso se ilustra en la figura 5.12. Se da por supuesto que el conductor es perfecto (es decir, $\sigma \rightarrow \infty$ o $\rho_c \rightarrow 0$). Aunque en la práctica no existen conductores de ese tipo, el cobre y la plata pueden considerarse conductores perfectos.

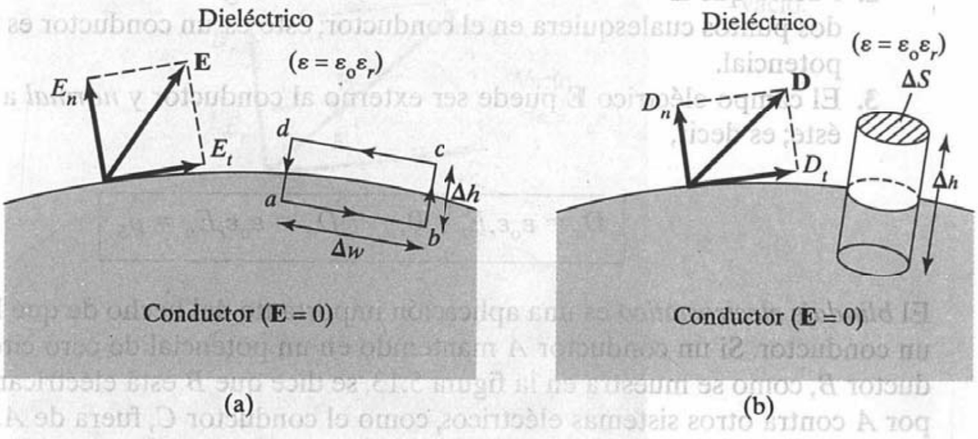


Figura 5.12. Frontera conductor-dieléctrico.

Para determinar las condiciones en la frontera en el caso de una interfaz conductor-dieléctrico se sigue el mismo procedimiento que en la interfaz dieléctrico-dieléctrico, salvo que se incorpora el hecho de que $\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor. La aplicación de la ecuación (5.52) a la trayectoria cerrada *abcda* de la figura 5.12*(a)* da como resultado

$$0 = 0 \cdot \Delta w + 0 \cdot \frac{\Delta h}{2} + E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - E_t \cdot \Delta w - E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - 0 \cdot \frac{\Delta h}{2} \tag{5.66}$$

Cuando $\Delta h \rightarrow 0$,

$$E_t = 0 \tag{5.67}$$

De igual modo, de la aplicación de la ecuación (5.53) al objeto de la figura 5.12*(b)* y haciendo que $\Delta h \rightarrow 0$ obtenemos

$$\Delta Q = D_n \cdot \Delta S - 0 \cdot \Delta S \tag{5.68}$$

puesto que $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor. La ecuación (5.68) puede expresarse como

$$D_n = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_S$$

o

$$D_n = \rho_S \tag{5.69}$$

En condiciones estáticas, así, es posible llegar a las conclusiones siguientes acerca de un conductor perfecto:

1. *Dentro* de un conductor no puede existir ningún campo eléctrico; es decir,

$$\boxed{\rho_v = 0, \qquad \mathbf{E} = 0} \tag{5.70}$$

2. Puesto que $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$, no puede haber ninguna diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en el conductor; esto es, un conductor es un cuerpo equipotencial.
3. El campo eléctrico $\mathbf{E}$ puede ser externo al conductor y *normal* a la superficie de éste; es decir,

$$\boxed{D_t = \varepsilon_o \varepsilon_r E_t = 0, \qquad D_n = \varepsilon_o \varepsilon_r E_n = \rho_S} \tag{5.71}$$

El *blindaje electrostático* es una aplicación importante del hecho de que $\mathbf{E} = 0$ dentro de un conductor. Si un conductor A mantenido en un potencial de cero circunda a un conductor B, como se muestra en la figura 5.13, se dice que B está eléctricamente protegido por A contra otros sistemas eléctricos, como el conductor C, fuera de A. De modo similar, el conductor C fuera de A es protegido por A contra B.

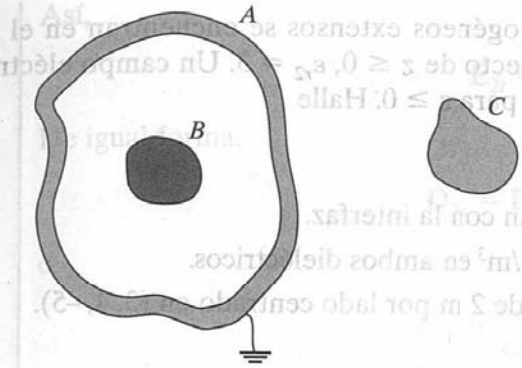


Figura 5.13. Blindaje electrostático.

Así, el conductor A actúa como blindaje, dentro y fuera del cual privan condiciones eléctricas totalmente independientes entre sí.

C. Condiciones en la frontera conductor-vacío

Éste es un caso especial de las condiciones conductor-dieléctrico y se ilustra en la figura 5.14. Las condiciones en la frontera en la interfaz entre un conductor y el vacío pueden obtenerse de la ecuación (5.71) mediante el reemplazo de ε_r por 1 (ya que el vacío puede considerarse como un dieléctrico especial respecto del cual $\varepsilon_r = 1$). Si, como cabe esperar, el campo eléctrico **E** es externo al conductor y normal a la superficie de éste, las condiciones en la frontera son

$$\boxed{D_t = \varepsilon_o E_t = 0, \qquad D_n = \varepsilon_o E_n = \rho_S} \tag{5.72}$$

Cabe destacar de nuevo que la ecuación (5.72) implica que el campo **E** debe aproximarse normalmente a la superficie de un conductor.

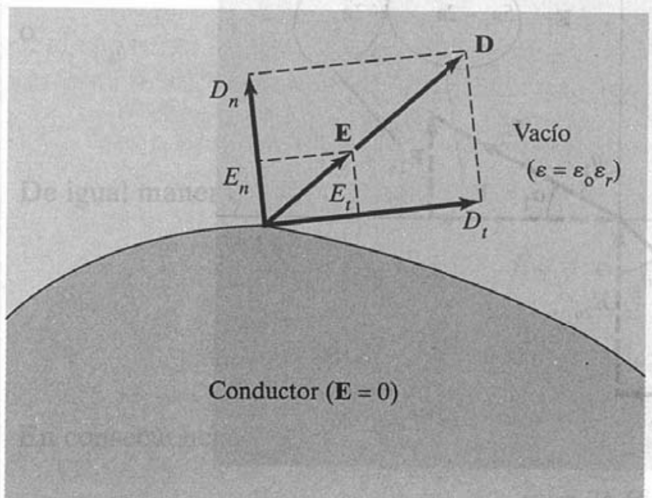


Figura 5.14. Frontera conductor-vacío.

Ejemplo 5.9 Dos dieléctricos isotrópicos homogéneos extensos se encuentran en el plano $z = 0$. Respecto de $z \geq 0$, $\varepsilon_{r1} = 4$ y respecto de $z \leq 0$, $\varepsilon_{r2} = 3$. Un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_1 = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ kV/m existe para $z \geq 0$. Halle

a) $\mathbf{E}_2$ respecto de $z \leq 0$.

b) Los ángulos que E_1 y E_2 forman con la interfaz.

c) Las densidades de energía en J/m³ en ambos dieléctricos.

d) La energía dentro de un cubo de 2 m por lado centrado en (3, 4, –5).

Solución:

Concedamos que en la figura 5.15 se ilustra el problema.

a) Puesto que $\mathbf{a}_z$ es normal al plano de la frontera, las componentes normales se obtienen de este modo

$$E_{1n} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_z = 3$$

$$\mathbf{E}_{1n} = 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z$$

Asimismo,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$$

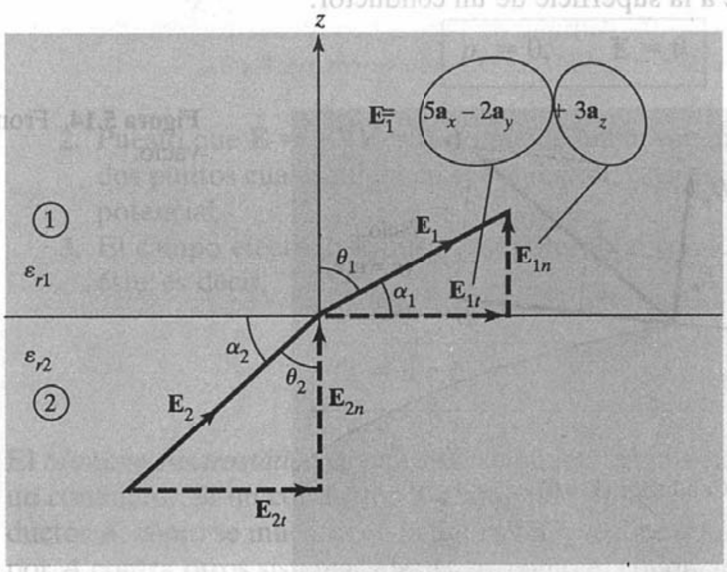


Figura 5.15. Para el ejemplo 5.9.

Así,

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$$

De igual forma,

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \rightarrow \varepsilon_{r2}\mathbf{E}_{2n} = \varepsilon_{r1}\mathbf{E}_{1n}$$

o

$$\mathbf{E}_{2n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\mathbf{E}_{1n} = \frac{4}{3}(3\mathbf{a}_z) = 4\mathbf{a}_z$$

En consecuencia,

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n}$$

$$= 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$$

b) Sean α_1 y α_2 los ángulos que $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ forman con la interfaz, mientras que θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman con la normal a la interfaz, como se muestra en la figura 5.15; es decir,

$$\alpha_1 = 90 - \theta_1$$

$$\alpha_2 = 90 - \theta_2$$

Puesto que $E_{1n} = 3$ y $E_{1t} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{\sqrt{29}}{3} = 1.795 \rightarrow \theta_1 = 60.9°$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 29.1°$$

Alternativamente,

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_n = |\mathbf{E}_1| \cdot 1 \cdot \cos\theta_1$$

o

$$\cos\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{38}} = 0.4867 \rightarrow \theta_1 = 60.9°$$

De igual manera,

$$E_{2n} = 4 \qquad E_{2t} = E_{1t} = \sqrt{29}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{\sqrt{29}}{4} = 1.346 \rightarrow \theta_2 = 53.4°$$

En consecuencia,

$$\alpha_2 = 36.6°$$

Nótese que se satisface $\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$.

c) Las densidades de energía están dadas por

$$w_{E1} = \frac{1}{2}\varepsilon_1|\mathbf{E}_1|^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}\cdot(25 + 4 + 9)\times 10^6$$

$$= 672\ \mu\text{J/m}^3$$

$$w_{E2} = \frac{1}{2}\varepsilon_2|\mathbf{E}_2|^2 = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}\cdot(25 + 4 + 16)\times 10^6$$

$$= 597\ \mu\text{J/m}^3$$

d) En el centro (3, 4, –5) del cubo de 2 m por lado, $z = -5 < 0$; esto es, el cubo se encuentra en la región 2 con $2 \le x \le 4, 3 \le y \le 5, -6 \le z \le -4$. Así,

$$W_E = \int w_{E2}\,dv = \int_{x=2}^{4}\int_{y=3}^{5}\int_{z=-6}^{-4} w_{E2}\,dz\,dy\,dz = w_{E2}(2)(2)(2)$$

$$= 597 \times 8\mu\text{J} = 4.776\ \text{mJ}$$

Ejercicio 5.9

Un dieléctrico homogéneo ($\varepsilon_r = 2.5$) ocupa la región 1 ($x \le 0$), mientras que la región 2 ($x \ge 0$) es vacío.

a) Si $\mathbf{D}_1 = 12\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ nC/m², halle $\mathbf{D}_2$ y θ_2.

b) Si $E_2 = 12$ V/m y $\theta_2 = 60°$, encuentre E_1 y θ_1. Adopte para θ_1 y θ_2 las definiciones establecidas en el ejemplo anterior.

Respuestas: *a)* $12\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 1.6\mathbf{a}_z$ nC/m², 19.75° y *b)* 10.67 V/m, 77°

Ejemplo 5.10

La región $y \le 0$ se compone de un conductor perfecto, en tanto que la región $y \ge 0$ es un medio dieléctrico ($\varepsilon_{1r} = 2$), como se señala en la figura 5.16. Si en el conductor hay una carga superficial de 2 nC/m², determine **E** y **D** en

a) $A(3, -2, 2)$

b) $B(-4, 1, 5)$

Solución:

a) El punto $A(3, -2, 2)$ se encuentra en el conductor, ya que $y = -2 < 0$ en A. Así,

$$\mathbf{E} = 0 = \mathbf{D}$$

b) El punto $B(-4, 1, 5)$ se encuentra en el medio dieléctrico, ya que $y = 1 > 0$ en B.

$$D_n = \rho_S = 2\ \text{nC/m}^2$$

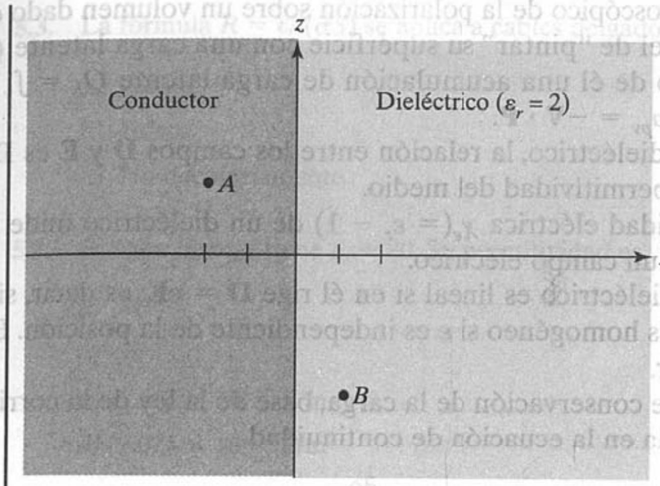


Figura 5.16. Para el ejemplo 5.10.

Por tanto,

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{a}_y \text{ nC/m}^2$$

y

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 2 \times 10^{-9} \times \frac{36\pi}{2} \times 10^9 \, \mathbf{a}_y = 36\pi \mathbf{a}_y$$

$$= 113.1\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Ejercicio 5.10

Se determina que $\mathbf{E} = 60\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z$ mV/m en un punto particular en la interfaz entre aire y una superficie conductora. Halle $\mathbf{D}$ y ρ_S en ese punto.

Respuesta: $0.531\mathbf{a}_x + 0.177\mathbf{a}_y - 0.265\mathbf{a}_z$ pC/m², 0.619 pC/m².

Resumen

1. Los materiales se clasifican en general en conductores ($\sigma \gg 1, \varepsilon_r = 1$) y dieléctricos ($\sigma \ll 1, \varepsilon_r \geq 1$) en términos de sus propiedades eléctricas σ y ε_r, donde σ es la conductividad y ε_r la constante dieléctrica o permitividad relativa.
2. La corriente eléctrica es el flujo de densidad de corriente eléctrica a través de una superficie; es decir,

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

3. La resistencia de un conductor de sección transversal uniforme es

$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

4. El efecto macroscópico de la polarización sobre un volumen dado de un material dieléctrico es el de "pintar" su superficie con una carga latente $Q_b = \oint_S \rho_{ps}\, dS$ y dejar dentro de él una acumulación de carga latente $Q_b = \int_v \rho_{pv}\, dv$, donde $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ y $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$.
5. En un medio dieléctrico, la relación entre los campos $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ es $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, donde $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$ es la permitividad del medio.
6. La susceptibilidad eléctrica $\chi_e(= \varepsilon_r - 1)$ de un dieléctrico mide la sensibilidad del material a un campo eléctrico.
7. Un material dieléctrico es lineal si en él rige $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$; es decir, si ε es independiente de $\mathbf{E}$. Es homogéneo si ε es independiente de la posición. Es isotrópico si ε es un escalar.
8. El principio de conservación de la carga, base de la ley de la corriente de Kirchhoff, se enuncia en la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

9. El tiempo de relajación, $T_r = \varepsilon/\sigma$, de un material es el tiempo que tarda una carga colocada en su interior y en descender en un factor de $e^{-1} \simeq 37\%$.
10. Las condiciones en la frontera deben ser satisfechas por un campo eléctrico existente en dos medios distintos separados por una interfaz. En el caso de una interfaz dieléctrico-dieléctrico,

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad \text{o} \quad D_{1n} = D_{2n} \quad \text{si} \quad \rho_S = 0$$

En el de una interfaz dieléctrico-conductor,

$$E_t = 0 \qquad D_n = \varepsilon E_n = \rho_S$$

puesto que $\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor.

Preguntas de repaso

5.1. ¿Cuál de los siguientes *no* es un ejemplo de corriente de convección?

a) Una correa transportadora cargada.
b) El movimiento electrónico en un tubo al vacío.
c) Un haz de electrones en un tubo de televisión.
d) La corriente eléctrica que fluye por un alambre de cobre.

5.2. Cuando en los extremos de un cable conductor se aplica una diferencia de potencial constante,

a) Todos los electrones se mueven a una velocidad constante.
b) Todos los electrones se mueven a una aceleración constante.
c) El movimiento electrónico aleatorio será equivalente en promedio a la velocidad constante de cada electrón.
d) El movimiento electrónico aleatorio será equivalente en promedio a la aceleración constante no cero de cada electrón.

5.3. La fórmula $R = \ell/(\sigma S)$ se aplica a cables delgados.

a) Cierto.
b) Falso.
c) No necesariamente.

5.4. El agua de mar tiene $\varepsilon_r = 80$. Su permitividad es

a) 81
b) 79
c) 5.162×10^{-10} F/m
d) 7.074×10^{-10} F/m

5.5. Tanto ε_o como χ_e son adimensionales.

a) Cierto.
b) Falso.

5.6. Si $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon\nabla \cdot \mathbf{E}$ y $\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma\nabla \cdot \mathbf{E}$ en un material dado, se dice que el material es

a) Lineal.
b) Homogéneo.
c) Isotrópico.
d) Lineal y homogéneo.
e) Lineal e isotrópico.
f) Isotrópico y homogéneo.

5.7. El tiempo de relajación de la mica ($\sigma = 10^{-15}$ mhos/m, $\varepsilon_r = 6$) es de

a) 5×10^{-10} s
b) 10^{-6} s
c) 5 horas.
d) 10 horas.
e) 15 horas.

5.8. Los campos uniformes que aparecen en la figura 5.17 se hallan cerca de una frontera dieléctrico-dieléctrico, pero en lados opuestos. ¿Cuáles configuraciones son correctas? Suponga que la frontera está libre de carga y que $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

5.9. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son incorrectos?

a) La conductividad de conductores y aisladores varía con la temperatura y la frecuencia.
b) Un conductor es un cuerpo equipotencial y **E** es siempre tangencial al conductor.
c) Las moléculas no polares carecen de dipolos permanentes.
d) En un dieléctrico lineal, P varía linealmente con E.

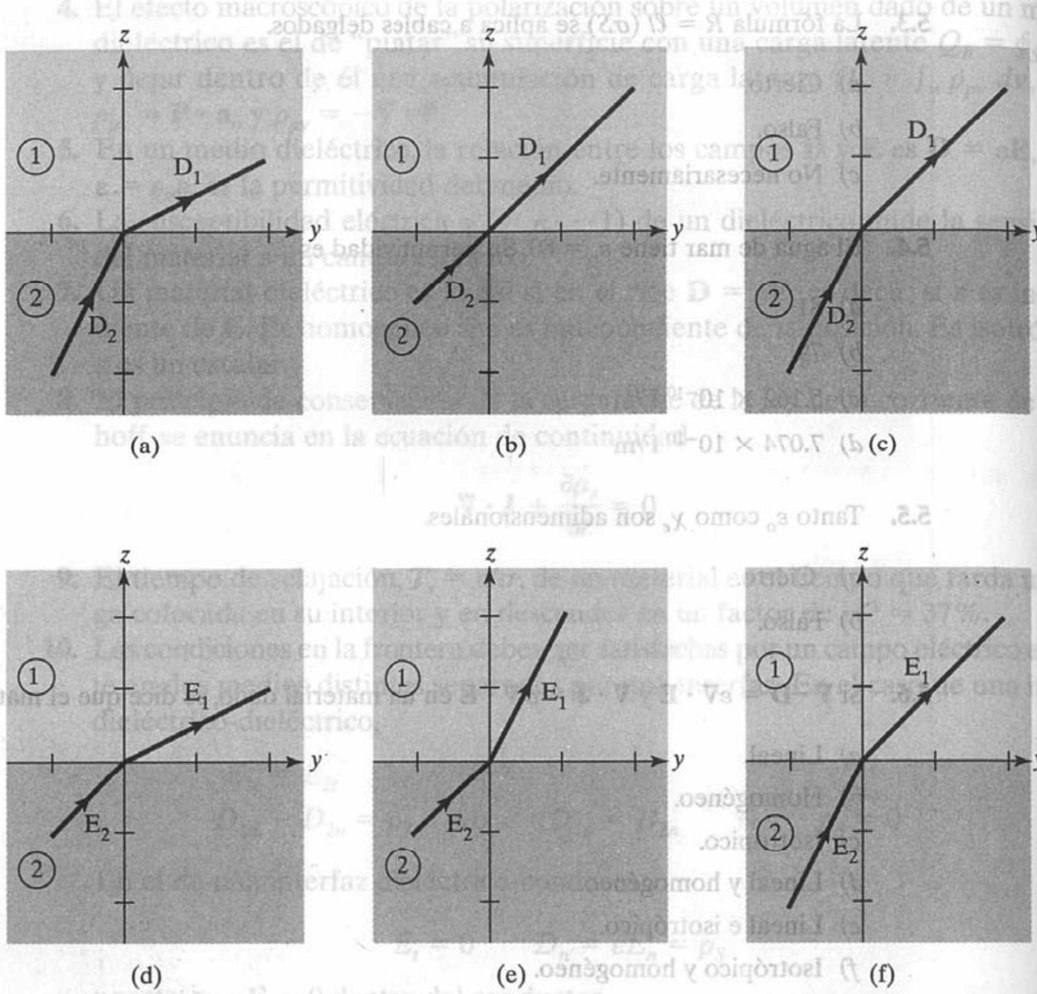


Figura 5.17. Para la pregunta de repaso 5.8.

5.10. Las condiciones eléctricas (carga y potencial) dentro y fuera de un blindaje eléctrico son totalmente independientes entre sí.

a) Cierto.
b) Falso.

Respuestas: 5.1*d*, 5.2*c*, 5.3*c*, 5.4*d*, 5.5*b*, 5.6*d*, 5.7*e*, 5.8*e*, 5.9*b*, 5.10*a*.

Problemas

5.1. En cierta región, $\mathbf{J} = 3r^2 \cos\theta\, \mathbf{a}_r - r^2 \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta$ A/m, halle la corriente que cruza la superficie definida por $\theta = 30°, 0 < \phi < 2\pi, 0 < r < 2$ m.

5.2. Determine la corriente total en un cable de 1.6 mm de radio si $\mathbf{J} = \dfrac{500\mathbf{a}_z}{\rho}$ A/m^2.

5.3. La densidad de corriente en un conductor cilíndrico de radio a es

$$\mathbf{J} = 10e^{-(1-\rho/a)}\, \mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$$

Halle la corriente a través de la sección transversal del conductor.

5.4. La carga $10^{-4}\, e^{-3t}$ C es extraída de una esfera a través de un cable. Halle la corriente en el cable en $t = 0$ y $t = 2.5$ s.

5.5. *a)* Sea $V = x^2y^2z$ en una región ($\varepsilon = 2\varepsilon_o$) definida por $-1 < x, y, z < 1$. Encuentre la densidad de carga ρ_v en la región.

b) Si la carga viaja a $10^4 y\mathbf{a}_y$ m/s, determine la corriente que cruza la superficie $0 < x, z < 0.5$, $y = 1$.

5.6. Si los extremos de una barra cilíndrica de carbono ($\sigma = 3 \times 10^4$) de 5 mm de radio y 8 cm de longitud se mantienen en una diferencia de potencial de 9 V, halle: *a)* la resistencia de la barra, *b)* la corriente a través de la barra, *c)* la potencia disipada en la barra.

5.7. La resistencia de un cable largo y redondo de 3 mm de diámetro es de 4.04 Ω/km. Si a través del cable fluye una corriente de 40 A, halle

a) La conductividad del cable e identifique el material de éste.
b) La densidad de corriente eléctrica en el cable.

5.8. Una bobina consta de 150 vueltas de alambre de cobre en torno a un eje cilíndrico. Si el radio medio de las vueltas es de 6.5 mm y el diámetro del cable es de 0.4 mm, calcule la resistencia de la bobina.

5.9. Un conductor compuesto de 10 m de largo está integrado por un núcleo interno de acero de 1.5 cm de radio y un recubrimiento externo de cobre cuyo grosor es de 0.5 cm.

a) Determine la resistencia del conductor.

b) Si la corriente total en el conductor es de 60 A, ¿qué corriente fluye en cada metal?

c) Halle la resistencia de un conductor sólido de cobre de igual longitud y áreas de sección tranversal que el recubrimiento. Adopte 1.77×10^{-8} y $11.8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m, como valores de resistividad del cobre y el acero, respectivamente.

5.10. En la figura 5.18 se presenta la sección transversal de un cilindro hueco de 2 m de longitud. Si el cilindro está hecho de carbono ($\sigma = 10^5$ mhos/m), determine la resistencia entre sus extremos. Adopte $a = 3$ cm, $b = 5$ cm.

5.11. A una temperatura y presión particulares, el helio gaseoso contiene 5×10^{25} átomos/m³. Si un campo de 10 kV/m aplicado al gas causa un desplazamiento promedio de 10^{-18} m en la nube de electrones, halle la constante dieléctrica del helio.

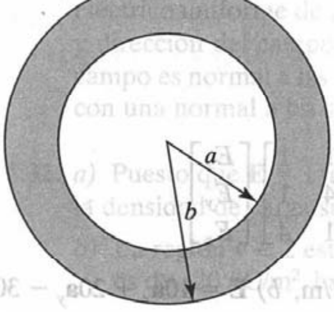


Figura 5.18. Para los problemas 5.10 y 5.15.

5.12. Un material dieléctrico contiene 2×10^{19} moléculas polares/m^3, cada una con un momento de dipolo de 1.8×10^{-27} C/m. Suponiendo que todos los dipolos están alineados en la dirección del campo eléctrico $\mathbf{E} = 10^5\,\mathbf{a}_x$ V/m, halle $\mathbf{P}$ y ε_r.

5.13. En una lámina de material dieléctrico respecto de la cual $\varepsilon = 2.4\varepsilon_o$ y $V = 300z^2$ V, halle: *a)* $\mathbf{D}$ y ρ_v, *b)* $\mathbf{P}$ y ρ_{pv}.

5.14. Respecto de $x < 0$, $\mathbf{P} = 5$ sen $(\alpha y)\,\mathbf{a}_x$, donde α es una constante. Halle ρ_{ps} y ρ_{pv}.

5.15. Considere la figura 5.18 como un cascarón dieléctrico esférico en el que $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$ respecto de $a < r < b$ y $\varepsilon = \varepsilon_o$ respecto de $0 < r < a$. Si se coloca una carga Q en el centro del cascarón, halle

a) $\mathbf{P}$ respecto de $a < r < b$

b) ρ_{pv} respecto de $a < r < b$

c) ρ_{ps} en $r = a$ y $r = b$

5.16. Situadas en el vacío, dos cargas puntuales ejercen una fuerza de 4.5 μN entre sí. Cuando el espacio entre ellas se ocupa con un material dieléctrico, la fuerza cambia a 2 μN. Halle la constante dieléctrica del material e identifique éste.

5.17. Una esfera conductora de 10 cm de radio está centrada en el origen e incrustada en un material dieléctrico con $\varepsilon = 2.5\varepsilon_o$. Si la esfera porta una carga superficial de 4 nC/m^2, halle $\mathbf{E}$ en (–3 cm, 4 cm, 12 cm).

5.18. En el centro de una esfera dieléctrica hueca ($\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$) se coloca una carga puntual Q. Si la esfera tiene un radio interno a y un radio externo b, calcule $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{P}$.

5.19. Una esfera de radio a y constante dieléctrica ε_r posee una densidad de carga uniforme de ρ_v.

a) En el centro de la esfera, demuestre que

$$V = \frac{\rho_o a}{6\varepsilon_o\varepsilon_r}(2\varepsilon_r + 1)$$

b) Halle el potencial en la superficie de la esfera.

5.20. En campos estáticos (independientes del tiempo), ¿cuál de las siguientes densidades de corriente son posibles?

a) $\mathbf{J} = 2x^3y\mathbf{a}_x + 4x^2z^2\mathbf{a}_y - 6x^2yz\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{J} = xy\mathbf{a}_x + y(z + 1)\mathbf{a}_y + 2y\mathbf{a}_z$

c) $\mathbf{J} = \dfrac{z^2}{\rho}\mathbf{a}_\rho + z\cos\phi\,\mathbf{a}_z$

d) $\mathbf{J} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{r^2}\mathbf{a}_r$

5.21. En el caso de un medio anisotrópico,

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \varepsilon_o \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Obtenga $\mathbf{D}$ respecto de: *a)* $\mathbf{E} = 10\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y$ V/m, *b)* $\mathbf{E} = 10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z$ V/m.

5.22. Si $\mathbf{J} = \frac{100}{\rho^2}\mathbf{a}_\rho$ A/m², halle: *a)* el índice de incremento de la densidad de carga volumétrica, *b)* la corriente total que pasa por la superficie definida por $\rho = 2, 0 < z < 1, 0 < \phi < 2\pi$.

5.23. Puesto que $\mathbf{J} = \frac{5e^{-10^4 t}}{r}\mathbf{a}_r$ A/m², en $t = 0.1$ ms, halle: *a)* la cantidad de corriente que pasa por la superficie $r = 2$ m, *b)* la densidad de carga ρ_v sobre esa superficie.

5.24. Determine el tiempo de relajación de cada uno de los siguientes medios:

a) Caucho duro ($\sigma = 10^{-15}$ S/m, $\varepsilon = 3.1\varepsilon_o$).
b) Mica ($\sigma = 10^{-15}$ S/m, $\varepsilon = 6\varepsilon_o$).
c) Agua destilada ($\sigma = 10^{-4}$ S/m, $\varepsilon = 80\varepsilon_o$).

5.25. La carga excedente en cierto medio decrece a un tercio de su valor inicial en 20 μs. *a)* Si la conductividad del medio es de 10^{-4} S/m, ¿cuál es su constante dieléctrica? *b)* ¿Cuál es el tiempo de relajación? *c)* Tras 30 μs, ¿qué fracción de la carga permanecerá?

5.26. Un rayo incide en una esfera dieléctrica de 20 mm de radio respecto de la cual $\varepsilon_r = 2.5$, $\sigma = 5 \times 10^{-6}$ mhos/m y deposita uniformemente una carga de 10 μC. Determine la densidad de carga inicial y la densidad de carga 2 μs después.

5.27. La región 1 ($z < 0$) contiene un dieléctrico respecto del cual $\varepsilon_r = 2.5$, mientras que la región 2 ($z > 0$) se caracteriza por $\varepsilon_r = 4$. Sea $\mathbf{E}_1 = -30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y + 70\mathbf{a}_z$ V/m y halle: *a)* $\mathbf{D}_2$, *b)* $\mathbf{P}_2$, *c)* el ángulo entre $\mathbf{E}_1$ y la normal a la superficie.

5.28. Puesto que $\mathbf{E}_1 = 10\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$ V/m en la figura 5.19, halle: *a)* $\mathbf{P}_1$, *b)* $\mathbf{E}_2$ y el ángulo que $\mathbf{E}_2$ forma con el eje *y*, *c)* la densidad de energía en cada región.

5.29. Dos regiones dieléctricas homogéneas 1 ($\rho \leq 4$ cm) y 2 ($\rho \geq 4$ cm) tienen constantes dieléctricas 3.5 y 1.5, respectivamente. Si $\mathbf{D}_2 = 12\mathbf{a}_\rho - 6\mathbf{a}_\phi + 9\mathbf{a}_z$ nC/m², calcule: *a)* $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{D}_1$, *b)* $\mathbf{P}_2$ y ρ_{pv2}, *c)* la densidad de energía para cada región.

5.30. Una esfera conductora de radio *a* está semisumergida en un medio dieléctrico líquido de permitividad ε_1, como se muestra en la figura 5.20. La región por encima del líquido es un gas de permitividad ε_2. Si la carga libre total sobre la esfera es *Q*, determine la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto.

***5.31.** Dos hojas paralelas de vidrio ($\varepsilon_r = 8.5$) montadas verticalmente están separadas por un espacio uniforme de aire entre sus superficies internas. Debidamente selladas, las hojas están inmersas en aceite ($\varepsilon_r = 3.0$), como se muestra en la figura 5.21. En el aceite existe un campo eléctrico uniforme de 2000 V/m de intensidad en la dirección horizontal. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico en el vidrio y en el espacio de aire encerrado cuando *a)* el campo es normal a las superficies de vidrio, y *b)* el campo en el aceite forma un ángulo de 75° con una normal a las superficies de vidrio. Ignore los efectos marginales.

5.32. *a)* Puesto que $\mathbf{E} = 15\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_z$ V/m en un punto sobre la superficie de un conductor, ¿cuál es la densidad de carga superficial en ese punto? Suponga $\varepsilon = \varepsilon_o$.

b) La región $y \geq 2$ está ocupada por un conductor. Si la carga superficial sobre el conductor es de -20 nC/m², halle $\mathbf{D}$ justo fuera del conductor.

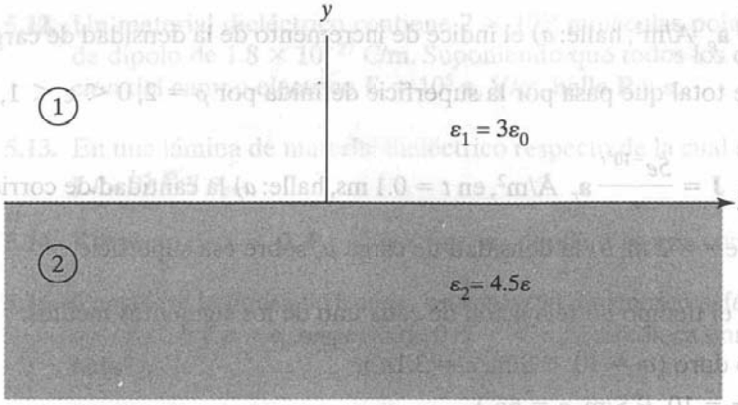


Figura 5.19. Para el problema 5.28.

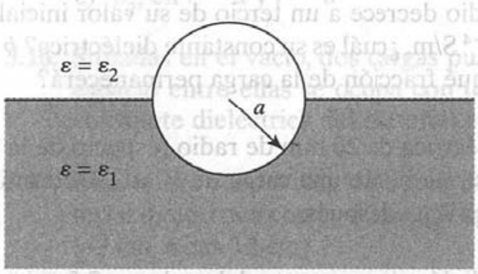


Figura 5.20. Para el problema 5.30.

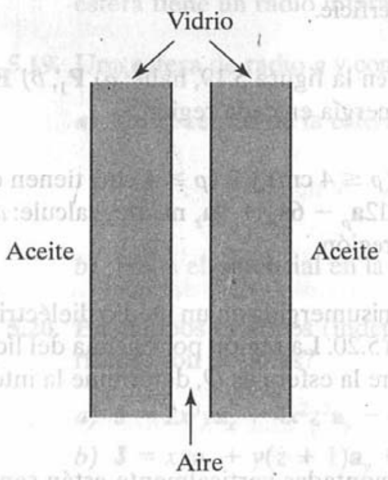


Figura 5.21. Para el problema 5.31.

5.33. Una esfera recubierta de plata de 5 cm de radio porta una carga total de 12 nC uniformemente distribuida sobre su superficie en el vacío. Calcule: *a)* |**D**| sobre la superficie de la esfera, *b)* **D** externa a la esfera, y *c)* la energía total almacenada en el campo.

6 Problemas de electrostática con valor en la frontera

La función más importante de la escuela es enseñar a los alumnos a hablar y escribir claramente; es decir, a dominar el idioma. Sin esto, todo curso de matemáticas y ciencias es tiempo perdido.

JOSEPH WEIZENBAUM,
Massachusetts Institute of Technology

6.1. Introducción

Para determinar el campo eléctrico **E**, en los capítulos anteriores nos hemos servido por lo general de las leyes de Coulomb o de Gauss cuando la distribución de carga es conocida y de $\mathbf{E} = -\nabla V$ cuando el potencial V es conocido en toda la región. En la práctica, sin embargo, no es común que se conozcan ni la distribución de carga ni la distribución de potencial.

En este capítulo consideraremos problemas prácticos de electrostática en los que sólo se conocen las condiciones electrostáticas (carga y potencial) en algunas fronteras y se desea hallar **E** y V en toda la región. Tales problemas, llamados problemas con *valor en la frontera*, suelen abordarse con la ecuación de Poisson[1] o de Laplace[2] o con el método de imágenes. Tras examinar los conceptos de resistencia y capacitancia, usaremos la ecuación de Laplace para deducir la resistencia de un objeto y la capacitancia de un capacitor (o condensador). Preste especial atención al ejemplo 6.5; en lo que resta de este libro nos remitiremos a él con frecuencia.

6.2. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Las ecuaciones de Poisson y de Laplace se deducen fácilmente de la ley de Gauss (en el caso de un medio material lineal)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho_v \tag{6.1}$$

[1] Así llamada en honor a Simon Denis Poisson (1781-1840), físico matemático francés.
[2] Así llamada en honor a Pierre Simon de Laplace (1749-1829), astrónomo y matemático francés.

y

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{6.2}$$

La sustitución de la ecuación (6.2) en la ecuación (6.1) da como resultado

$$\nabla \cdot (-\varepsilon \, \nabla V) = \rho_v \tag{6.3}$$

en el caso de un medio no homogéneo. En el de un medio homogéneo, la ecuación (6.3) se convierte en

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}} \tag{6.4}$$

Ésta es la *ecuación de Poisson*. Un caso especial de esta ecuación ocurre cuando $\rho_v = 0$ (es decir, en una región sin carga). La ecuación (6.4) se convierte entonces en

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \tag{6.5}$$

la *ecuación de Laplace*. La eliminación de ε del miembro izquierdo de la ecuación (6.3) para obtener la ecuación (6.4) implica que ε es constante en toda la región asociada con la definición de V; sin embargo, ε no es constante en una región no homogénea, caso en el que la ecuación (6.4) no puede derivarse de la ecuación (6.3). Esta última es la ecuación de Poisson para un medio no homogéneo; se convierte en la ecuación de Laplace para un medio no homogéneo cuando $\rho_v = 0$.

Recuérdese que en la sección 3.8 se dedujo el operador laplaciano ∇^2. Así, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, la ecuación de Laplace está dada respectivamente por

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \tag{6.6}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \tag{6.7}$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0} \tag{6.8}$$

según el potencial sea $V(x, y, z)$, $V(\rho, \phi, z)$ o $V(r, \theta, \phi,)$. En esos mismos sistemas de coordenadas, la ecuación de Poisson puede obtenerse mediante el simple reemplazo por $-\rho_v/\varepsilon$ del cero del miembro derecho de las ecuaciones (6.6), (6.7) y (6.8).

La ecuación de Laplace es de primera importancia en la resolución de problemas electrostáticos que implican un conjunto de conductores mantenidos en diferentes potenciales, como es el caso de los capacitores y diodos de tubos al vacío. Pero además de ser útiles para resolver problemas de campos electrostáticos, las ecuaciones de Laplace y de Poisson también se usan en problemas relativos a campos de otro tipo. Por ejemplo, V se interpre-

taría como potencial magnético en magnetostática, temperatura en la conducción de calor, función de esfuerzo en el flujo de fluidos y carga de presión en filtración.

†6.3. Teorema de unicidad

Puesto que un problema puede resolverse con varios métodos (analítico, gráfico, numérico, experimental, etc.), cabría preguntarse si las diversas soluciones que es factible obtener de la ecuación de Laplace son diferentes entre sí. Por tanto, antes de proceder a resolver esa ecuación es preciso responder a esta pregunta: si una solución de la ecuación de Laplace satisface un conjunto dado de condiciones en la frontera, ¿es la única solución posible? La respuesta es afirmativa: sólo hay una solución. Una única solución. Así, cualquier solución de la ecuación de Laplace que satisfaga las condiciones en la frontera será la única, sin importar el método empleado para obtenerla. Éste es el *teorema de unicidad*, el cual se aplica a cualquier solución de la ecuación de Poisson o de Laplace en una región o superficie cerrada específica.

El teorema de unicidad se comprueba por contradicción. Si se parte del supuesto de que dos soluciones V_1 y V_2 de la ecuación de Laplace satisfacen las condiciones en la frontera prescritas, entonces

$$\nabla^2 V_1 = 0, \qquad \nabla^2 V_2 = 0 \tag{6.9a}$$

$$V_1 = V_2 \quad \text{en la frontera} \tag{6.9b}$$

Después se considera su diferencia

$$V_d = V_2 - V_1 \tag{6.10}$$

la cual obedece a

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0 \tag{6.11a}$$

$$V_d = 0 \qquad \text{en la frontera} \tag{6.11b}$$

lo cual está de acuerdo con la ecuación (6.9). Con base en el teorema de la divergencia,

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{6.12}$$

Sea $\mathbf{A} = V_d \nabla V_d$ y empleemos una identidad vectorial

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

Pero, de acuerdo con la ecuación (6.11), $\nabla^2 V_d = 0$, de manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla V_d \cdot \nabla V_d \tag{6.13}$$

La sustitución de la ecuación (6.13) en la ecuación (6.12) da como resultado

$$\int_v \nabla V_d \cdot \nabla V_d\, dv = \oint_S V_d\, \nabla V_d \cdot d\mathbf{S} \tag{6.14}$$

De las ecuaciones (6.9) y (6.11) se deduce claramente que el miembro derecho de la ecuación (6.14) tiende a cero.

Por tanto:

$$\int_v |\nabla V_d|^2 \, dv = 0$$

Puesto que la integración siempre es positiva,

$$\nabla V_d = 0 \tag{6.15a}$$

o

$$V_d = V_2 - V_1 = \text{constante en todas partes en } v \tag{6.15b}$$

Sin embargo, la ecuación (6.15) debe ser congruente con la ecuación (6.9*b*). Así, $V_d = 0$ o $V_1 = V_2$ en cualquier parte, lo que indica que V_1 y V_2 no pueden ser diferentes soluciones del mismo problema.

De acuerdo con el **teorema de unicidad**, si se puede determinar que una solución de la ecuación de Laplace satisface las condiciones en la frontera, esa solución es la única.

Podrían seguirse pasos similares para demostrar que este teorema también se aplica a la ecuación de Poisson, así como para comprobarlo en relación con el caso en el que se especifica el campo eléctrico (gradiente del potencial) en la frontera.

Antes de iniciar la resolución de problemas con valor en la frontera, téngase presente las tres cosas que describen inequívocamente a un problema:

1. La ecuación diferencial apropiada (en este capítulo, la de Laplace o Poisson).
2. La región de la solución.
3. Las condiciones en la frontera prescritas.

Ningún problema tiene una solución única ni puede resolverse por completo en ausencia de estos elementos.

6.4. Procedimiento general para resolver la ecuación de Poisson o de Laplace

El procedimiento general que se describirá a continuación es útil para resolver problemas con valor en la frontera que impliquen la ecuación de Poisson o de Laplace:

1. Se resuelve la ecuación de Laplace (si $\rho_v = 0$) o la de Poisson (si $\rho_v \neq 0$) mediante *a)* integración directa cuando V es una función de una variable, o *b)* separación de variables cuando V es una función de más de una variable. La solución aún no es única en este punto, pero se expresa bajo la forma de las constantes de integración desconocidas por determinar.
2. Se aplican las condiciones en la frontera para determinar la solución única de V. La imposición de las condiciones en la frontera dadas vuelve única la solución.
3. Habiendo obtenido V, se halla $\mathbf{E}$ mediante $\mathbf{E} = -\nabla V$ y $\mathbf{D}$ mediante $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$.

4. Si se desea, se calcula la carga Q inducida en un conductor mediante $Q = \int \rho_S \, dS$, donde $\rho_S = D_n$ y D_n es la componente de $\mathbf{D}$ normal al conductor. De ser necesario, se determina mediante $C = Q/V$ la capacitancia entre dos conductores.

Resolver la ecuación de Laplace (o de Poisson), paso 1 de este procedimiento, no siempre es tan complicado como parece. La solución puede obtenerse a veces de la mera inspección del problema. Asimismo, una solución puede comprobarse por retroceso y determinando si satisface tanto la ecuación de Laplace (o de Poisson) como las condiciones en la frontera prescritas.

Ejemplo 6.1

Las componentes portadoras de corriente de un equipo eléctrico de alto voltaje deben enfriarse para eliminar el calor provocado por pérdidas óhmicas. Un medio de bombeo se basa en que cargas de un campo eléctrico transmitan fuerza al fluido enfriador. Un modelo de este tipo de bombeo, llamado *electrohidrodinámico*, se presenta en la figura 6.1. La región entre los electrodos contiene una carga uniforme ρ_o, la cual se genera en el electrodo izquierdo y se acumula en el electrodo derecho. Calcule la presión de la bomba si $\rho_o = 25$ mC/m^3 y $V_o = 22$ kV.

Solución:

Puesto que $\rho_v \neq 0$, se aplica la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

Las condiciones en la frontera $V(z = 0) = V_o$ y $V(z = d) = 0$ indican que V sólo depende de z (no hay dependencia de ρ ni ϕ). Por tanto

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-\rho_o}{\varepsilon}$$

Al integrar una vez se obtiene

$$\frac{dV}{dz} = \frac{-\rho_o z}{\varepsilon} + A$$

Al integrar una vez más se obtiene

$$V = -\frac{\rho_o z^2}{2\varepsilon} + Az + B$$

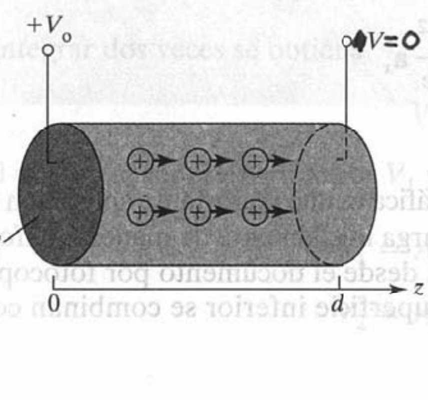


Figura 6.1. Bomba electrohidrodinámica; para el ejemplo 6.1.

donde A y B son constantes de integración por determinar mediante la aplicación de las condiciones en la frontera. Cuando $z = 0$, $V = V_o$,

$$V_o = -0 + 0 + B \rightarrow B = V_o$$

Cuando $z = d$, $V = 0$,

$$0 = \frac{\rho_o d^2}{2\varepsilon} + Ad + V_o$$

o

$$A = \frac{\rho_o d}{2\varepsilon} - \frac{V_o}{d}$$

El campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\mathbf{a}_z = \left(\frac{\rho_o z}{\varepsilon} - A\right)\mathbf{a}_z$$

$$= \left[\frac{V_o}{d} + \frac{\rho_o}{\varepsilon}\left(z - \frac{d}{2}\right)\right]\mathbf{a}_z$$

La fuerza neta es

$$\mathbf{F} = \int \rho_v \mathbf{E}\, dv = \rho_o \int dS \int_{z=0}^{d} \mathbf{E}\, dz$$

$$= \rho_o S \left[\frac{V_o z}{d} + \frac{\rho_o}{2\varepsilon}(z^2 - dz)\right]\Bigg|_0^d \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{F} = \rho_o S V_o \mathbf{a}_z$$

La fuerza por unidad de área o presión es

$$\rho = \frac{F}{S} = \rho_o V_o = 25 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^3 = 550 \text{ N/m}^2$$

Ejercicio 6.1

En un dispositivo unidimensional, la densidad de carga está dada por $\rho_v = \rho_o x/a$. Si $\mathbf{E} = 0$ en $x = 0$ y $V = 0$ en $x = a$, halle V y $\mathbf{E}$.

Respuesta: $\frac{\rho_o}{6\varepsilon a}(a^3 - x^3), \frac{\rho_o x^2}{2a\varepsilon}\mathbf{a}_x$

Ejemplo 6.2

La máquina fotocopiadora xerográfica es una importante aplicación de la electrostática. La superficie del fotoconductor se carga inicialmente de manera uniforme, como se muestra en la figura 6.2*(a)*. Cuando la luz desde el documento por fotocopiar se concentra en el fotoconductor, las cargas en la superficie inferior se combinan con las de la superficie

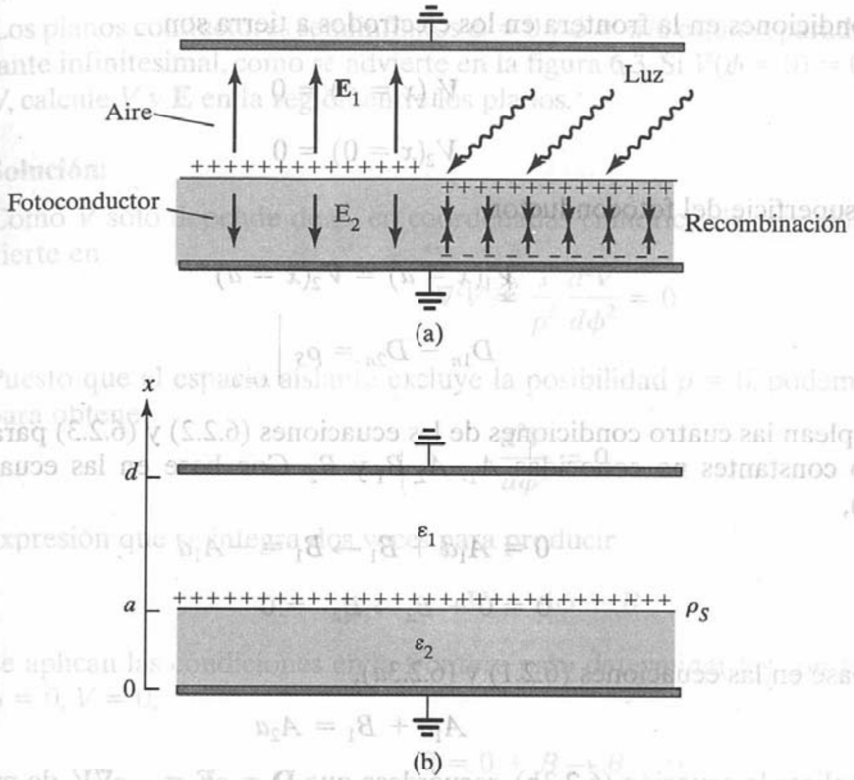


Figura 6.2. Para el ejemplo 6.2.

superior para neutralizarse entre sí. La imagen se revela mediante el derrame de un polvo negro cargado sobre la superficie del fotoconductor. El campo eléctrico atrae al polvo cargado, el que posteriormente se transfiere al papel, donde se disipa para formar una imagen permanente. Se desea determinar el campo eléctrico bajo y sobre la superficie del fotoconductor.

Solución:

Considérese el modelo de la figura 6.2*(a)* representado por la figura 6.2*(b)*. Puesto que en este caso $\rho_v = 0$, se aplica la ecuación de Laplace. Asimismo, el potencial sólo depende de x. Por tanto

$$\nabla^2 V = \frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Tras integrar dos veces se obtiene

$$V = Ax + B$$

Sea el potencial superior e inferior V_1 y V_2, respectivamente.

$$V_1 = A_1x + B_1, \quad x > a \tag{6.2.1a}$$

$$V_2 = A_2x + B_2, \quad x < a \tag{6.2.1b}$$

Las condiciones en la frontera en los electrodos a tierra son

$$V_1(x = d) = 0 \tag{6.2.2a}$$

$$V_2(x = 0) = 0 \tag{6.2.2b}$$

En la superficie del fotoconductor,

$$V_1(x = a) = V_2(x = a) \tag{6.2.3a}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \bigg|_{x=a} \tag{6.2.3b}$$

Se emplean las cuatro condiciones de las ecuaciones (6.2.2) y (6.2.3) para determinar las cuatro constantes no conocidas A_1, A_2, B_1 y B_2. Con base en las ecuaciones (6.2.1) y (6.2.2),

$$0 = A_1 d + B_1 \rightarrow B_1 = -A_1 d \tag{6.2.4a}$$

$$0 = 0 + B_2 \rightarrow B_2 = 0 \tag{6.2.4b}$$

Con base en las ecuaciones (6.2.1) y (6.2.3*a*),

$$A_1 a + B_1 = A_2 a \tag{6.2.5}$$

Para aplicar la ecuación (6.2.3*b*), recuérdese que $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla V$, de modo que

$$\rho_S = D_{1n} - D_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = -\varepsilon_1 \frac{dV_1}{dx} + \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dx}$$

o

$$\rho_S = -\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 \tag{6.2.6}$$

Al despejar A_1 y A_2 en las ecuaciones (6.2.4) a (6.2.6) se obtiene

$$\mathbf{E}_1 = -A_1 \mathbf{a}_x = \frac{\rho_S \mathbf{a}_x}{\varepsilon_1 \left[1 + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\dfrac{d}{a} - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right]}$$

$$\mathbf{E}_2 = -A_2 \mathbf{a}_x = \frac{-\rho_S \left(\dfrac{d}{a} - 1\right) \mathbf{a}_x}{\varepsilon_1 \left[1 + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\dfrac{d}{a} - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right]}$$

Ejercicio 6.2

Con referencia al modelo de la figura 6.2*(b)*, si $\rho_S = 0$ y el electrodo superior se mantiene en V_o mientras el electrodo inferior se conecta a tierra, demuestre que

$$\mathbf{E}_1 = \frac{-V_o \mathbf{a}_x}{d - a + \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{-V_o \mathbf{a}_x}{a + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} d - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} a}$$

Ejemplo 6.3

Los planos conductores semiinfinitos $\phi = 0$ y $\phi = \pi/6$ están separados por un espacio aislante infinitesimal, como se advierte en la figura 6.3. Si $V(\phi = 0) = 0$ y $V(\phi = \pi/6) = 100$ V, calcule V y $\mathbf{E}$ en la región entre los planos.

Solución:

Como V sólo depende de ϕ, en coordenadas cilíndricas la ecuación de Laplace se convierte en

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

Puesto que el espacio aislante excluye la posibilidad $\rho = 0$, podemos multiplicar por ρ^2 para obtener

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

expresión que se integra dos veces para producir

$$V = A\phi + B$$

Se aplican las condiciones en la frontera para determinar las constantes A y B. Cuando $\phi = 0$, $V = 0$,

$$0 = 0 + B \rightarrow B = 0$$

Cuando $\phi = \phi_o$, $V = V_o$,

$$V_o = A\phi_o \rightarrow A = \frac{V_o}{\phi_o}$$

Por tanto:

$$V = \frac{V_o}{\phi_o}\phi$$

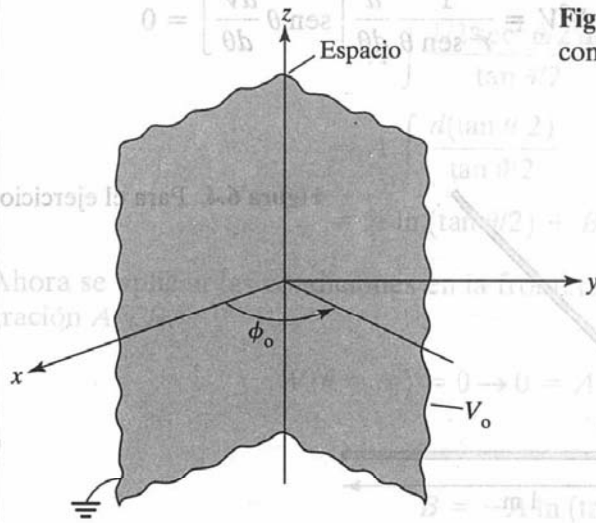


Figura 6.3. Potencial $V(\phi)$ debido a planos conductores semiinfinitos.

y

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\phi}\mathbf{a}_\phi = -\frac{V_o}{\rho\phi_o}\mathbf{a}_\phi$$

La sustitución de $V_o = 100$ y $\phi_o = \pi/6$ resulta en

$$V = \frac{600}{\pi}\phi \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{600}{\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

Comprobación: $\nabla^2 V = 0, V(\phi = 0) = 0, V(\phi = \pi/6) = 100$.

Ejercicio 6.3

Dos placas conductoras de 1 × 5 m tienen una inclinación de 45° entre sí y están separadas por un espacio de 4 mm de ancho, como se ilustra en la figura 6.4. Determine un valor aproximado de la carga por placa si las placas se mantienen en una diferencia de potencial de 50 V. Atribuya $\varepsilon_r = 1.5$ al medio entre ellas.

Respuesta: 22.2 nC.

Ejemplo 6.4

Dos conos conductores ($\theta = \pi/10$ y $\theta = \pi/6$) de extensión infinita están separados por un espacio infinitesimal en $r = 0$. Si $V(\theta = \pi/10) = 0$ y $V(\theta = \pi/6) = 50$ V, halle V y $\mathbf{E}$ entre los conos.

Solución:

Considérese el cono coaxial de la figura 6.5, donde el espacio sirve como aislador entre los dos conos conductores. V sólo depende de θ, de manera que, en coordenadas esféricas, la ecuación de Laplace se convierte en

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta}\right] = 0$$

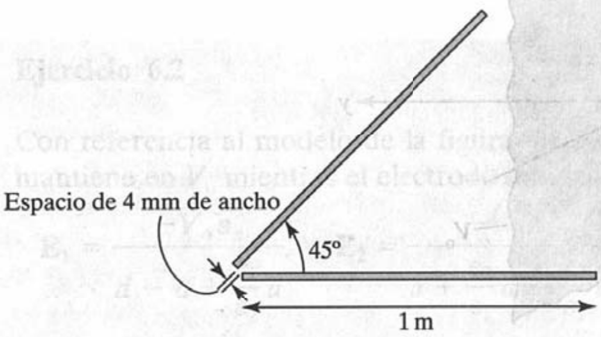


Figura 6.4. Para el ejercicio 6.3.

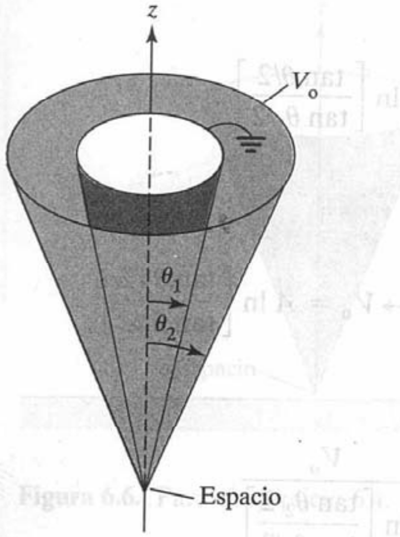


Figura 6.5. Potencial $V(\phi)$ debido a conos conductores.

Puesto que $r = 0$ y $\theta = 0, \pi$ quedan excluidos, es posible multiplicar por r^2 sen θ para obtener

$$\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\,\frac{dV}{d\theta}\right] = 0$$

La integración una vez resulta en

$$\operatorname{sen}\theta\,\frac{dV}{d\theta} = A$$

o

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\operatorname{sen}\theta}$$

La integración de esta última expresión da como resultado

$$V = A\int\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = A\int\frac{d\theta}{2\cos\theta/2\,\operatorname{sen}\theta/2}$$

$$= A\int\frac{1/2\sec^2\theta/2\,d\theta}{\tan\theta/2}$$

$$= A\int\frac{d(\tan\theta/2)}{\tan\theta/2}$$

$$= A\ln(\tan\theta/2) + B$$

Ahora se aplican las condiciones en la frontera para determinar las constantes de integración A y B.

$$V(\theta = \theta_1) = 0 \rightarrow 0 = A\ln(\tan\theta_1/2) + B$$

o

$$B = -A\ln(\tan\theta_1/2)$$

De ahí que

$$V = A \ln\left[\frac{\tan\theta/2}{\tan\theta_1/2}\right]$$

Asimismo,

$$V(\theta = \theta_2) = V_o \rightarrow V_o = A \ln\left[\frac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]$$

o

$$A = \frac{V_o}{\ln\left[\dfrac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]}$$

En consecuencia,

$$V = \frac{V_o \ln\left[\dfrac{\tan\theta/2}{\tan\theta_1/2}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\,\mathbf{a}_\theta = -\frac{A}{r \operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{a}_\theta$$

$$= -\frac{V_o}{r \operatorname{sen}\theta \ln\left[\dfrac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]}\,\mathbf{a}_\theta$$

La adopción de $\theta_1 = \pi/10, \theta_2 = \pi/6$ y $V_o = 50$ da como resultado

$$V = \frac{50 \ln\left[\dfrac{\tan\theta/2}{\tan\pi/20}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan\pi/12}{\tan\pi/20}\right]} = 95.1 \ln\left[\frac{\tan\theta/2}{0.1584}\right] V$$

y

$$\mathbf{E} = -\frac{95.1}{r \operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$$

Comprobación: $\nabla^2 V = 0, V(\theta = \pi/10) = 0, V(\theta = \pi/6) = V_o$.

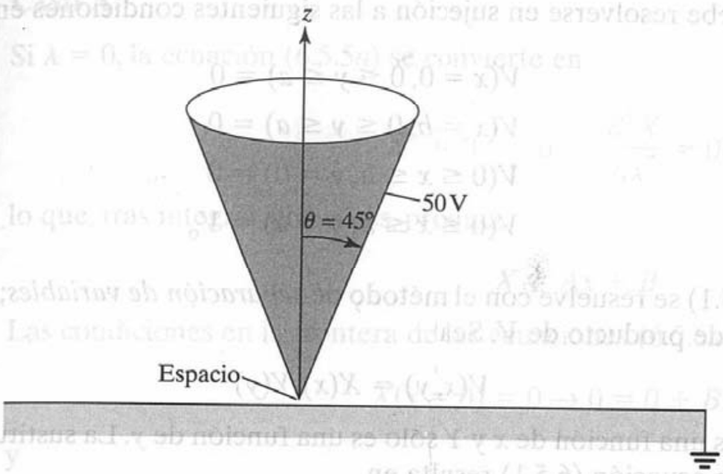


Figura 6.6. Para el ejercicio 6.4.

Ejercicio 6.4

Un cono conductor de gran tamaño ($\theta = 45°$) se coloca sobre un plano conductor con un ínfimo espacio de separación, como se muestra en la figura 6.6. Si el cono se conecta a una fuente de 50 V, halle V y $\mathbf{E}$ en $(-3, 4, 2)$.

Respuesta: 22.13 V, 11.36 $\mathbf{a}_\theta$ V/m.

Ejemplo 6.5

a) Determine la función de potencial de la región dentro del tanque rectangular de longitud infinita cuya sección transversal aparece en la figura 6.7.
b) Respecto de $V_o = 100$ V y $b = 2a$, halle el potencial en $x = a/2$, $y = 3a/4$.

Solución:

a) En este caso, el potencial V depende de x y y. La ecuación de Laplace se convierte en

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{6.5.1}$$

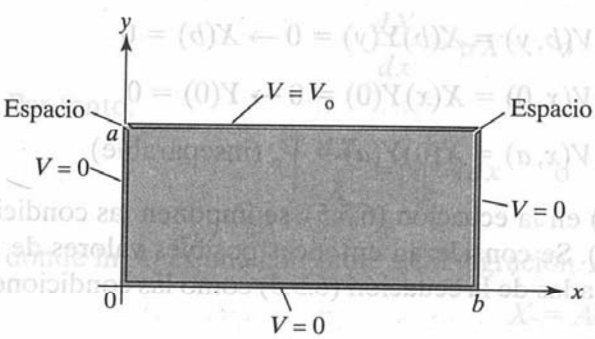


Figura 6.7. Potencial $V(x, y)$ debido a un tanque conductor rectangular.

Esta ecuacion debe resolverse en sujeción a las siguientes condiciones en la frontera:

$$V(x = 0, 0 \le y \le a) = 0 \tag{6.5.2a}$$

$$V(x = b, 0 \le y \le a) = 0 \tag{6.5.2b}$$

$$V(0 \le x \le b, y = 0) = 0 \tag{6.5.2c}$$

$$V(0 \le x \le b, y = a) = V_o \tag{6.5.2d}$$

La ecuación (6.5.1) se resuelve con el método de *separación de variables*; es decir, se busca una solución de producto de V. Sea

$$V(x, y) = X(x)\,Y(y) \tag{6.5.3}$$

cuando X sólo es una función de x y Y sólo es una función de y. La sustitución de la ecuación (6.5.3) en la ecuación (6.5.1) resulta en

$$X''Y + Y''X = 0$$

La división entre XY y la separación de X respecto de Y produce

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} \tag{6.5.4a}$$

Puesto que el miembro izquierdo de esta ecuación es sólo una función de x y el miembro derecho es sólo una función de y, para que la igualdad se sostenga ambos miembros deben ser iguales a una constante λ; es decir,

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \tag{6.5.4b}$$

La constante λ se llama *constante de separación*. Con base en la ecuación (6.5.4*b*) se obtiene

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{6.5.5a}$$

y

$$Y'' - \lambda Y = 0 \tag{6.5.5b}$$

Separadas las variables, las ecuaciones (6.5.5*a*) y (6.5.5*b*) reciben el nombre de *ecuaciones separadas*. $X(x)$ y $Y(y)$ se despejan por separado, tras de lo cual las soluciones se sustituyen en la ecuación (6.5.3). Para ello es necesario separar, de ser posible, las condiciones en la frontera de la ecuación (6.5.2), de esta forma:

$$V(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \tag{6.5.6a}$$

$$V(b, y) = X(b)Y(y) = 0 \rightarrow X(b) = 0 \tag{6.5.6b}$$

$$V(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \tag{6.5.6c}$$

$$V(x, a) = X(0)Y(a) = V_o \text{ (inseparable)} \tag{6.5.6d}$$

Para despejar $X(x)$ y $Y(y)$ en la ecuación (6.5.5), se imponen las condiciones en la frontera de la ecuación (6.5.6). Se consideran entonces posibles valores de λ que satisfagan tanto las ecuaciones separadas de la ecuación (6.5.5) como las condiciones de la ecuación (6.5.6).

Caso A.

Si $\lambda = 0$, la ecuación (6.5.5*a*) se convierte en

$$X'' = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0$$

lo que, tras integrar dos veces, produce

$$X = Ax + B \tag{6.5.7}$$

Las condiciones en la frontera de las ecuaciones (6.5.6*a*) y (6.5.6*b*) implican que

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \quad \text{o} \quad B = 0$$

y

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = A \cdot b + 0 \quad \text{o} \quad A = 0$$

puesto que $b \neq 0$. De ahí que la solución de X en la ecuación (6.5.7) se convierta en

$$X(x) = 0$$

de lo que resulta que $V = 0$ en la ecuación (6.5.3). Así, se considera a $X(x) = 0$ como una solución trivial y se concluye que $\lambda \neq 0$.

Caso B.

Si $\lambda < 0$, digamos $\lambda = -\alpha^2$, la ecuación (6.5.5*a*) se convierte en

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \quad \text{o} \quad (D^2 - \alpha^2)X = 0$$

donde

$$D = \frac{d}{dx}$$

es decir,

$$DX = \pm\, \alpha X \tag{6.5.8}$$

lo que indica que tenemos dos soluciones posibles, correspondientes a los signos más y menos. En cuanto al signo más, la ecuación (6.5.8) se convierte en

$$\frac{dX}{dx} = \alpha X \quad \text{o} \quad \frac{dX}{X} = \alpha\, dx$$

Por tanto,

$$\int \frac{dX}{X} = \int \alpha\, dx \quad \text{o} \quad \ln X = \alpha x + \ln A_1$$

donde $\ln A_1$ es una constante de integración. Así

$$X = A_1 e^{\alpha x} \tag{6.5.9a}$$

En cuanto al signo menos, de igual modo, la solución de la ecuación (6.5.8) es

$$X = A_2 e^{-\alpha x} \tag{6.5.9b}$$

La solución total se desprende de las ecuaciones (6.5.9*a*) y (6.5.9*b*); esto es,

$$X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \tag{6.5.10}$$

Puesto que $\cosh \alpha x = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})/2$ y $\operatorname{senh} \alpha x = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2$ o $e^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \operatorname{senh} \alpha x$ y $e^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \operatorname{senh} \alpha x$, la ecuación (6.5.10) puede expresarse como

$$X(x) = B_1 \cosh \alpha x + B_2 \operatorname{senh} \alpha x \tag{6.5.11}$$

donde $B_1 = A_1 + A_2$ y $B_2 = A_1 - A_2$. En vista de las condiciones en la frontera dadas, la solución de la ecuación (6.5.11) es preferible a la de la ecuación (6.5.10). De nuevo, las ecuaciones (6.5.6*a*) y (6.5.6*b*) implican que

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = B_1 \cdot (1) + B_2 \cdot (0) \quad \text{o} \quad B_1 = 0$$

y

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B_2 \operatorname{senh} \alpha b$$

Puesto que $\alpha \neq 0$ y $b \neq 0$, $\operatorname{senh} \alpha b$ no puede ser igual a cero. Esto se debe a que $\operatorname{senh} x = 0$ si y sólo si $x = 0$, como se muestra en la figura 6.8. De ahí que $B_2 = 0$ y

$$X(x) = 0$$

Ésta también es una solución trivial, de manera que concluimos que λ no puede ser menor que cero.

CASO C.

Si $\lambda > 0$, digamos $\lambda = \beta^2$, la ecuación (6.5.5*a*) se convierte en

$$X'' + \beta^2 X = 0$$

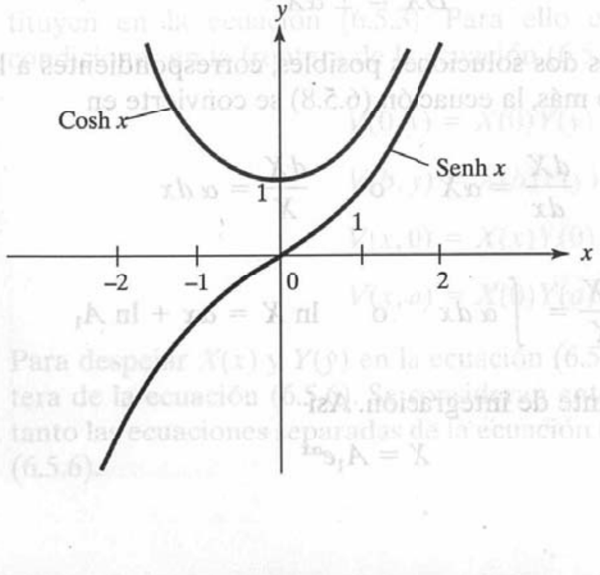


Figura 6.8. Diagrama del cosh x y el senh x que demuestra que senh $x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

es decir,

$$(D^2 + \beta^2)X = 0 \quad \text{o} \quad DX = \pm j\beta X \tag{6.5.12}$$

donde $j = \sqrt{-1}$. De las ecuaciones (6.5.8) y (6.5.12) se deduce que la diferencia entre los casos B y C consiste en reemplazar α por $j\beta$. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso B, la solución se obtiene de esta forma

$$X(x) = C_o e^{j\beta x} + C_1 e^{-j\beta x} \tag{6.5.13a}$$

Puesto que $e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \operatorname{sen} \beta x$ y $e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \operatorname{sen} \beta x$, la ecuación (6.5.13*a*) puede expresarse como

$$X(x) = g_o \cos \beta x + g_1 \operatorname{sen} \beta x \tag{6.5.13b}$$

donde $g_o = C_o + C_1$ y $g_1 = C_o - jC_1$.

En vista de las condiciones en la frontera dadas, es preferible usar la ecuación (6.5.13*b*). La imposición de las condiciones de las ecuaciones (6.5.6*a*) y (6.5.6*b*) resulta en

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = g_o \cdot (1) + 0 \quad \text{o} \quad g_o = 0$$

y

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = 0 + g_1 \operatorname{sen} \beta b$$

Supongamos que $g_1 \neq 0$ (pues de lo contrario obtendríamos una solución trivial); en consecuencia

$$\operatorname{sen} \beta b = 0 = \operatorname{sen} n\pi$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{6.5.14}$$

Nótese que, a diferencia de senh x, el cual es igual a cero sólo cuando $x = 0$, sen x es igual a cero en un número infinito de puntos, como se observa en la figura 6.9. Adviértase asimismo que $n \neq 0$, puesto que $\beta \neq 0$; ya consideramos la posibilidad $\beta = 0$ en el caso A, en el que obtuvimos una solución trivial. De igual forma, no es necesario que considere-

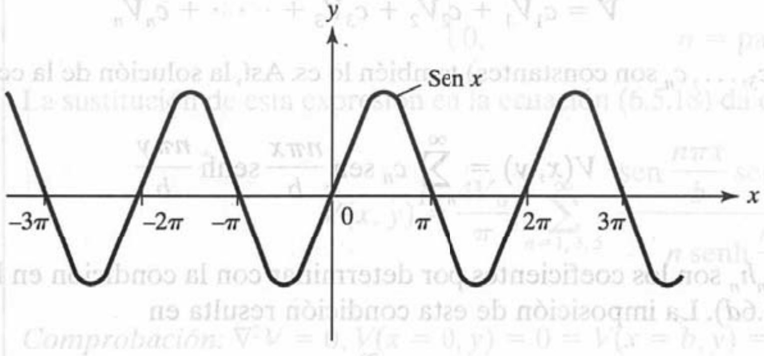


Figura 6.9. Diagrama del sen x que demuestra que sen $x = 0$ en un número infinito de puntos.

mos $n = -1, -2, -3, -4, \ldots$ puesto que $\lambda = \beta^2$ no variará con valores positivos y negativos de n. Respecto de una n dada, así, la ecuación (6.5.13b) se convierte en

$$X_n(x) = g_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \tag{6.5.15}$$

Habiendo determinado $X(x)$ y

$$\lambda = \beta^2 = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \tag{6.5.16}$$

se resuelve la ecuación (6.5.5b), la cual es ahora

$$Y'' - \beta^2 Y = 0$$

La solución de esta ecuación es similar a la de la ecuación (6.5.11) obtenida en el caso B; es decir,

$$Y(y) = h_o \cosh \beta y + h_1 \operatorname{senh} \beta y$$

La condición en la frontera de la ecuación (6.5.6c) implica que

$$Y(y = 0) = 0 \rightarrow 0 = h_o \cdot (1) + 0 \quad \text{o} \quad h_o = 0$$

De ahí que la solución de $Y(y)$ se convierta en

$$Y_n(y) = h_n \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b} \tag{6.5.17}$$

La sustitución de las ecuaciones (6.5.15) y (6.5.17), soluciones de las ecuaciones separadas de la ecuación (6.5.5), en la solución de producto de la ecuación (6.5.3) da como resultado

$$V_n(x, y) = g_n h_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b}$$

Esto indica que hay muchas posibles soluciones V_1, V_2, V_3, V_4, y así sucesivamente cuando $n = 1, 2, 3, 4$ y así sucesivamente.

Por efecto del *teorema de superposición*, si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son soluciones de la ecuación de Laplace, la combinación lineal

$$V = c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + \cdots + c_nV_n$$

(donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son constantes) también lo es. Así, la solución de la ecuación (6.5.1) es

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b} \tag{6.5.18}$$

donde $c_n = g_n h_n$ son los coeficientes por determinar con la condición en la frontera de la ecuación (6.5.6d). La imposición de esta condición resulta en

$$V(x, y = a) = V_o = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \tag{6.5.19}$$

lo cual es un desarrollo en serie de Fourier de V_o. Al multiplicar por sen $m\pi x/b$ ambos miembros de la ecuación (6.5.19) e integrar sobre $0 < x < b$ se obtiene

$$\int_0^b V_o \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{b}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b}\, dx \tag{6.5.20}$$

En razón de la propiedad de ortogonalidad de la función seno o coseno (véase el apéndice A.9).

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

La incorporación de esta propiedad a la ecuación (6.5.20) significa que todos los términos del miembro derecho de ésta tenderán a cero, salvo aquellos en los que $m = n$. Así, la ecuación (6.5.20) se reduce a

$$\int_0^b V_o \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b}\, dx = c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{b}\, dx$$

$$-V_o \frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{b} \bigg|_0^b = c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \frac{1}{2} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{b}\right) dx$$

$$\frac{V_o b}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \cdot \frac{b}{2}$$

o

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2V_o}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4V_o}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

es decir,

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{4V_o}{n\pi \operatorname{senh} \dfrac{n\pi a}{b}}, & n = \text{impar} \\ 0, & n = \text{par} \end{cases} \tag{6.5.21}$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación (6.5.18) da como resultado la solución final

$$V(x, y) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \dfrac{n\pi y}{b}}{n \operatorname{senh} \dfrac{n\pi a}{b}} \tag{6.5.22}$$

Comprobación: $\nabla^2 V = 0$, $V(x = 0, y) = 0 = V(x = b, y) = V(x, y = 0)$, $V(x, y = a) = V_o$. La ecuación (6.5.22), solución de nuestro problema, no debería sorprender; en realidad era posible inferirla de la mera observación del sistema de potencial de la figura 6.7. De

ésta se deduce que, a lo largo de x, V varía de 0 (en $x = 0$) a 0 (en $x = b$), requisito que sólo una función seno puede satisfacer. A lo largo de y, asimismo, V varía de 0 (en $y = 0$) a V_o (en $y = a$), circunstancia que sólo una función de seno hiperbólico puede satisfacer. Era de esperar entonces una solución como la ofrecida por la ecuación (6.5.22).

Para determinar el potencial en cada punto (x, y) del tanque, se toman los primeros términos de la serie convergente infinita de la ecuación (6.5.22); basta tomar cuatro o cinco de ellos.

b) Respecto de $x = a/2$ y $y = 3a/4$, donde $b = 2a$, tenemos

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) &= \frac{4V_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi/4 \operatorname{senh} 3n\pi/8}{n \operatorname{senh} n\pi/2} \\
&= \frac{4V_o}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\pi/4 \operatorname{senh} 3\pi/8}{\operatorname{senh}\pi/2} + \frac{\operatorname{sen} 3\pi/4 \operatorname{senh} 9\pi/8}{3 \operatorname{senh} 3\pi/2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\operatorname{sen} 5\pi/4 \operatorname{senh} 15\pi/4}{5 \operatorname{senh} 5\pi/4} + \cdots\right] \\
&= \frac{4V_o}{\pi}(0.4517 + 0.0725 - 0.01985 - 0.00645 + 0.00229 + \cdots) \\
&= 0.6374 V_o
\end{aligned}
$$

Sería ilustrativo considerar el caso especial en el que $A = b = 1$ m y $V_o = 100$ V. En la figura 6.10*(a)* se presenta el resultado del cálculo, mediante la ecuación (6.5.22), del potencial en algunos puntos específicos, y en la figura 6.10*(b)* las líneas de flujo y líneas equipotenciales correspondientes. En la figura 6.11 aparece a su vez el resultado de una versión simple del programa Matlab con base en esa misma ecuación. Este programa, cuyo resultado se explica por sí solo, puede utilizarse para calcular $V(x, y)$ en cualquier punto dentro del tanque. En la figura 6.11, el resultado de $V(x = b/4, y = 3a/4)$, calculado mediante el procedimiento común, es 43.2 volts.

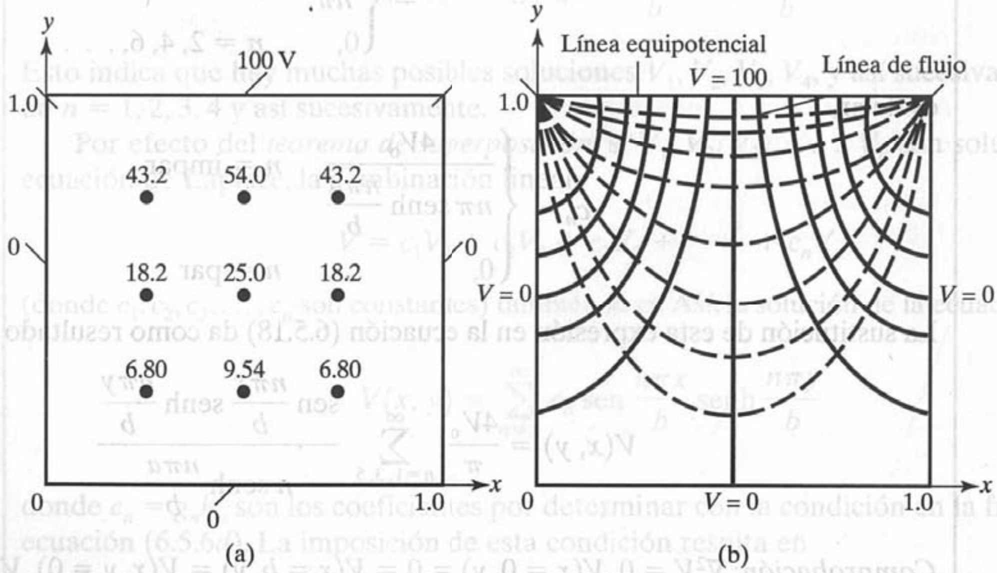


Figura 6.10. Para el ejemplo 6.5: **(a)** cálculo de $V(x, y)$ en algunos puntos; **(b)** diagrama de líneas de flujo y líneas equipotenciales.

```
% SOLUCION DE LA ECUACION DE LAPLACE
% ----------------------------------------
% ESTE PROGRAMA RESUELVE EL PROBLEMA DE DOS
% DIMENSIONES EN LA FRONTERA DESCRITO EN LA FIG. 6.7
% a Y b SON LAS DIMENSIONES DEL TANQUE
% x Y y SON LAS COORDENADAS DEL PUNTO DE INTERES

P = [];
Vo = 100.0;
a = 1.0;
b = a;
x = b/4;
y = 3.*a/4.;
c = 4.*Vo/pi
sum = 0.0;
for k=1:10
   n = 2*k - 1
   a1 = sin (n*pi*x/b);
   a2 = sinh (n*pi*y/b);
   a3 = n*sinh (n*pi*a/b);
   sum = sum + c*a1*a2/a3;
   P = [n, sum]
end
diary test.out
P
diary off
```

Figura 6.11. Resultado del ejemplo 6.5 obtenido en el programa Matlab.

Ejercicio 6.5

Con referencia al ejemplo 6.5, adopte $V_o = 100$ V, $b = 2a = 2$ m y halle V y $\mathbf{E}$ en

a) $(x, y) = (a, a/2)$

b) $(x, y) = 3a/2, a/4)$

Respuestas: *a)* 44.51 V, –99.25 $\mathbf{a}_y$ V/m y *b)* 16.5 V, 20.6 $\mathbf{a}_x - 70.34\,\mathbf{a}_y$ V/m.

Ejemplo 6.6

Con referencia al ejemplo anterior, halle la distribución de potencial si V_o no es constante sino

a) $V_o = 10 \operatorname{sen} 3\pi x/b,\ y = a,\ 0 \le x \le b$

b) $V_o = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{b} + \dfrac{1}{10} \operatorname{sen} \dfrac{5\pi x}{b},\ y = a,\ 0 \le x \le b$

Solución:

a) Puesto que todos los pasos anteriores a la ecuación (6.5.19) del ejemplo precedente permanecen igual, la solución hasta ese punto es de la forma

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b} \tag{6.6.1}$$

como la ecuación (6.5.18). Pero en lugar de la ecuación (6.5.19), ahora tenemos

$$V(y = a) = V_o = 10 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}$$

De la igualación de los coeficientes de los términos seno de ambos miembros se obtiene

$$c_n = 0, \qquad n \neq 3$$

En el caso de $n = 3$,

$$10 = c_3 \operatorname{senh} \frac{3\pi a}{b}$$

o

$$c_3 = \frac{10}{\operatorname{senh} \dfrac{3\pi a}{b}}$$

Así, la solución dada en la ecuación (6.6.1) se convierte en

$$V(x, y) = 10 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{b} \frac{\operatorname{senh} \dfrac{3\pi y}{b}}{\operatorname{senh} \dfrac{3\pi a}{b}}$$

b) En forma similar, en lugar de la ecuación (6.5.19) tenemos

$$V_o = V(y = a)$$

o

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} + \frac{1}{10} \operatorname{senh} \frac{5\pi x}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}$$

Al igualar el coeficiente de los términos seno,

$$c_n = 0, \qquad n \neq 1, 5$$

Respecto de $n = 1$,

$$2 = c_1 \operatorname{senh} \frac{\pi a}{b} \quad \text{o} \quad c_1 = \frac{2}{\operatorname{senh} \frac{\pi a}{b}}$$

Respecto de $n = 5$,

$$\frac{1}{10} = c_5 \operatorname{senh} \frac{5\pi a}{b} \quad \text{o} \quad c_5 = \frac{1}{10 \operatorname{senh} \frac{5\pi a}{b}}$$

Por tanto,

$$V(x, y) = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{senh} \frac{\pi a}{b}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{5\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{5\pi y}{b}}{10 \operatorname{senh} \frac{5\pi a}{b}}$$

Ejercicio 6.6

Con relación al ejemplo 6.5, supongamos que todo permanece igual, excepto que, $V_o \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{b}$, $0 \leq x \leq b$, $y = a$ reemplazan a V_o. Halle $V(x, y)$.

Respuesta: $\dfrac{V_o \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{7\pi y}{b}}{\operatorname{senh} \frac{7\pi a}{b}}$

Ejemplo 6.7

Obtenga las ecuaciones diferenciales separadas relativas a la distribución de potencial $V(\rho, \phi, z)$ en una región sin carga.

Solución:

Este ejemplo complementa la ilustración del método de separación de variables efectuada en el ejemplo 6.5. En virtud de que la región está libre de carga, la ecuación de Laplace debe resolverse en coordenadas cilíndricas; es decir,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6.7.1}$$

Concedamos que

$$V(\rho, \phi, z) = R(\rho)\ \Phi(\phi)\ Z(z) \tag{6.7.2}$$

donde R, Φ y Z son funciones de ρ, ϕ y z, respectivamente. La sustitución de la ecuación (6.7.2) en la ecuación (6.7.1) produce

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho\, dR}{d\rho}\right) + \frac{RZ}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + R\Phi\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \tag{6.7.3}$$

De la división entre $R\Phi Z$ se obtiene

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho\, dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} \tag{6.7.4}$$

El miembro derecho de esta ecuación es sólo una función de z, mientras que el izquierdo no depende de z. Para igualarlos, ambos miembros deben ser constantes; es decir,

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho\, dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\lambda^2 \tag{6.7.5}$$

donde $-\lambda^2$ es una constante de separación. La ecuación (6.7.5) puede separarse en dos partes:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2 \tag{6.7.6}$$

o

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0 \tag{6.7.7}$$

y

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho\, dR}{d\rho}\right) + \lambda^2\rho^2 + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0 \tag{6.7.8}$$

La ecuación (6.7.8) puede expresarse como

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho} + \lambda^2\rho^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \mu^2 \tag{6.7.9}$$

donde μ^2 es otra constante de separación. La ecuación (6.7.9) se separa en

$$\Phi'' + \mu^2\Phi = 0 \tag{6.7.10}$$

y

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2\lambda^2 - \mu^2)R = 0 \tag{6.7.11}$$

Las ecuaciones (6.7.7), (6.7.10) y (6.7.11) son las ecuaciones diferenciales separadas que requerimos. La solución de la primera de ellas es similar a la obtenida en el caso B del ejemplo 6.5; esto es,

$$Z(z) = c_1 \cosh \lambda z + c_2 \operatorname{senh} \lambda z \tag{6.7.12}$$

La solución de la ecuación (6.7.10) es similar a la obtenida en el caso C del ejemplo 6.5; es decir,

$$\Phi(\phi) = c_3 \cos \mu\phi + c_4 \operatorname{sen} \mu\phi \tag{6.7.13}$$

La ecuación (6.7.11) es una *ecuación diferencial de Bessel* cuya solución rebasa el alcance de este libro.[3]

Ejercicio 6.7

Repita el ejemplo 6.7 con relación a $V(r, \theta, \phi)$.

Respuesta: Si $V(r, \theta, \phi) = R(r)\, F(\theta)\, \Phi(\phi)$, $\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0$, $R'' + \dfrac{2}{r}R' - \dfrac{\mu^2}{r^2}R = 0$, $F'' + \cot\theta\, F' + (\mu^2 - \lambda^2 \operatorname{cosec}^2 \theta)\, F = 0$.

6.5. Resistencia y capacitancia

En la sección 5.4 se explicó el concepto de resistencia y se dedujo la ecuación (5.16) para determinar la resistencia de un conductor de sección transversal uniforme. El hecho de que la sección transversal de un conductor no sea uniforme invalida la ecuación (5.16), de manera que la resistencia debe obtenerse mediante la ecuación (5.17):

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}} \tag{6.16}$$

El cálculo de la resistencia de un conductor de sección transversal no uniforme puede considerarse un problema con valor en la frontera. A partir de la ecuación (6.16), la resistencia R (o conductancia $G = 1/R$) de un material conductor dado puede hallarse siguiendo estos pasos:

1. Se elige el sistema de coordenadas apropiado.
2. Se presupone V_o como la diferencia de potencial entre las terminales del conductor.
3. Se resuelve la ecuación de Laplace $\nabla^2 V$ para obtener V. Después se calcula $\mathbf{E}$ a partir de $\mathbf{E} = -\nabla V$ e I a partir de $I = \int \sigma\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$.
4. Por último, se obtiene R como V_o/I.

En esencia, se presupone V_o, se halla I y se determina $R = V_o/I$. Alternativamente, es posible presuponer la corriente I_o, hallar la respectiva diferencia de potencial V y determinar R a partir de $R = V/I_o$. Como se explicará más adelante, la capacitancia de un capacitor se obtiene a través de una técnica similar.

[3] Para una solución completa de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas o esféricas, véase, por ejemplo, D. T. Paris y F. K. Hurd, *Basic Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1969, pp. 150-159.

En general, un capacitor consta de dos (o más) conductores portadores de cargas iguales pero de signo contrario. Esto implica que todas las líneas de flujo que salen de un conductor deben terminar necesariamente en la superficie del otro. Las *placas* del capacitor, como también se llama a los conductores, pueden estar separadas por el vacío o un dieléctrico.

Considérese el capacitor de dos conductores que aparece en la figura 6.12. Los conductores se mantienen en una diferencia de potencial V dada por

$$V = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{6.17}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico que existe entre los conductores y se presupone que el conductor 1 porta carga positiva. (Cabe señalar que el campo $\mathbf{E}$ siempre es normal a las superficies conductoras.)

La *capacitancia* C del capacitor es la razón de la magnitud de la carga en una de las placas a la diferencia de potencial entre ellas; es decir,

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}} \tag{6.18}$$

La supresión del signo negativo que precede a $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ se debe a que lo que nos interesa es el valor absoluto de V. La capacitancia C es una propiedad física del capacitor y se mide en farads (F). Mediante la ecuación (6.18) puede obtenerse C de cualquier capacitor de dos conductores con uno de estos métodos:

1. Se presupone Q y se calcula V en términos de Q (lo que implica la ley de Gauss).
2. Se presupone V y se calcula Q en términos de V (lo que implica la ecuación de Laplace).

Usaremos por lo pronto el primer método; el segundo se ilustrará en los ejemplos 6.10 y 6.11. El primer método comprende los pasos siguientes:

1. Se elige el sistema de coordenadas apropiado.
2. Se acepta que las dos placas conductoras portan cargas $+Q$ y $-Q$.

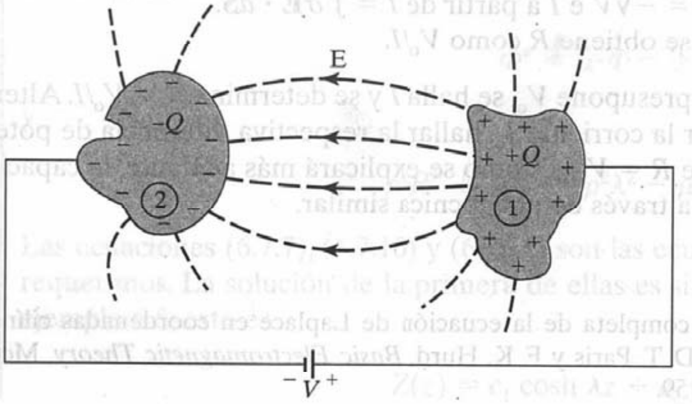


Figura 6.12. Capacitor de dos conductores.

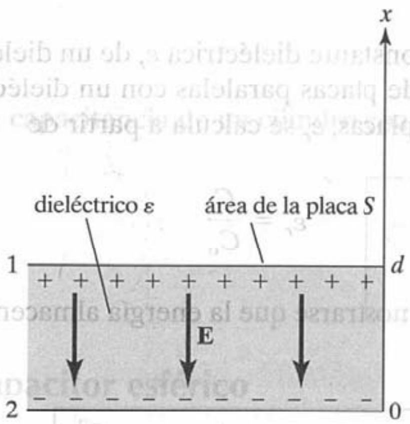
3. Se determina **E** con base en la ley de Coulomb o de Gauss y se halla V a partir de $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. El signo negativo puede ignorarse en este caso, ya que lo que nos interesa es el valor absoluto de V.
4. Por último, se obtiene C a partir de $C = Q/V$.

Apliquemos ahora este atractivo procedimiento matemático para determinar la capacitancia de algunas importantes configuraciones de dos conductores.

A. Capacitor de placas paralelas

Considérese el capacitor de placas paralelas que aparece en la figura 6.13*(a)*. Supongamos que cada placa posee un área S y que están separadas por una distancia d. Supongamos asimismo que las placas 1 y 2 portan respectivamente cargas $+Q$ y $-Q$ distribuidas de manera uniforme, de modo que

$$\rho_S = \frac{Q}{S} \tag{6.19}$$



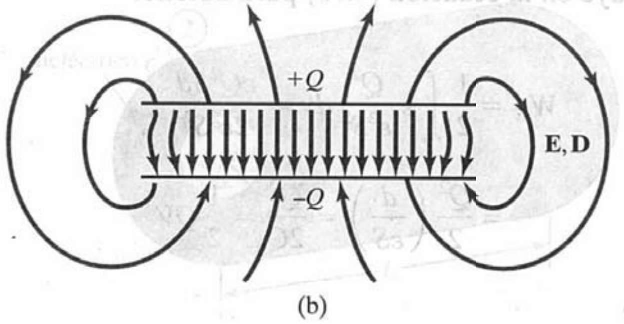


Figura 6.13. **(a)** Capacitor de placas paralelas; **(b)** efecto de borde debido a un capacitor de placas paralelas.

En un capacitor ideal de placas paralelas, la distancia d que separa a éstas es muy pequeña en comparación con sus dimensiones. Suponiendo ese caso ideal, es posible ignorar el efecto de borde en los extremos de las placas, el cual se ilustra en la figura 6.13(*b*), y considerar uniforme al campo entre ellas. Si el espacio entre las placas está ocupado por un dieléctrico homogéneo con permitividad ε y se ignora el efecto de borde del flujo en los extremos de las placas, con base en la ecuación (4.27), $\mathbf{D} = -\rho_S \mathbf{a}_x$ o

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\varepsilon}(-\mathbf{a}_x) = -\frac{Q}{\varepsilon S}\mathbf{a}_x \tag{6.20}$$

Por tanto

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^d \left[-\frac{Q}{\varepsilon S}\mathbf{a}_x\right] \cdot dx\, \mathbf{a}_x = \frac{Qd}{\varepsilon S} \tag{6.21}$$

de modo que en un capacitor de placas paralelas

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d}} \tag{6.22}$$

Esta fórmula permite medir la constante dieléctrica ε_r de un dieléctrico dado. Al medir la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas con un dieléctrico entre ellas y la capacitancia C_o con aire entre las placas, ε_r se calcula a partir de

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_o} \tag{6.23}$$

Con la ecuación (4.96) puede demostrarse que la energía almacenada en un capacitor está dada por

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C}} \tag{6.24}$$

Para comprobar esta expresión con relación a un capacitor de placas paralelas, la ecuación (6.20) se sustituye en la ecuación (4.96) para obtener

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon \frac{Q^2}{\varepsilon^2 S^2}\, dv = \frac{\varepsilon Q^2 S d}{2\varepsilon^2 S^2}$$

$$= \frac{Q^2}{2}\left(\frac{d}{\varepsilon S}\right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV$$

como cabía esperar.

B. Capacitor coaxial

Éste es en esencia un cable coaxial o capacitor cilíndrico coaxial. Considérese la longitud L de dos conductores coaxiales de radio interno a y radio externo b ($b > a$), como se muestra en la figura 6.14. Concedamos que el espacio entre los conductores está ocupado por un dieléctrico homogéneo con permitividad ε. Supongamos asimismo que los conductores 1 y 2 portan respectivamente $+Q$ y $-Q$ distribuidas de manera uniforme. La aplicación de la ley de Gauss a una superficie gaussiana cilíndrica arbitraria de radio ρ ($a < \rho < b$) produce

$$Q = \varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon E_\rho 2\pi\rho L \tag{6.25}$$

De ahí que:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\,\mathbf{a}_\rho \tag{6.26}$$

Si se ignora el efecto de borde del flujo en los extremos de los cilindros,

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a \left[\frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\,\mathbf{a}_\rho\right] \cdot d\rho\,\mathbf{a}_\rho \tag{6.27a}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a} \tag{6.27b}$$

Así, la capacitancia de un cilindro coaxial está dada por

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\dfrac{b}{a}}} \tag{6.28}$$

C. Capacitor esférico

Este caso corresponde al de dos conductores esféricos concéntricos. Considérese la esfera interna de radio a y la esfera externa de radio b ($b > a$) separadas por un medio dieléctrico con permitividad ε que se presentan en la figura 6.15. Supongamos cargas $+Q$ y $-Q$

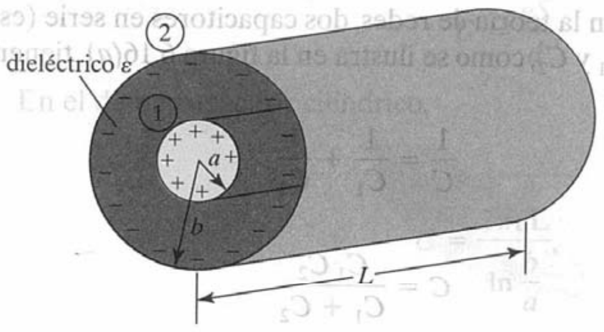


Figura 6.14. Capacitor coaxial.

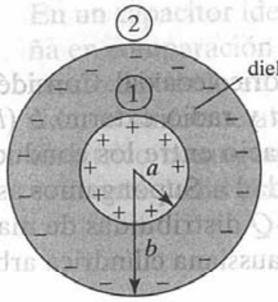


Figura 6.15. Capacitor esférico.

en las esferas interna y externa, respectivamente. Al aplicar la ley de Gauss a una superficie gaussiana esférica arbitraria de radio r ($a < r < b$),

$$Q = \varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon E_r 4\pi r^2 \tag{6.29}$$

es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathbf{a}_r \tag{6.30}$$

La diferencia de potencial entre los conductores es

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathbf{a}_r\right] \cdot dr\,\mathbf{a}_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] \tag{6.31}$$

Así, la capacitancia de un capacitor esférico es

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}} \tag{6.32}$$

Si concedemos que $b \to \infty$, $C = 4\pi\varepsilon a$, la cual es la capacitancia de un capacitor esférico cuya placa externa es infinitamente grande. Tal es el caso de un conductor esférico a larga distancia de otros cuerpos conductores: la *esfera aislada*. Aun un objeto de forma irregular de aproximadamente el mismo tamaño que esta esfera tendrá prácticamente la misma capacitancia. Este dato es útil para estimar la capacitancia parásita de un cuerpo o pieza aislado.

Recuérdese que, según la teoría de redes, dos capacitores en serie (es decir, con igual carga) con capacitancia C_1 y C_2, como se ilustra en la figura 6.16*(a)*, tienen una capacitancia total de

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

o

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{6.33}$$

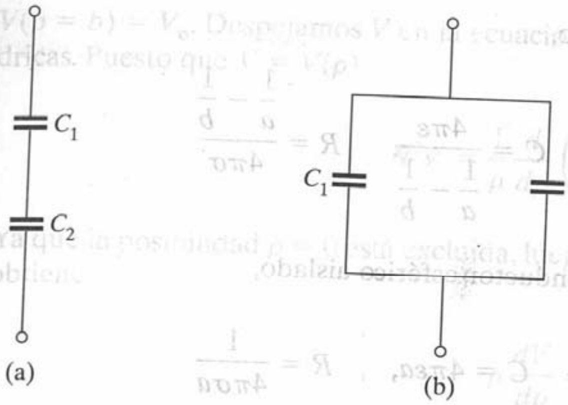


Figura 6.16. Capacitores **(a)** en serie y **(b)** en paralelo.

Si los capacitores están en paralelo (es decir, con igual voltaje entre sus placas), como se muestra en la figura 6.16*(b)*, la capacitancia total es de

$$C = C_1 + C_2 \tag{6.34}$$

Reconsideremos ahora las expresiones para la determinación de la resistencia R y la capacitancia C de un sistema eléctrico. Tales expresiones se dieron en las ecuaciones (6.16) y (6.18):

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint \sigma\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \tag{6.16}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \tag{6.18}$$

El producto de estas expresiones resulta en

$$\boxed{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}} \tag{6.35}$$

el cual es el tiempo de relajación T_r del medio que separa a los conductores. Conviene destacar que la ecuación (6.35) sólo es válida si el medio es homogéneo, lo que se infiere fácilmente de las ecuaciones (6.16) y (6.18). Suponiendo medios homogéneos, la ecuación (6.35) permite obtener rápidamente la resistencia de los capacitores ya descritos. Los ejemplos siguientes ilustrarán esta idea.

En el caso de un capacitor de placas paralelas,

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}, \qquad R = \frac{d}{\sigma S} \tag{6.36}$$

En el de un capacitor cilíndrico,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln \frac{b}{a}}, \qquad R = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi\sigma L} \tag{6.37}$$

En el de un capacitor esférico,

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}, \qquad R = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{4\pi\sigma} \tag{6.38}$$

Y, finalmente, en el de un conductor esférico aislado,

$$C = 4\pi\varepsilon a, \qquad R = \frac{1}{4\pi\sigma a} \tag{6.39}$$

Tengase en cuenta que la resistencia R de las ecuaciones (6.35) a (6.39) no es la de las placas del capacitor, sino la resistencia de dispersión entre ellas; en consecuencia, en esas ecuaciones σ es la conductividad del medio dieléctrico entre las placas.

Ejemplo 6.8

Una barra metálica de conductividad σ se dobla para formar un sector plano de 90° de radio interno a, radio externo b y grosor t, como se observa en la figura 6.17. Demuestre que *a)* la resistencia de la barra entre las superficies verticales curvas en $\rho = a$ y $\rho = b$ es

$$R = \frac{2 \ln \frac{b}{a}}{\sigma \pi t}$$

y *b)* la resistencia entre las dos superficies horizontales en $z = 0$ y $z = t$ es

$$R' = \frac{4t}{\sigma\pi\,(b^2 - a^2)}$$

Solución:

a) Entre los extremos verticales curvos, localizados en $\rho = a$ y $\rho = b$, la barra tiene una sección transversal no uniforme, de manera que no es posible aplicar la ecuación (5.16). Así, debemos emplear la ecuación (6.16). Concedamos que entre las superficies curvas en $\rho = a$ y $\rho = b$ se mantiene una diferencia de potencial V_o, de modo que $V(\rho = a) = 0$ y

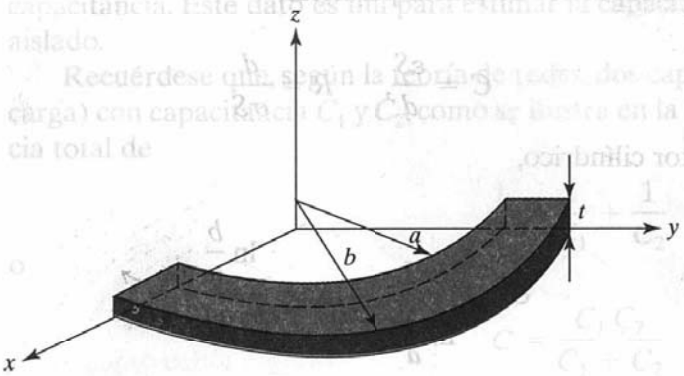


Figura 6.17. Barra metálica, para el ejemplo 6.8.

$V(\rho = b) = V_o$. Despejamos V en la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ en coordenadas cilíndricas. Puesto que $V = V(\rho)$,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = 0$$

Ya que la posibilidad $\rho = 0$ está excluida, luego de multiplicar por ρ e integrar una vez se obtiene

$$\rho\frac{dV}{d\rho} = A$$

o

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

Tras integrar otra vez se tiene

$$V = A\ln\rho + B$$

donde A y B son constantes de integración, por determinar con base en las condiciones en la frontera.

$$V(\rho = a) = 0 \to 0 = A\ln a + B \quad \text{o} \quad B = -A\ln a$$

$$V(\rho = b) = V_o \to V_o = A\ln b + B = A\ln b - A\ln a = A\ln\frac{b}{a} \quad \text{o} \quad A = \frac{V_o}{\ln\frac{b}{a}}$$

Por tanto,

$$V = A\ln\rho - A\ln a = A\ln\frac{\rho}{a} = \frac{V_o}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{\rho}{a}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho}\,\mathbf{a}_\rho = -\frac{A}{\rho}\,\mathbf{a}_\rho = -\frac{V_o}{\rho\ln\frac{b}{a}}\,\mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad d\mathbf{S} = -\rho\, d\phi\, dz\, \mathbf{a}_\rho$$

$$I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{z=0}^{t} \frac{V_o\sigma}{\rho\ln\frac{b}{a}}\, dz\,\rho\, d\phi = \frac{\pi}{2}\frac{tV_o\sigma}{\ln\frac{b}{a}}$$

Así,

$$R = \frac{V_o}{I} = \frac{2\ln\frac{b}{a}}{\sigma\pi t}$$

como se pidió demostrar.

b) Sea V_o la diferencia de potencial entre las dos superficies horizontales, de manera que $V(z = 0) = 0$ y $V(z = t) = V_o$. $V = V(z)$, de modo que la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ se convierte en

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

Tras integrar dos veces se obtiene

$$V = Az + B$$

Se aplican entonces las condiciones en la frontera para determinar A y B:

$$V(z = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \quad \text{o} \quad B = 0$$

$$V(z = t) = V_o \rightarrow V_o = At \quad \text{o} \quad A = \frac{V_o}{t}$$

Por tanto,

$$V = \frac{V_o}{t} z$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\mathbf{a}_z = -\frac{V_o}{t}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{\sigma V_o}{t}\mathbf{a}_z, \qquad d\mathbf{S} = -\rho\, d\phi\, d\rho\, \mathbf{a}_z$$

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=a}^{b} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{V_o\sigma}{t} \rho\, d\phi\, d\rho$$

$$= \frac{V_o\sigma}{t} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{V_o\, \sigma\, \pi\, (b^2 - a^2)}{4t}$$

En consecuencia,

$$R' = \frac{V_o}{I} = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$

Alternativamente, en este caso sí es posible aplicar la ecuación (5.16), ya que la sección transversal de la barra entre las superficies horizontales en $z = 0$ y $z = t$ es uniforme. Así,

$$R' = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{t}{\sigma \dfrac{\pi}{4}(b^2 - a^2)}$$

$$= \frac{4t}{\sigma\pi\,(b^2 - a^2)}$$

como se pidió demostrar.

Ejercicio 6.8

Un disco de grosor t tiene radio b y un orificio central de radio a. Si σ es la conductividad del disco, halle la resistencia entre

a) El orificio y la orilla del disco.
b) Los dos lados planos del disco.

Respuestas: *a)* $\dfrac{\ln b/a}{2\pi t\sigma}$ y *b)* $\dfrac{t}{\sigma\pi\,(b^2 - a^2)}$.

Ejemplo 6.9

Un cable coaxial contiene un material aislante de conductividad σ. Si el radio del alambre central es a y el del recubrimiento es b, demuestre que la conductancia del cable por unidad de longitud es [véase la ecuación (6.37)]

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln b/a}$$

Solución:

Considérese que L en la figura 6.14 es la longitud del cable coaxial. Sea V_o la diferencia de potencial entre los conductores interno y externo, de tal forma que $V(\rho = a) = 0$ y $V(\rho = b) = V_o$. V y $\mathbf{E}$ pueden hallarse justo como en el inciso *a)* del ejemplo anterior. Por consiguiente:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \frac{-\sigma V_o}{\rho \ln b/a}\mathbf{a}_\rho, \qquad d\mathbf{S} = -\rho d\phi\, dz\, \mathbf{a}_\rho$$

$$I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{L} \frac{V_o\sigma}{\rho \ln b/a}\rho\, dz\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi L\sigma V_o}{\ln b/a}$$

La resistencia por unidad de longitud es

$$R = \frac{V_o}{I}\cdot\frac{1}{L} = \frac{\ln b/a}{2\pi\sigma}$$

y la conductancia por unidad de longitud es

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma}{\ln b/a}$$

como se pidió demostrar.

Ejercicio 6.9

Un cable coaxial contiene un material aislante de conductividad σ_1 en su mitad superior y uno de conductividad σ_2 en su mitad inferior (como se muestra en la figura 6.19*b*). Si el radio del alambre central es a y el del recubrimiento es b, demuestre que la resistencia de dispersión de la longitud ℓ del cable es

$$R = \frac{1}{\pi\ell\,(\sigma_1 + \sigma_2)} \ln \frac{b}{a}$$

Respuesta: Comprobación.

Ejemplo 6.10

Cascarones conductores esféricos con radios $a = 10$ cm y $b = 30$ cm se mantienen en una diferencia de potencial de 100 V, de modo que $V(r = b) = 0$ y $V(r = a) = 100$ V. Determine V y $\mathbf{E}$ en la región entre los cascarones. Si $\varepsilon_r = 2.5$ en la región, determine la carga total inducida en los cascarones y la capacitancia del capacitor.

Solución:

Considérense los cascarones esféricos que aparecen en la figura 6.18. Como V sólo depende de r, la ecuación de Laplace se convierte en

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dV}{dr}\right] = 0$$

Puesto que $r \neq 0$ en la región de interés, se multiplica por r^2 para obtener

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dV}{dr}\right] = 0$$

Tras integrar una vez se obtiene

$$r^2\frac{dV}{dr} = A$$

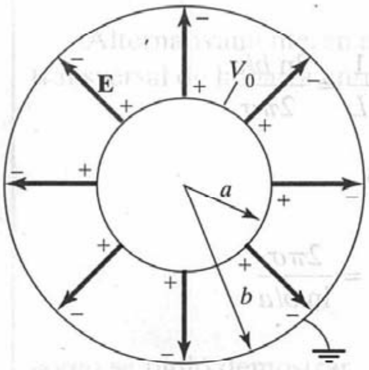


Figura 6.18. Potencial $V(r)$ debido a cascarones conductores esféricos.

o

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

Una nueva integración resulta en

$$V = -\frac{A}{r} + B$$

Como de costumbre, las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones en la frontera.

Cuando $r = b$, $V = 0 \rightarrow 0 = -\dfrac{A}{b} + B$ o $B = \dfrac{A}{b}$

De ahí que

$$V = A\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right]$$

Asimismo, cuando $r = a$, $V = V_o \rightarrow V_o = A\left[\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right]$

o

$$A = \frac{V_o}{\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}}$$

Así

$$V = V_o \frac{\left[\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right]}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\mathbf{a}_r = -\frac{A}{r^2}\mathbf{a}_r$$

$$= \frac{V_o}{r^2\left[\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right]}\mathbf{a}_r$$

$$Q = \int \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r V_o}{r^2\left[\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right]} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r V_o}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$$

La capacitancia se determina fácilmente, de esta manera

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$$

lo mismo que obtuvimos en la ecuación (6.32); en la sección 6.5 presupusimos Q y hallamos la correspondiente V_o, mientras que aquí presupusimos V_o y hallamos la correspondiente Q para determinar C. La sustitución de $a = 0.1$ m, $b = 0.3$ m y $V_o = 100$ V resulta en

$$V = 100\,\frac{\left[\dfrac{1}{r} - \dfrac{10}{3}\right]}{10 - 10/3} = 15\left[\frac{1}{r} - \frac{10}{3}\right] V$$

Comprobación: $\nabla^2 V = 0$, $V(r = 0.3 \text{ m}) = 0$, $V(r = 0.1 \text{ m}) = 100$.

$$\mathbf{E} = \frac{100}{r^2\,[10 - 10/3]}\,\mathbf{a}_r = \frac{15}{r^2}\,\mathbf{a}_r \text{ V/m}$$

$$Q = \pm 4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{(2.5)\cdot(100)}{10 - 10/3}$$

$$= \pm 4.167 \text{ nC}$$

La carga positiva es inducida en el cascarón interno y la negativa en el externo. Asimismo,

$$C = \frac{|Q|}{V_o} = \frac{4.167 \times 10^{-9}}{100} = 41.67 \text{ pF}$$

Ejercicio 6.10

Si la figura 6.19 representa la sección transversal de dos capacitores esféricos, determine su capacitancia. Sea $a = 1$ mm, $b = 3$ mm, $c = 2$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.5$ y $\varepsilon_{r2} = 3.5$.

Respuestas: *a)* 0.53 pF y *b)* 0.5 pF.

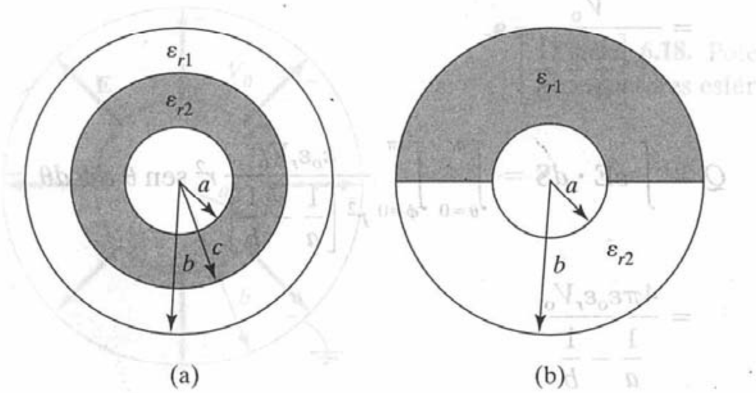


Figura 6.19. Para los ejercicios 6.9, 6.10 y 6.12.

Ejemplo 6.11

En la sección 6.5 se explicó que la capacitancia $C = Q/V$ de un capacitor puede hallarse presuponiendo Q y calculando V o presuponiendo V y calculando Q. El primer método se usó en la sección 6.5 y el segundo en el ejemplo anterior. Siga este último para deducir la ecuación (6.22).

Solución:

Supongamos que las placas paralelas de la figura 6.13 se mantienen en una diferencia de potencial de V_o, de manera que $V(x = 0)$ y $V(x = d) = V_o$. Esto implica un problema unidimensional con valor en la frontera; es decir, resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = \frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Tras integrar dos veces se obtiene

$$V = Ax + B$$

donde A y B son constantes de integración, por determinar a partir de las condiciones en la frontera. En $x = 0, V = 0 \rightarrow 0 = 0 + B$ o $B = 0$ y en $x = d, V = V_o \rightarrow V_o = Ad + 0$ o $A = V_o/d$.

Por tanto,

$$V = \frac{V_o}{d} x$$

Nótese que esta solución satisface la ecuación de Laplace y las condiciones en la frontera.

Hemos supuesto que V_o es la diferencia de potencial entre las placas. Nuestro objetivo es hallar la carga Q en una de las placas para poder determinar después la capacitancia $C = Q/V_o$. La carga en cualquiera de las placas es

$$Q = \int \rho s \, dS$$

Pero $\rho_S = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_n$, donde

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx} \mathbf{a}_x = -A\mathbf{a}_x = -\frac{V_o}{d} \mathbf{a}_x$$

En las placas inferiores, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_x$, de modo que

$$\rho_S = -\frac{\varepsilon V_o}{d} \quad \text{y} \quad Q = -\frac{\varepsilon V_o S}{d}$$

En las placas superiores, $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_x$, de modo que

$$\rho_S = \frac{\varepsilon V_o}{d} \quad \text{y} \quad Q = \frac{\varepsilon V_o S}{d}$$

Como cabía esperar, Q es igual pero de signo contrario entre las placas. Así,

$$C = \frac{|Q|}{V_o} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

lo cual es acorde con la ecuación (6.22).

Ejercicio 6.11

Deduzca la fórmula de la capacitancia $C = Q/V_o$ de un condensador cilíndrico en la ecuación (6.28) presuponiendo V_o y hallando Q.

Ejemplo 6.12

Determine la capacitancia de cada uno de los capacitores que aparecen en la figura 6.20. Adopte $\varepsilon_{r1} = 4, \varepsilon_{r2} = 6, d = 5$ mm y $S = 30$ cm^2.

Solución:

a) Puesto que **D** y **E** son normales a la interfaz dieléctrica en el caso del capacitor de la figura 6.20*(a)*, podría inferirse que este capacitor se compone de dos capacitores C_1 y C_2 en serie, como los que se presentaron en la figura 6.16*(a)*.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r1} S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_o \varepsilon_{r1} S}{d}, \qquad C_2 = \frac{2\varepsilon_o \varepsilon_{r2} S}{d}$$

La capacitancia total C está dada por

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\varepsilon_o S}{d} \frac{(\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2})}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{30 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3}} \cdot \frac{4 \times 6}{10} \tag{6.12.1}$$

$$C = 25.46 \text{ pF}$$

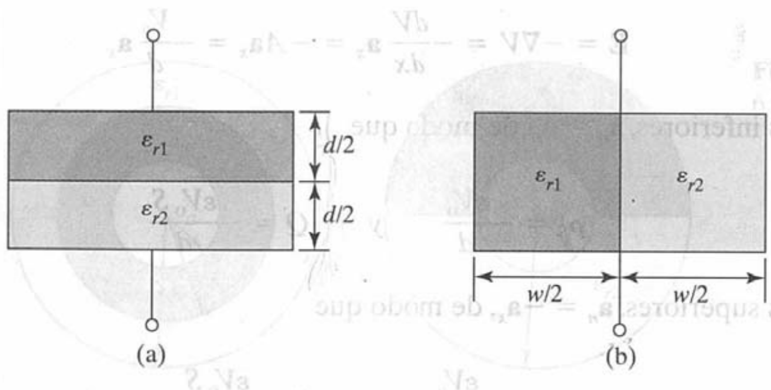


Figura 6.20. Para el ejemplo 6.12.

b) En este caso, **D** y **E** son paralelas a la interfaz dieléctrica. Podría inferirse, así, que el capacitor se compone de dos capacitores C_1 y C_2 en paralelo (circunstancia en la que C_1 y C_2 presentan el mismo voltaje), como los que aparecen en la figura 16.6*(b)*.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r1} S/2}{d} = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r1} S}{2d}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r2} S}{2d}$$

La capacitancia total es

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_o S}{2d}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})$$

$$= \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{30 \times 10^{-4}}{2 \cdot (5 \times 10^{-3})} \cdot 10 \tag{6.12.2}$$

$$C = 26.53 \text{ pF}$$

Adviértase que, cuando $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = \varepsilon_r$, las ecuaciones (6.12.1) y (6.12.2) son acordes con la ecuación (6.22), como era de esperar.

Ejercicio 6.12

Determine la capacitancia de 10 m de longitud de los capacitores cilíndricos que aparecen en la figura 6.19. Adopte $a = 1$ mm, $b = 3$ mm, $c = 2$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.5$ y $\varepsilon_{r2} = 3.5$.

Respuestas: *a)* 1.41 nF y *b)* 1.52 nF.

Ejemplo 6.13

Un capacitor cilíndrico tiene radios $a = 1$ cm y $b = 2.5$ cm. Si el espacio entre las placas está ocupado por un dieléctrico no homogéneo con $\varepsilon_r = (10 + \rho)/\rho$, donde ρ está en centímetros, halle la capacitancia por metro del capacitor.

Solución:

El procedimiento que debe seguirse en este caso es el mismo que se aplicó en la sección 6.5, salvo que la ecuación (6.27*a*) se convierte ahora en

$$V = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\rho L}\,d\rho = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\int_b^a \frac{d\rho}{\rho\left(\dfrac{10+\rho}{\rho}\right)}$$

$$= \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_o L}\int_b^a \frac{d\rho}{10+\rho} = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_o L}\ln(10+\rho)\Big|_b^a$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\ln\frac{10+b}{10+a}$$

Así, la capacitancia por metro es ($L = 1$ m)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln \dfrac{10 + b}{10 + a}} = 2\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{1}{\ln \dfrac{12.5}{11.0}}$$

$$C = 434.6 \text{ pF/m}$$

Ejercicio 6.13

Un capacitor esférico con $a = 1.5$ cm y $b = 4$ cm cuenta con un dieléctrico no homogéneo de $\varepsilon = 10\varepsilon_o/r$. Calcule la capacitancia del capacitor.

Respuesta: 1.13 nF.

6.6. Método de imágenes

Ideado por lord Kelvin en 1848, el método de imágenes es de uso frecuente para determinar V, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ y ρ_S debidas a cargas en presencia de conductores. Este método prescinde de la ecuación de Poisson o Laplace, pues se funda en el supuesto de una superficie conductora equipotencial. Aunque no es aplicable a cualquier problema electrostático, puede simplificar problemas muy complejos.

La **teoría de las imágenes** establece que una configuración de carga dada sobre un plano conductor perfecto e infinito conectado a tierra puede reemplazarse por la propia configuración de carga, su imagen y una superficie equipotencial en sustitución del plano conductor.

En la figura 6.21*(a)* se muestran ejemplos comunes de configuraciones de carga puntual, de línea y volumétrica, mientras que en la figura 6.21*(b)* aparecen sus correspondientes configuraciones de imagen.

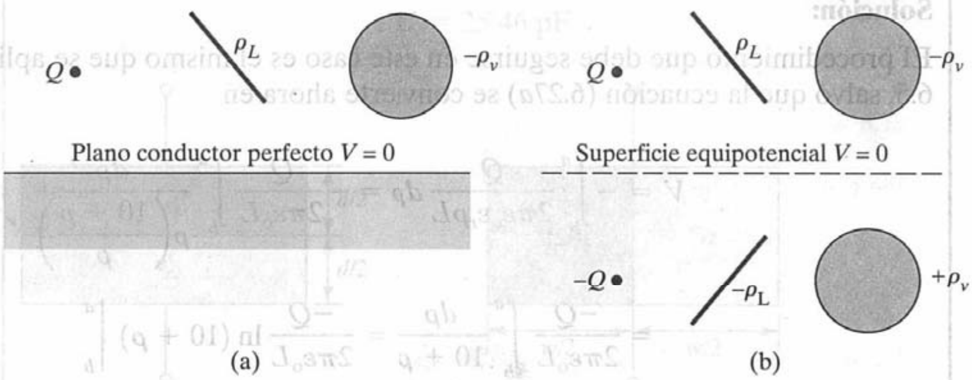


Figura 6.21. Sistema de imágenes: **(a)** configuraciones de carga sobre un plano conductor perfecto; **(b)** configuraciones de imágenes, en las que una superficie equipotencial reemplaza al plano conductor.

La aplicación del método de imágenes exige invariablemente el cumplimiento de dos condiciones:

1. La carga o cargas de imágenes deben situarse en la región conductora.
2. La carga o cargas de imágenes deben situarse de tal forma que en la superficie o superficies conductoras el potencial sea de cero o constante.

La primera condición es necesaria para satisfacer la ecuación de Poisson, en tanto que la segunda garantiza la satisfacción de las condiciones en la frontera. Apliquemos la teoría de las imágenes a dos problemas específicos.

A. Carga puntual sobre un plano conductor a tierra

Considérese una carga puntual Q colocada a una distancia h de un plano conductor perfecto de extensión infinita, como se observa en la figura 6.22*(a)*. La configuración de imágenes aparece en la figura 6.22*(b)*. El campo eléctrico en el punto $P(x, y, z)$ está dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \tag{6.40}$$

$$= \frac{Q\,\mathbf{r}_1}{4\pi\varepsilon_o r_1^3} + \frac{-Q\,\mathbf{r}_2}{4\pi\varepsilon_o r_2^3} \tag{6.41}$$

Los vectores de distancia $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ están dados por

$$\mathbf{r}_1 = (x, y, z) - (0, 0, h) = (x, y, z - h) \tag{6.42}$$

$$\mathbf{r}_2 = (x, y, z) - (0, 0, -h) = (x, y, z + h) \tag{6.43}$$

de manera que la ecuación (6.41) se convierte en

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z - h)\mathbf{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} - \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z + h)\mathbf{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{3/2}}\right] \tag{6.44}$$

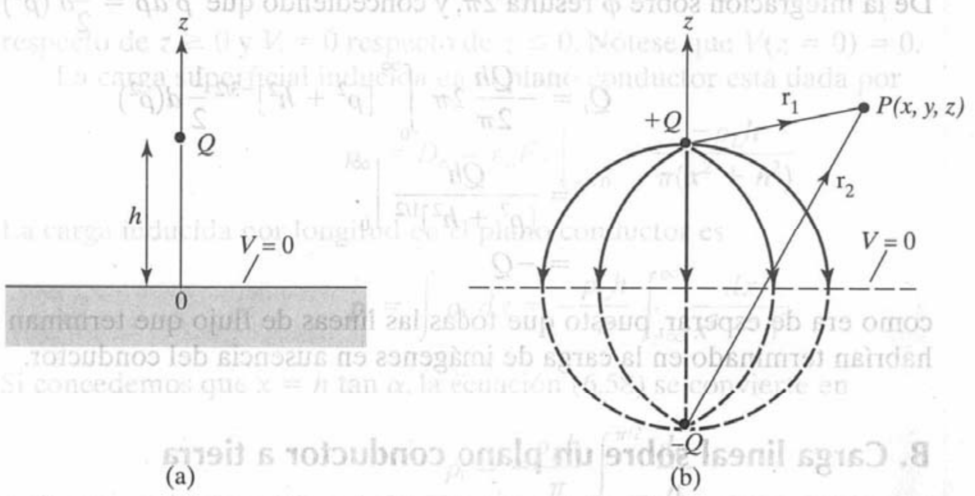


Figura 6.22. **(a)** Carga puntual y plano conductor a tierra; **(b)** configuración de imágenes y líneas de campo.

Cabe señalar que cuando $z = 0$, $\mathbf{E}$ sólo cuenta con la componente z, lo que confirma que $\mathbf{E}$ es normal a la superficie conductora.

El potencial en P se obtiene fácilmente de la ecuación (6.41) o (6.44) usando $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Así,

$$V = V_+ + V_-$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o r_2} \tag{6.45}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}}\right\}$$

respecto de $z \geq 0$ y $V = 0$ respecto de $z \leq 0$. Adviértase que $V(z = 0) = 0$.

La densidad de carga superficial de la carga inducida también puede obtenerse de la ecuación (6.44), en esta forma

$$\rho_S = D_n = \varepsilon_o E_n \bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{-Qh}{2\pi[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} \tag{6.46}$$

La carga inducida total sobre el plano conductor es

$$Q_i = \int \rho_S \, dS = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Qh \, dx \, dy}{2\pi[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} \tag{6.47}$$

Al cambiar variables, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $dx\,dy = \rho \, d\rho \, d\phi$.

$$Q_i = -\frac{Qh}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho \, d\rho \, d\phi}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \tag{6.48}$$

De la integración sobre ϕ resulta 2π, y concediendo que $\rho \, d\rho = \frac{1}{2} d(\rho^2)$ obtenemos

$$Q_i = -\frac{Qh}{2\pi} 2\pi \int_0^{\infty} [\rho^2 + h^2]^{-3/2} \frac{1}{2} d(\rho^2)$$

$$= \frac{Qh}{[\rho^2 + h^2]^{1/2}}\bigg|_0^{\infty} \tag{6.49}$$

$$= -Q$$

como era de esperar, puesto que todas las líneas de flujo que terminan en el conductor habrían terminado en la carga de imágenes en ausencia del conductor.

B. Carga lineal sobre un plano conductor a tierra

Considérese una carga infinita con densidad ρ_L C/m situada a una distancia h del plano conductor a tierra $z = 0$. El sistema de imágenes de la figura 6.22*(b)* también se aplica a la carga de línea, excepto que ρ_L reemplaza a Q. Es posible suponer que la carga de línea

infinita ρ_L se ubica en $x = 0, z = h$ y la imagen $-\rho_L$ en $x = 0, z = -h$, de manera que ambas son paralelas al eje y. El campo eléctrico en el punto P está dado (con base en la ecuación 4.21) por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \tag{6.50}$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho_1}\mathbf{a}_{\rho 1} + \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho_2}\mathbf{a}_{\rho 2} \tag{6.51}$$

Los vectores de distancia $\boldsymbol{\rho}_1$ y $\boldsymbol{\rho}_2$ están dados por

$$\boldsymbol{\rho}_1 = (x, y, z) - (0, y, h) = (x, 0, z - h) \tag{6.52}$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 = (x, y, z) - (0, y, -h) = (x, 0, z + h) \tag{6.53}$$

de modo que la ecuación (6.51) se convierte en

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\left[\frac{x\mathbf{a}_x + (z-h)\mathbf{a}_z}{x^2 + (z-h)^2} - \frac{x\mathbf{a}_x + (z+h)\mathbf{a}_z}{x^2 + (z+h)^2}\right] \tag{6.54}$$

También esta vez obsérvese que, cuando $z = 0$, $\mathbf{E}$ sólo cuenta con la componente z, lo que confirma que $\mathbf{E}$ es normal a la superficie conductora.

El potencial en P se obtiene de la ecuación (6.51) o (6.54) mediante $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Así,

$$V = V_+ + V_-$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\rho_1 - \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\rho_2 \tag{6.55}$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

La sustitución de $\rho_1 = |\boldsymbol{\rho}_1|$ y $\rho_2 = |\boldsymbol{\rho}_2|$ de las ecuaciones (6.52) y (6.53) en la ecuación (6.55) resulta en

$$V = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{x^2 + (z-h)^2}{x^2 + (z+h)^2}\right]^{1/2} \tag{6.56}$$

respecto de $z \geq 0$ y $V = 0$ respecto de $z \leq 0$. Nótese que $V(z = 0) = 0$.

La carga superficial inducida en el plano conductor está dada por

$$\rho_S = D_n = \varepsilon_o E_z\bigg|_{z=0} = \frac{-\rho_L h}{\pi(x^2 + h^2)} \tag{6.57}$$

La carga inducida por longitud en el plano conductor es

$$\rho_i = \int \rho_S\, dx = -\frac{\rho_L h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2 + h^2} \tag{6.58}$$

Si concedemos que $x = h\tan\alpha$, la ecuación (6.58) se convierte en

$$\rho_i = -\frac{\rho_L h}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\alpha}{h} \tag{6.59}$$

$$= -\rho_L$$

como era de esperar.

Ejemplo 6.14 Una carga puntual Q se localiza en el punto $(a, 0, b)$ entre dos planos conductores semiinfinitos que intersecan en ángulo recto, como se ilustra en la figura 6.23. Determine el potencial en el punto $P(x, y, z)$ y la fuerza sobre Q.

Solución:

La configuración de imágenes aparece en la figura 6.24. Tres cargas de imagen son necesarias para satisfacer las condiciones enunciadas en la sección 6.6. Con base en la figura 6.24*(a)*, el potencial en el punto $P(x, y, z)$ es la superposición de los potenciales en P debidos a las cuatro cargas puntuales; es decir,

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right]$$

donde

$$r_1 = [(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2]^{1/2}$$
$$r_2 = [(x+a)^2 + y^2 + (z-b)^2]^{1/2}$$
$$r_3 = [(x+a)^2 + y^2 + (z+b)^2]^{1/2}$$
$$r_4 = [(x-a)^2 + y^2 + (z+b)^2]^{1/2}$$

Con base en la figura 6.24*(b)*, la fuerza neta sobre Q es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$
$$= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o(2b)^2}\,\mathbf{a}_z - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o(2a)^2}\,\mathbf{a}_x + \frac{Q^2(2a\mathbf{a}_x + 2b\mathbf{a}_z)}{4\pi\varepsilon_o[(2a)^2 + (2b)^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left\{\left[\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2}\right]\mathbf{a}_x + \left[\frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2}\right]\mathbf{a}_z\right\}$$

El campo eléctrico debido a este sistema puede determinarse en forma similar; asimismo podría calcularse la carga inducida en los planos.

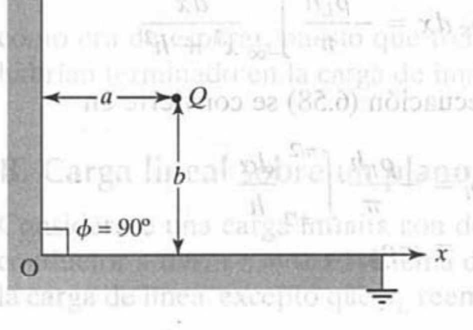


Figura 6.23. Carga puntual entre dos planos conductores semiinfinitos.

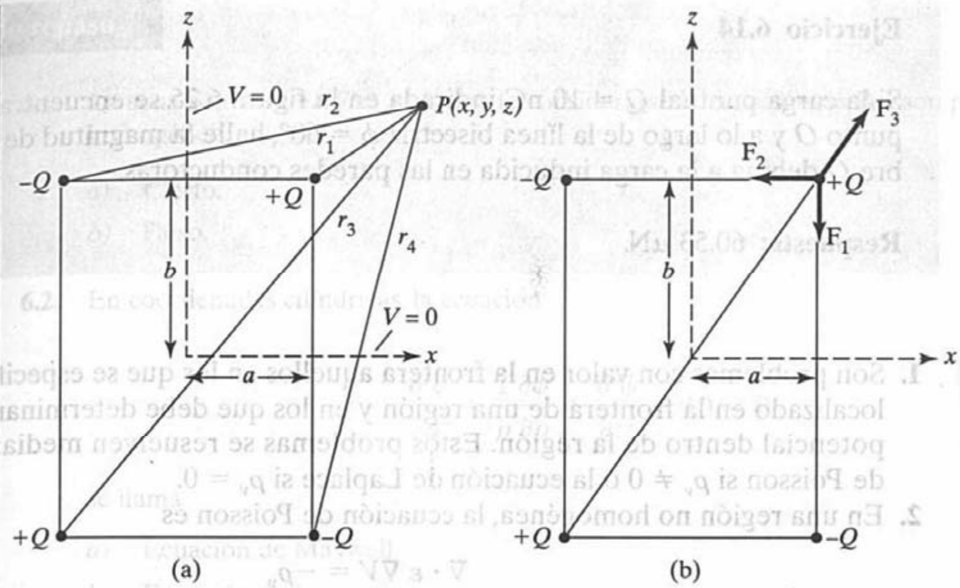


Figura 6.24. Determinación de **(a)** el potencial en P y **(b)** la fuerza sobre la carga Q.

En general, cuando el método de las imágenes se aplica a un sistema consistente en una carga puntual entre dos planos conductores semiinfinitos inclinados en un ángulo ϕ (en grados), el número de imágenes está dado por

$$\boxed{N = \left(\frac{360°}{\phi} - 1\right)}$$

puesto que la carga y sus imágenes se ubican en un círculo. Por ejemplo, cuando $\phi = 180°$, $N = 1$, como en el caso de la figura 6.22; cuando $\phi = 90°$, $N = 3$, como en el caso de la figura 6.23, y cuando $\phi = 60°$ es de esperar que $N = 5$, como se muestra en la figura 6.25.

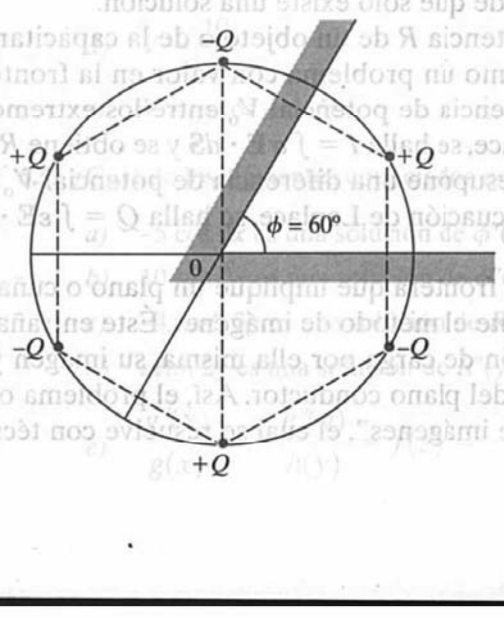


Figura 6.25. Carga puntual entre dos paredes conductoras semiinfinitas inclinadas en $\phi = 60°$ entre sí.

Ejercicio 6.14

Si la carga puntual $Q = 10$ nC indicada en la figura 6.25 se encuentra a 10 cm del punto O y a lo largo de la línea bisectriz $\phi = 60°$, halle la magnitud de la fuerza sobre Q debida a la carga inducida en las paredes conductoras.

Respuesta: 60.53 μN.

Resumen

1. Son problemas con valor en la frontera aquellos en los que se especifica el potencial localizado en la frontera de una región y en los que debe determinarse el campo de potencial dentro de la región. Estos problemas se resuelven mediante la ecuación de Poisson si $\rho_v \neq 0$ o la ecuación de Laplace si $\rho_v = 0$.
2. En una región no homogénea, la ecuación de Poisson es

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = -\rho_v$$

En una región homogénea, ε es independiente de las variables espaciales. Así, la ecuación de Poisson se convierte en

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

En una región sin carga ($\rho_v = 0$), la ecuación de Poisson se convierte en la ecuación de Laplace; es decir,

$$\nabla^2 V = 0$$

3. La ecuación diferencial que resulta de la ecuación de Poisson o de Laplace se resuelve integrando dos veces si V depende de una variable o por el método de separación de variables si V es una función de más de una variable. Posteriormente se aplican las condiciones en la frontera prescritas para obtener una solución única.
4. El teorema de unicidad establece que si V satisface la ecuación de Poisson o de Laplace y la condición en la frontera prescrita, V es la única solución posible del problema respectivo. Esto permite resolver un problema dado a través de cualquier medio conveniente, gracias a la certeza de que sólo existe una solución.
5. La determinación de la resistencia R de un objeto o de la capacitancia C de un capacitor puede concebirse como un problema con valor en la frontera. Para calcular R se presupone una diferencia de potencial V_o entre los extremos del objeto, se resuelve la ecuación de Laplace, se halla $I = \int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ y se obtiene $R = V_o/I$. Asimismo, para determinar C se presupone una diferencia de potencial V_o entre las placas del capacitor, se resuelve la ecuación de Laplace, se halla $Q = \int \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ y se obtiene $C = Q/V_o$.
6. Un problema con valor en la frontera que implique un plano o cuña conductor infinito puede resolverse mediante el método de imágenes. Éste entraña básicamente el reemplazo de la configuración de carga por ella misma, su imagen y una superficie equipotencial en sustitución del plano conductor. Así, el problema original es reemplazado por un "problema de imágenes", el cual se resuelve con técnicas explicadas en los capítulos 4 y 5.

Preguntas de repaso

6.1. La ecuación $\nabla \cdot (-\varepsilon \nabla V) = \rho_v$ puede considerarse la ecuación de Poisson para un medio no homogéneo.

a) Cierto.

b) Falso.

6.2. En coordenadas cilíndricas, la ecuación

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 10 = 0$$

se llama

a) Ecuación de Maxwell.

b) Ecuación de Laplace.

c) Ecuación de Poisson.

d) Ecuación de Helmholtz.

e) Ecuación de Lorentz.

6.3. Dos funciones de potencial V_1 y V_2 satisfacen la ecuación de Laplace dentro de una región cerrada y adoptan los mismos valores en la superficie de ésta. V_1 debe ser igual a V_2.

a) Cierto.

b) Falso.

c) No necesariamente.

6.4. ¿Cuál de los siguientes potenciales no satisface la ecuación de Laplace?

a) $V = 2x + 5$

b) $V = 10\,xy$

c) $V = r\cos\phi$

d) $V = \dfrac{10}{r}$

e) $V = \rho\cos\phi + 10$

6.5. ¿Cuál de los siguientes enunciados no es cierto?

a) $-5\cos 3x$ es una solución de $\phi''(x) + 9\phi(x) = 0$

b) 10 sen $2x$ es una solución de $\phi''(x) - 4\phi(x) = 0$

c) $-4\cosh 3y$ es una solución de $R''(y) - 9R(y) = 0$

d) senh $2y$ es una solución de $R''(y) - 4R(y) = 0$

e) $\dfrac{g''(x)}{g(x)} = -\dfrac{h''(y)}{h(y)} = f(z) = -1$, donde $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(y) = \operatorname{senh} y$

6.6. Si $V_1 = X_1Y_1$ es una solución de producto de la ecuación de Laplace, ¿cuáles de las siguientes no son soluciones de la ecuación de Laplace?

a) $-10X_1Y_1$

b) $X_1Y_1 + 2xy$

c) $X_1Y_1 - x + y$

d) $X_1 + Y_1$

e) $(X_1 - 2)(Y_1 + 3)$

6.7. La capacitancia de un capacitor rellenado con un dieléctrico lineal es independiente de la carga en las placas y de la diferencia de potencial entre éstas.

a) Cierto.

b) Falso.

6.8. Si un capacitor de placas paralelas conectado a una batería almacena el doble de carga con un dieléctrico dado que con aire como dieléctrico, la susceptibilidad del dieléctrico es

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

6.9. Tras aplicar una diferencia de potencial V_o a una columna de mercurio en un recipiente cilíndrico, el mercurio se vierte en otro recipiente cilíndrico de la mitad del radio de aquél, entre cuyos extremos se aplica la misma diferencia de potencial V_o. Como resultado de este cambio de espacio, la resistencia aumentará

a) 2 veces.

b) 4 veces.

c) 8 veces.

d) 16 veces.

6.10. Dos placas conductoras están inclinadas entre sí en un ángulo de 30° y entre ellas existe una carga puntual. El número de cargas de imagen es en este caso de

a) 12

b) 11

c) 6

d) 5

e) 3

Respuestas: 6.1*a*, 6.2*c*, 6.3*a*, 6.4*c*, 6.5*b*, 6.6*d*, *e*, 6.7*a*, 6.8*b*, 6.9*d*, 6.10*b*.

Problemas

6.1. En el vacío, $V = 6xy^2z + 8$. En el punto $P(1, 2, -5)$, halle $\mathbf{E}$ y ρ_v.

6.2. Dos placas conductoras de extensión infinita se localizan en $x = 1$ y $x = 4$. La distribución de carga del vacío que hay entre ellas es de $\dfrac{x}{6\pi}$ nC/m³. Halle V en $x = 2$ si $V(1) = -50$ V y $V(4) = 50$ V.

6.3. La región entre $x = 0$ y $x = d$ es vacío y tiene $\rho_v = \rho_o(x - d)/d$. Si $V(x = 0) = 0$ y $V(x = d) = V_o$, halle: *a)* V y $\mathbf{E}$, *b)* la densidad de carga superficial en $x = 0$ y $x = d$.

6.4. Demuestre que la solución exacta de la ecuación

$$\frac{d^2V}{dx^2} = f(x) \qquad 0 < x < L$$

sujeta a

$$V(x = 0) = V_1 \qquad V(x = L) = V_2$$

es

$$V(x) = \left[V_2 - V_1 - \int_0^L \int_0^\lambda f(\mu)\, d\mu\, d\lambda \right] \frac{x}{L} + V_1 + \int_0^x \int_0^\lambda f(\mu)\, d\mu\, d\lambda$$

6.5. Cierto material ocupa el espacio entre dos láminas conductoras localizadas en $y = \pm 2$ cm. Al calentarse, ese material emite electrones de tal manera que $\rho_v = 50(1 - y^2)\ \mu$C/m³. Si las láminas se mantienen en 30 kV, halle la distribución de potencial en ellas. Adopte $\varepsilon = 3\varepsilon_o$.

6.6. Determine cuáles de las siguientes distribuciones de campo de potencial satisfacen la ecuación de Laplace.

a) $V_1 = x^2 + y^2 - 2z^2 + 10$

b) $V_2 = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$

c) $V_3 = \rho z \operatorname{sen} \phi + \rho^2$

d) $V_4 = \dfrac{10 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{r^2}$

6.7 Demuestre que los potenciales siguientes satisfacen la ecuación de Laplace.

a) $V = e^{-5x} \cos 13y \operatorname{senh} 12z$

b) $V = \dfrac{z \cos \phi}{\rho}$

c) $V = \dfrac{30 \cos \theta}{r^2}$

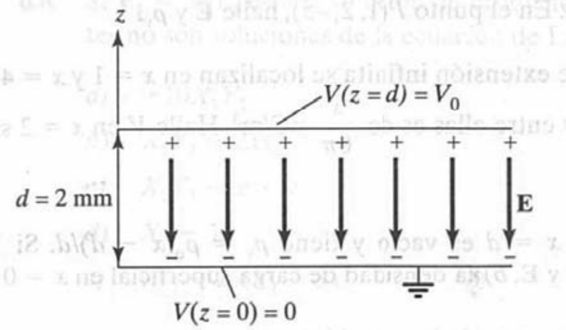


Figura 6.26. Para el problema 6.11.

6.8. Demuestre que $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ satisface la ecuación de Laplace.

6.9. Sea $V = (A \cos nx + B \operatorname{sen} nx)(Ce^{ny} + De^{-ny})$, donde A, B, C y D son constantes. Demuestre que V satisface la ecuación de Laplace.

6.10. El campo de potencial $V = 2x^2yz - y^3z$ existe en un medio dieléctrico con $\varepsilon = 2\varepsilon_o$. *a)* ¿$V$ satisface la ecuación de Laplace? *b)* Calcule la carga total dentro del cubo unitario $0 < x, y, z < 1$ m.

6.11. Considere las placas conductoras que aparecen en la figura 6.26. Si $V(z = 0) = 0$ y $V(z = 2 \text{ mm}) = 50$ V, determine V, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en la región dieléctrica ($\varepsilon_r = 1.5$) entre las placas y ρ_S en ellas.

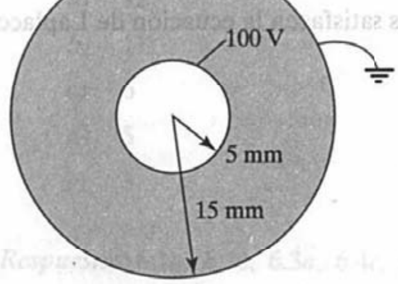
6.12. Los radios interno y externo del capacitor cilíndrico cuya sección transversal se presenta en la figura 6.27 son de 5 mm y 15 mm, respectivamente. Si $V(\rho = 5 \text{ mm}) = 100$ V y $V(\rho = 15 \text{ mm}) = 0$ V, calcule V, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en $\rho = 10$ mm y ρ_S en cada placa. Adopte $\varepsilon_r = 2.0$.

6.13. Cilindros concéntricos con $\rho = 2$ cm y $\rho = 6$ cm se mantienen en $V = 60$ V y $V = -20$ V, respectivamente. Calcule V, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en $\rho = 4$ cm.

6.14. La región entre los cascarones conductores esféricos concéntricos $r = 0.5$ m y $r = 1$ m está libre de carga. Si $V(r = 0.5) = -50$ V y $V(r = 1) = 50$ V, determine la distribución de potencial y la intensidad de campo eléctrico en la región entre los cascarones.

6.15. Halle V y $\mathbf{E}$ en (3, 0, 4) debidas a los dos conos conductores de extensión infinita que se muestran en la figura 6.28.

Figura 6.27. Capacitor cilíndrico del problema 6.12.



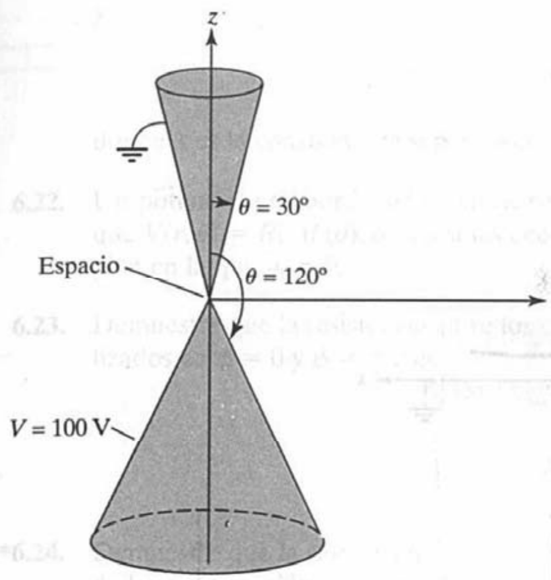


Figura 6.28. Conos conductores del problema 6.15.

***6.16.** Los electrodos interno y externo de un diodo son cilindros coaxiales de radio $a = 0.6$ m y $b = 30$ mm, respectivamente. El electrodo interno se mantiene en 70 V, mientras que el externo se conecta a tierra. *a)* Suponiendo que la longitud de los electrodos $\ell >> a, b$ e ignorando los efectos de la carga espacial, calcule el potencial en $\rho = 15$ mm. *b)* Si en el electrodo interno se inyecta radialmente un electrón a través de un pequeño orificio con una velocidad de 10^7 m/s, halle su velocidad en $\rho = 15$ mm.

6.17. Un método opcional para determinar la capacitancia de un capacitor consiste en emplear consideraciones de energía; es decir,

$$C = \frac{2W_E}{V_o^2} = \frac{1}{V_o^2}\int \varepsilon|\mathbf{E}|^2\, dv$$

Aplique este método para deducir las ecuaciones (6.22), (6.28) y (6.32).

6.18. Un electrodo de forma hiperbólica ($xy = 4$) es colocado sobre una esquina en ángulo recto conectada a tierra, como se ilustra en la figura 6.29. Calcule V y $\mathbf{E}$ en el punto $(1, 2, 0)$ cuando el electrodo se conecta a una fuente de 20 V.

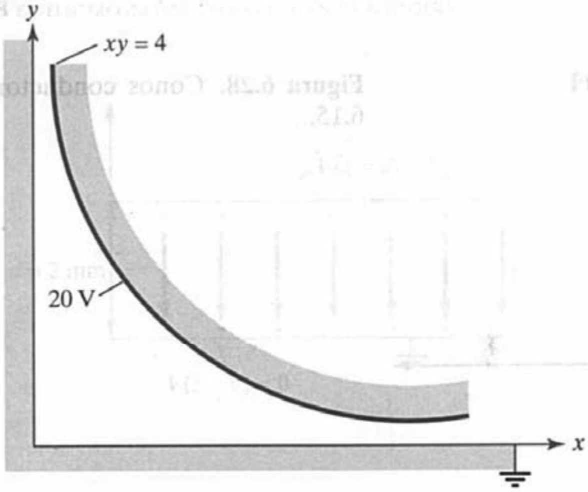
***6.19.** Resuelva la ecuación de Laplace con relación a los sistemas electrostáticos bidimensionales de la figura 6.30 y halle el potencial $V(x, y)$.

***6.20.** Halle el potencial $V(x, y)$ debido a los sistemas bidimensionales de la figura 6.31.

6.21. Si concedemos que $V(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ es la solución de la ecuación de Laplace en una región en la que $\rho \neq 0$, demuestre que las ecuaciones diferenciales separadas de R y Φ son

$$R'' + \frac{R'}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho^2}R = 0$$

Figura 6.29. Para el problema 6.18.



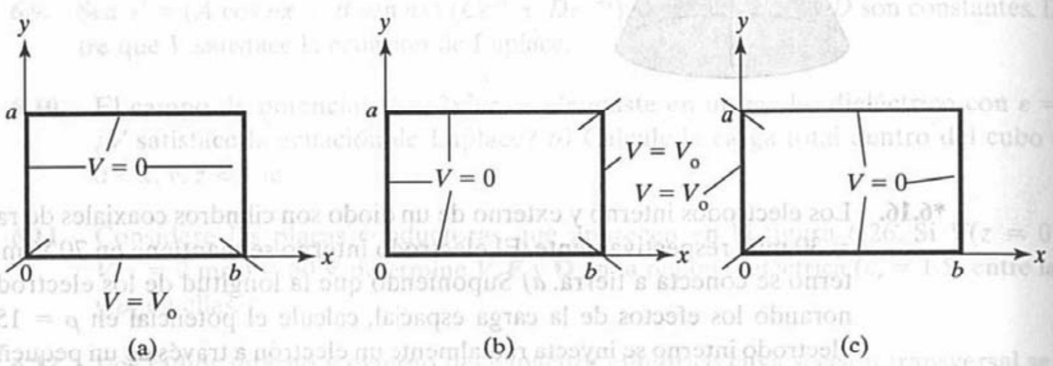


Figura 6.30. Para el problema 6.19.

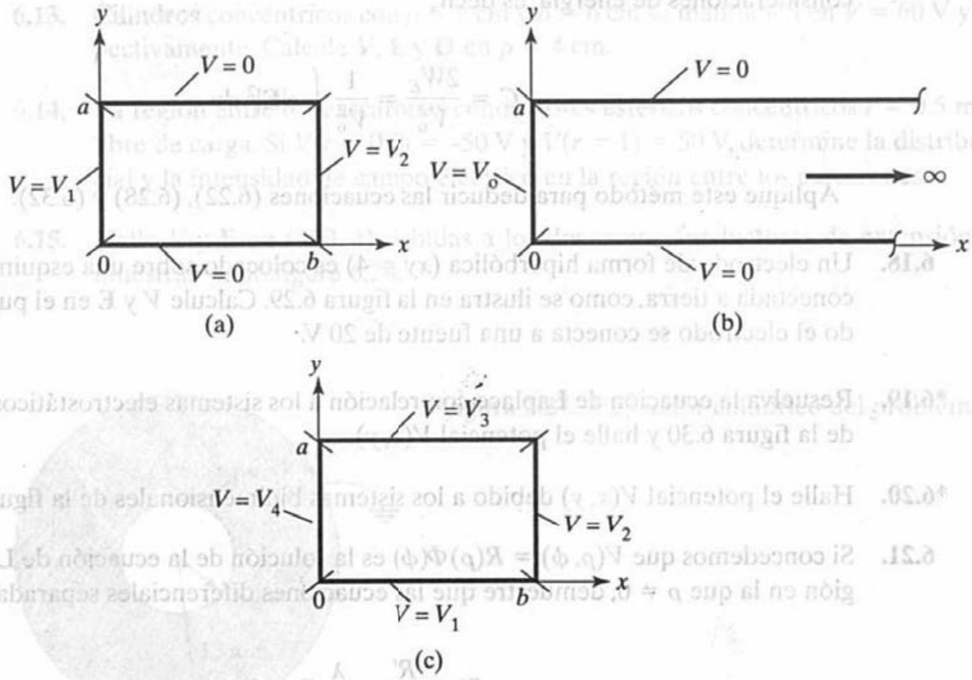


Figura 6.31. Para el problema 6.20.

y

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

donde λ es la constante de separación.

6.22. Un potencial en coordenadas esféricas es una función de r y θ, pero no de ϕ. Suponiendo que $V(r, \theta) = R(r)F(\theta)$, obtenga las ecuaciones diferenciales separadas de R y F en una región en la que $\rho_v = 0$.

6.23. Demuestre que la resistencia entre los extremos verticales de la barra de la figura 6.17 localizados en $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ es

$$R = \frac{\pi}{2\sigma t \ln b/a}$$

***6.24.** Demuestre que la resistencia del sector entre la base de un cascarón esférico de conductividad σ cuya sección transversal se muestra en la figura 6.32 (donde $0 \leq \phi < 2\pi$) es

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma(1 - \cos\alpha)}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

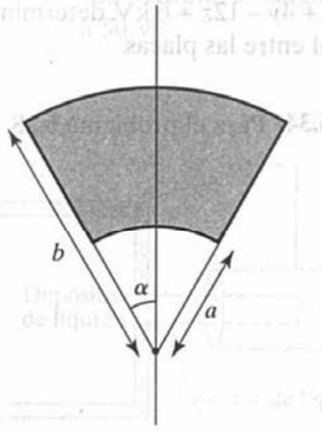
***6.25.** Un hemisferio conductor hueco de radio a está enterrado con la cara plana al ras de la superficie de la Tierra, de manera que sirve como electrodo a tierra. Si la conductividad de la tierra es σ, demuestre que la conductancia de dispersión entre el electrodo y la tierra es $2\pi a\sigma$.

6.26. En la figura 6.33 aparece la sección transversal de un fusible eléctrico. Calcule su resistencia considerando que es de cobre y que su grosor es de 1.5 mm.

6.27. El capacitor de un circuito integrado consta de una capa de dióxido de silicio ($\varepsilon_r = 4$) con grosor de 1 μm sobre un sustrato conductor de silicio y un recubrimiento de electrodo metálico de área S. Determine S si se desea una capacitancia de 2 nF.

6.28. La cuarta parte del capacitor de placas paralelas de la figura 6.34 está ocupada con mica ($\varepsilon_r = 6$). Determine la capacitancia del capacitor.

Figura 6.32. Para el problema 6.24.



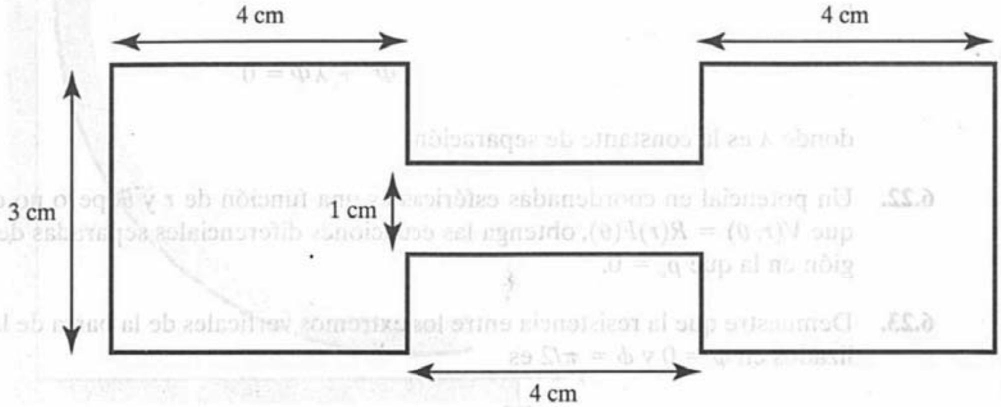


Figura 6.33. Para el problema 6.26.

***6.29.** Las placas paralelas de un capacitor relleno de aire, de longitud L y ancho a están separadas por una distancia d y se mantienen en una diferencia de potencial constante V_o. Si entre ellas se desliza una lámina dieléctrica de constante dieléctrica ε_r que se retira hasta dejar entre las placas una longitud x, como se indica en la figura 6.35, demuestre que la fuerza con la que la lámina vuelve a su posición original es

$$F = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\, a\, V_o^2}{2d}$$

6.30. El área de las placas paralelas de un capacitor es de 200 cm^2 y la separación entre ellas de 3 mm. La densidad de carga es de 1 μC/m^2, con aire como dieléctrico. Halle

a) La capacitancia del capacitor.

b) El voltaje entre las placas.

c) La fuerza de atracción entre las placas.

6.31. Dos placas conductoras situadas en $z = -2$ cm y $z = 2$ cm se mantienen en un potencial de 0 y 200 V, respectivamente. Suponiendo que están separadas por polipropileno ($\varepsilon = 2.25\varepsilon_o$), calcule: *a)* el potencial entre ellas, *b)* la densidad de carga superficial en ellas.

6.32. Dos placas conductoras paralelas están separadas por un material dieléctrico con $\varepsilon = 5.6\varepsilon_o$ y grosor de 0.64 mm. Supongamos que cada placa tiene un área de 80 cm^2. Si la distribución del campo de potencial entre ellas es $V = 3x + 4y - 12z + 6$ kV, determine: *a)* la capacitancia del capacitor, *b)* la diferencia de potencial entre las placas.

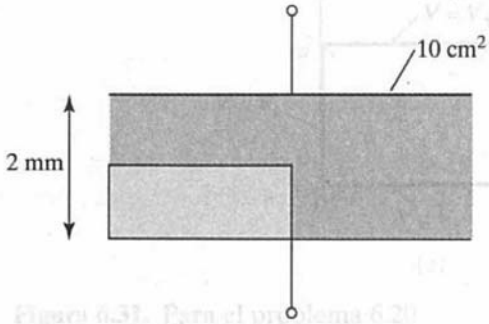


Figura 6.34. Para el problema 6.28.

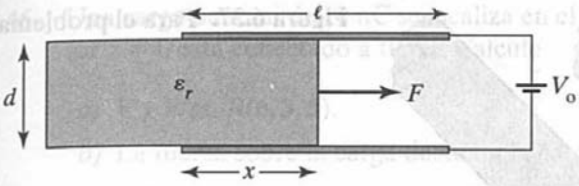


Figura 6.35. Para el problema 6.29.

6.33. El espacio entre dos cascarones conductores esféricos con $r = 5$ cm y $r = 10$ cm está ocupado por un material dieléctrico con $\varepsilon = 2.25\varepsilon_o$. Los cascarones se mantienen en una diferencia de potencial de 80 V. *a)* Halle la capacitancia del sistema. *b)* Calcule la densidad de carga en el cascarón $r = 5$ cm.

6.34. Cascarones concéntricos con $r = 20$ cm y $r = 30$ cm se mantienen en $V = 0$ y $V = 50$, respectivamente. Si el espacio entre ellos está ocupado por un material dieléctrico ($\varepsilon = 3.1\varepsilon_o$, $\sigma = 10^{-12}$ S/m), halle: *a)* V, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$, *b)* la densidad de carga en los cascarones, *c)* la resistencia de dispersión.

6.35. Un capacitor esférico tiene radio interno a y radio externo d. Situado entre los conductores esférico y concéntrico con ellos se halla un cascarón esférico de radio externo c y radio interno b. Si las regiones $d < r < c$, $c < r < b$ y $b < r < a$ están ocupadas por materiales con permitividad ε_1, ε_2 y ε_3, respectivamente, determine la capacitancia del sistema.

6.36. Calcule la capacitancia de una esfera conductora de 5 cm de radio sumergida en agua de mar ($\varepsilon_r = 80$).

6.37. Una esfera conductora de 2 cm de radio está circundada por una esfera conductora concéntrica de 5 cm de radio. Si el espacio entre ellas está ocupado por cloruro de sodio ($\varepsilon_r = 5.9$), calcule la capacitancia del sistema.

***6.38.** Las gotas de una impresora de inyección de tinta se cargan por el hecho de que el inyector, de 20 μm de radio, está encerrado por un cilindro concéntrico de 600 μm de radio, como se muestra en la figura 6.36. Calcule el voltaje mínimo requerido para generar una carga de 50 fC en las gotas si la longitud del inyector dentro del cilindro es de 100 μm. Adopte $\varepsilon = \varepsilon_o$.

6.39. Una longitud dada de cable, con capacitancia de 10 μF/km y resistencia de aislamiento de 100 MΩ/km, es cargada con un voltaje de 100 V. ¿Cuánto tiempo tardará éste en disminuir a 50 V?

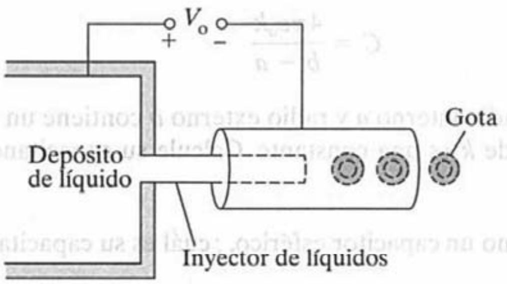


Figura 6.36. Forma geométrica simplificada de una impresora de inyección de tinta; para el problema 6.38.

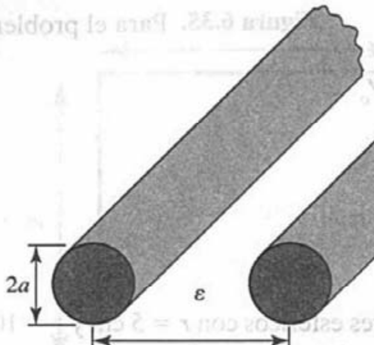


Figura 6.37. Para el problema 6.40.

6.40. La capacitancia por unidad de longitud de la línea de transmisión de dos alambres que aparece en la figura 6.37 está dada por

$$C = \frac{\pi \varepsilon}{\cosh^{-1}\left[\dfrac{d}{2a}\right]}$$

Determine la conductancia por unidad de longitud.

***6.41.** El conductor interno de radio a de un capacitor esférico porta una carga Q y se mantiene en un potencial de cero. Si, a causa de la fuerza interna, el radio del conductor externo se contrae de b a c, compruebe que el trabajo realizado por el campo eléctrico como resultado de la contracción es

$$W = \frac{Q^2(b - c)}{8\pi\varepsilon bc}$$

***6.42.** Las placas paralelas de un capacitor se sitúan en $x = 0, d$ y alojan entre ellas un material no homogéneo con permitividad $\varepsilon = \varepsilon_o\left(1 + \dfrac{x}{d}\right)$. Si la placa en $x = d$ se mantiene en V_o mientras que la placa en $x = 0$ está conectada a tierra, halle:

a) V y $\mathbf{E}$

b) $\mathbf{P}$

c) ρ_{ps} en $x = 0, d$

6.43. Un capacitor esférico con radio interno a y radio externo b contiene un dieléctrico no homogéneo con $\varepsilon = \varepsilon_o k/r^2$. Demuestre que su capacitancia es

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_o k}{b - a}$$

6.44. Un capacitor cilíndrico con radio interno a y radio externo b contiene un dieléctrico no homogéneo con $\varepsilon = \varepsilon_o k/\rho$, donde k es una constante. Calcule su capacitancia por unidad de longitud.

6.45. Si se considera a la Tierra como un capacitor esférico, ¿cuál es su capacitancia si su radio es de 6370 km?

6.46. Una carga puntual de 10 nC se localiza en el punto $P(0, 0, 3)$, mientras que el plano conductor $z = 0$ está conectado a tierra. Calcule

a) V y $\mathbf{E}$ en $R(6, 3, 5)$.

b) La fuerza sobre la carga debida a la carga inducida en el plano.

6.47. Dos cargas puntuales de 3 nC y –4 nC se sitúan en (0, 0, 1 m) y (0, 0, 2 m), respectivamente, en tanto que un plano conductor infinito se halla en $z = 0$. Determine

a) La carga total inducida en el plano.

b) La magnitud de la fuerza de atracción entre las cargas y el plano.

6.48. Dos cargas puntuales de 50 nC y –20 nC se localizan en (–3, 2, 4) y (1, 0, 5) sobre el plano conductor a tierra $z = 2$. Calcule *a)* la densidad de carga superficial en (7, –2, 2), *b)* $\mathbf{D}$ en (3, 4, 8) y *c)* $\mathbf{D}$ en (1, 1, 1).

***6.49.** Una carga puntual de 10 μC se ubica en (1, 1, 1) mientras que las porciones positivas de los planos coordenados están ocupadas por tres conductores planos mutuamente perpendiculares mantenidos en un potencial de cero. Halle la fuerza sobre la carga debida a los conductores.

6.50. Una carga puntual Q es colocada entre dos planos conductores que se intersecan entre sí, conectados a tierra y con una inclinación de 45° uno con otro. Determine el número de cargas de imagen y su ubicación.

6.51. La línea infinita $x = 3$, $z = 4$ porta 16 nC/m y se localiza en el vacío sobre el plano conductor $z = 0$. *a)* Halle $\mathbf{E}$ en (2, –2, 3). *b)* Calcule la densidad de carga superficial inducida en el plano conductor en (5, –6, 0).

6.52. En el vacío, los planos infinitos $y = 4$ y $y = 8$ portan cargas de 20 nC/m^2 y 30 nC/m^2, respectivamente. Si el plano $y = 2$ está conectado a tierra, calcule $\mathbf{E}$ en $P(0, 0, 0)$ y $Q(-4, 6, 2)$.

III MAGNETOSTÁTICA

7 Campos magnetostáticos

Ningún hombre honesto puede ser todo para todos.

ABRAHAM LINCOLN

7.1. Introducción

Tras haber dedicado los capítulos 4 a 6 a los campos eléctricos estáticos, caracterizados por **E** o **D**, ahora dirigiremos nuestra atención a los campos magnéticos estáticos, los cuales se caracterizan por **H** o **B**. Entre los campos eléctricos y magnéticos existen semejanzas y diferencias. Así como **E** y **D** se relacionan entre sí en el espacio material lineal de acuerdo con $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, **H** y **B** se relacionan entre sí de acuerdo con $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. En la tabla 7.1 se abunda en la analogía entre cantidades de los campos eléctricos y magnéticos. En este capítulo se presentarán algunas cantidades del campo magnético, y otras más en el siguiente. Tal analogía se incluye aquí para demostrar que la mayoría de las ecuaciones que hemos deducido en relación con los campos eléctricos pueden servir para obtener las correspondientes ecuaciones relativas a campos magnéticos con sólo sustituir las cantidades equivalentes. Esto revela que no se aprenderán nuevos conceptos.

Oersted[1] fijó en 1820 el vínculo definitivo entre los campos eléctricos y magnéticos. Como ya sabemos, un campo electrostático es producto de cargas estáticas o estacionarias. El movimiento de cargas a una velocidad constante produce a su vez un campo magnético estático (o magnetostático). Así, un campo magnetostático es producto de un flujo constante de corriente (o corriente directa). Tal flujo de corriente puede deberse a corrientes de magnetización, como en el caso de los imanes permanentes; a corrientes de haces de electrones, como en el caso de tubos al vacío, o a corrientes de conducción, como en el de alambres portadores de corriente. En este capítulo se examinarán campos magnéticos en el vacío debidos a corriente directa, y en el siguiente, campos magnetostáticos en el espacio material.

Nuestro estudio de la magnetostática no es un lujo prescindible, sino una necesidad indispensable. Los motores, transformadores, micrófonos, brújulas, timbres telefónicos, controles de enfoque de televisión, anuncios publicitarios, vehículos de alta velocidad de suspensión magnética, dispositivos para el almacenamiento de memoria, separadores magnéticos, etc., implican fenómenos magnéticos y son de enorme importancia en nuestra vida diaria.[2]

[1] Luego de 13 años de frustrantes esfuerzos, Hans Christian Oersted (1777-1851), profesor danés de física, descubrió que la electricidad puede producir magnetismo.

[2] En J. K. Watson, *Applications of Magnetism*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1980, se refieren diversas aplicaciones del magnetismo.

Tabla 7.1. Analogía entre campos eléctricos y magnéticos.*

Concepto	*Eléctrico*	*Magnético*
Leyes básicas	$\mathbf{F} = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\mathbf{a}_r$	$d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_o I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$
	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$
Ley de la fuerza	$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$
Elemento de origen	dQ	$Q\mathbf{u} = I\, d\mathbf{l}$
Intensidad de campo	$E = \dfrac{V}{\ell}$ (V/m)	$H = \dfrac{I}{\ell}$ (A/m)
Densidad de flujo	$\mathbf{D} = \dfrac{\Psi}{S}$ (C/m^2)	$\mathbf{B} = \dfrac{\Psi}{S}$ (Wb/m^2)
Relación entre campos	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
Potenciales	$\mathbf{E} = -\nabla V$	$\mathbf{H} = -\nabla V_m \ (\mathbf{J} = 0)$
	$V = \displaystyle\int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon r}$	$\mathbf{A} = \displaystyle\int \frac{\mu\, I\, d\mathbf{l}}{4\pi R}$
Flujo	$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
	$\Psi = Q = CV$	$\Psi = LI$
	$I = C\dfrac{dV}{dt}$	$V = L\dfrac{dI}{dt}$
Densidad de energía	$w_E = \dfrac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$w_m = \dfrac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
Ecuación de Poisson	$\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$	$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$

*Una analogía similar aparece en R. S. Elliot, "Electromagnetic theory: A simplified representation", en *IEEE Trans. Educ.*, vol. E-24, núm. 4, noviembre de 1981, pp. 294-296.

Son dos las principales leyes que rigen a los campos magnetostáticos: 1. la ley de Biot-Savart[3] y 2. la ley de los circuitos, de Ampère.[4] Como la de Coulomb de la electrostática, la ley de Biot-Savart es la ley general de la magnetostática; y como la ley de Gauss respecto de la de Coulomb, la ley de Ampère es un caso especial de la de Biot-Savart y es de fácil aplicación a problemas que implican una distribución simétrica de corriente. En este capítulo primero enunciaremos y aplicaremos las dos leyes de la magnetostática y después las deduciremos.

[3]Alrededor de 1820 Ampère y Jean-Baptiste Biot y Félix Savart realizaron experimentos y análisis del efecto de un elemento de corriente.

[4]André-Marie Ampère (1775-1836), físico francés, desarrolló el descubrimiento de Oersted y propuso los conceptos de elemento de corriente y fuerza entre elementos de corriente.

7.2. Ley de Biot-Savart

La **ley de Biot-Savart** establece que la intensidad diferencial de campo magnético $d\mathbf{H}$ producida en un punto P por el elemento diferencial de corriente $I\,dl$, como se muestra en la figura 7.1, es proporcional al producto de $I\,dl$ y el seno del ángulo α entre el elemento y la línea que une a P con el elemento e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia R entre P y el elemento.

Es decir,

$$dH = \frac{I\,dl \operatorname{sen} \alpha}{R^2} \tag{7.1}$$

o

$$dH = \frac{kI\,dl \operatorname{sen} \alpha}{R^2} \tag{7.2}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. En unidades del Sistema internacional (SI), $k = 1/4\pi$, de modo que la ecuación (7.2) se convierte en

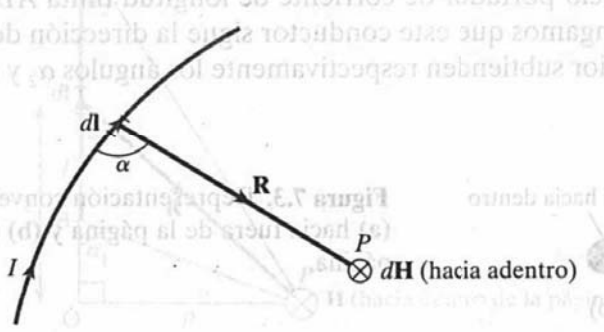
$$dH = \frac{I\,dl \operatorname{sen} \alpha}{4\pi R^2} \tag{7.3}$$

De la definición del producto cruz en la ecuación (1.21) se desprende fácilmente la conveniencia de expresar la ecuación (7.3) en forma vectorial

$$\boxed{d\mathbf{H} = \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}} \tag{7.4}$$

donde $R = |\mathbf{R}|$ y $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/R$. Así, la dirección de $d\mathbf{H}$ puede determinarse con la regla de la mano derecha, si el pulgar apunta en la dirección de la corriente, los dedos rodearán el alambre en la dirección de $d\mathbf{H}$, como se indica en la figura 7.2*(a)*, o con la regla del tornillo de rosca derecha, si el tornillo se coloca a lo largo del alambre y apuntando en la dirección del flujo de corriente, la dirección de su avance será la dirección de $d\mathbf{H}$, como se muestra en la figura 7.2*(b)*.

Figura 7.1. Campo magnético $d\mathbf{H}$ en P debido al elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$.



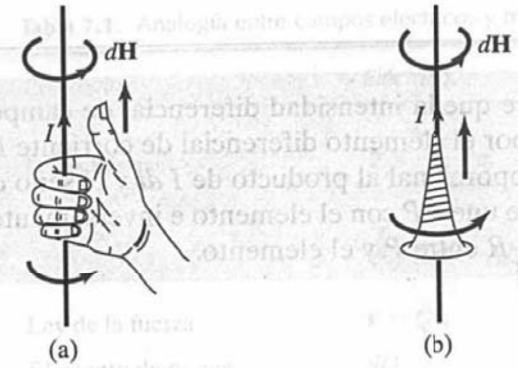


Figura 7.2. Determinación de la dirección de $d\mathbf{H}$ mediante **(a)** la regla de la mano derecha, **(b)** la regla del tornillo de rosca derecha.

La dirección de la intensidad de campo magnético **H** (o de la corriente I) suele representarse mediante un punto o una cruz dentro de un pequeño círculo, dependiendo de si aquélla sigue un curso hacia fuera o hacia dentro de la página, como se ilustra en la figura 7.3.

Así como existen diferentes configuraciones de carga (fig. 4.5), también existen diferentes distribuciones de corriente: corriente de línea, corriente superficial y corriente volumétrica, como se advierte en la figura 7.4. Si se define **K** como la densidad de corriente superficial (en amperes/metro) y **J** como la densidad de corriente volumétrica (en amperes/metro cuadrado), los elementos de origen se relacionan de la manera siguiente:

$$I\, d\mathbf{l} \equiv \mathbf{K}\, dS \equiv \mathbf{J}\, dv \tag{7.5}$$

De esta forma, en términos de las fuentes de corriente distribuida, la ley de Biot-Savart en la ecuación (7.4) se convierte en

$$\boxed{\mathbf{H} = \int_L \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}} \quad \text{(corriente de línea)} \tag{7.6}$$

$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K}\, dS \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad \text{(corriente superficial)} \tag{7.7}$$

$$\mathbf{H} = \int_v \frac{\mathbf{J}\, dv \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad \text{(corriente volumétrica)} \tag{7.8}$$

Como ejemplo, apliquemos la ecuación (7.6) para determinar el campo debido a un conductor filamentoso *recto* portador de corriente de longitud finita AB, como se muestra en la figura 7.5. Supongamos que este conductor sigue la dirección del eje z y que sus extremos superior e inferior subtienden respectivamente los ángulos α_2 y α_1 en P, el punto

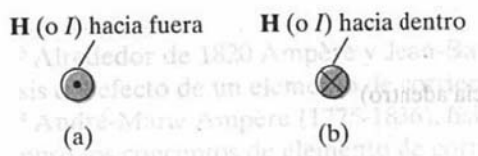


Figura 7.3. Representación convencional de **H** (o I) **(a)** hacia fuera de la página y **(b)** hacia dentro de la página.

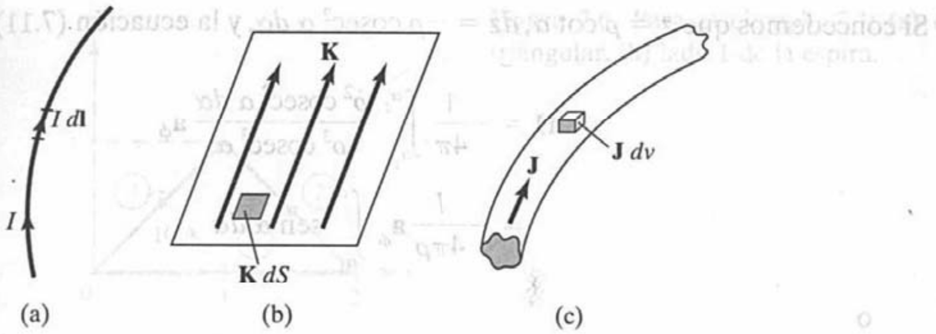


Figura 7.4. Distribuciones de corriente: **(a)** corriente lineal, **(b)** corriente superficial, **(c)** corriente volumétrica.

en el que se determinará **H**. Préstese particular atención a este supuesto, ya que la fórmula por deducir tendrá que aplicarse en consecuencia. Si consideramos la contribución $d\mathbf{H}$ en P debida a un elemento $d\mathbf{l}$ en $(0, 0, z)$,

$$d\mathbf{H} = \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \tag{7.9}$$

Pero $d\mathbf{l} = dz\, \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{R} = \rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z$, de modo que

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = \rho\, dz\, \mathbf{a}_\phi \tag{7.10}$$

Por tanto,

$$\mathbf{H} = \int \frac{I\rho\, dz}{4\pi[\rho^2 + z^2]^{3/2}}\, \mathbf{a}_\phi \tag{7.11}$$

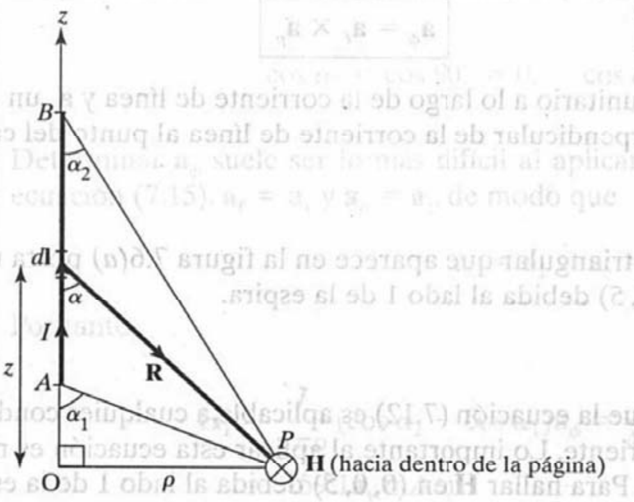


Figura 7.5. Campo en el punto P debido a un conductor filamentoso recto.

Si concedemos que $z = \rho \cot \alpha$, $dz = -\rho \operatorname{cosec}^2 \alpha \, d\alpha$, y la ecuación (7.11) se convierte en

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \, d\alpha}{\rho^3 \operatorname{cosec}^3 \alpha} \mathbf{a}_\phi$$

$$= -\frac{I}{4\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

o

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)\mathbf{a}_\phi} \tag{7.12}$$

Esta expresión se aplica en general a cualquier conductor filamentoso recto de longitud finita. Adviértase en la ecuación (7.12) que **H** siempre sigue la dirección del vector unitario $\mathbf{a}_\phi$ (es decir, de trayectorias circulares concéntricas) sin importar la longitud del alambre o el punto de interés P. En el caso especial de un conductor *semiinfinito* (respecto de P), en el que el punto A se ubica en $O(0, 0, 0)$ y el punto B en $(0, 0, \infty)$, $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 0°$, de modo que la ecuación (7.12) se convierte en

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \tag{7.13}$$

En el caso, también especial, de un conductor de longitud *infinita*, en el que el punto A se encuentra en $(0, 0, -\infty)$ y el punto B en $(0, 0, \infty)$, $\alpha_1 = 180°$, $\alpha_2 = 0°$, de manera que la ecuación (7.12) se reduce a

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi} \tag{7.14}$$

No siempre es fácil hallar el vector unitario $\mathbf{a}_\phi$ de las ecuaciones (7.12) a (7.14). Un método simple consiste en determinarlo a partir de

$$\boxed{\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\ell \times \mathbf{a}_\rho} \tag{7.15}$$

donde $\mathbf{a}_\ell$ es un vector unitario a lo largo de la corriente de línea y $\mathbf{a}_\rho$ un vector unitario a lo largo de la línea perpendicular de la corriente de línea al punto del campo.

Ejemplo 7.1 La espira conductora triangular que aparece en la figura 7.6*(a)* porta una corriente de 10 A. Halle **H** en (0, 0, 5) debida al lado 1 de la espira.

Solución:

Este ejemplo ilustra que la ecuación (7.12) es aplicable a cualquier conductor recto y angosto portador de corriente. Lo importante al aplicar esta ecuación es recordar cómo se deducen α_1, α_2, ρ y $\mathbf{a}_\phi$. Para hallar **H** en (0, 0, 5) debida al lado 1 de la espira de la figura

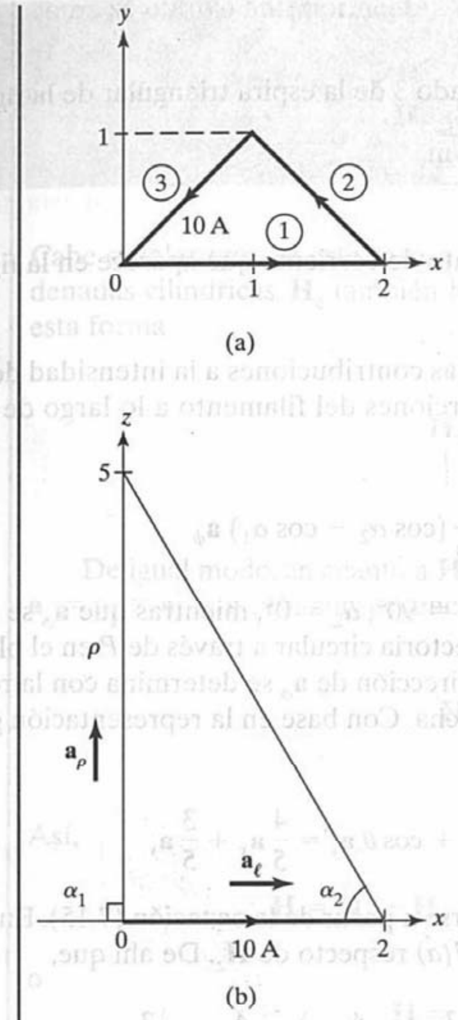


Figura 7.6. Para el ejemplo 7.1: **(a)** espira conductora triangular, **(b)** lado 1 de la espira.

7.6(*a*), considere la figura7.6(*b*), donde el lado 1 aparece como un conductor recto. Nótese que, en esta figura, el punto de interés (0, 0, 5) se ha unido con el principio y fin de la corriente de línea, así como que α_1, α_2 y ρ fueron asignados de la misma manera que en la figura 7.5, en la que se basa la ecuación (7.12).

$$\cos\alpha_1 = \cos 90° = 0, \qquad \cos\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{29}}, \qquad \rho = 5$$

Determinar $\mathbf{a}_\phi$ suele ser lo más difícil al aplicar la ecuación (7.12). De acuerdo con la ecuación (7.15), $\mathbf{a}_\ell = \mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_z$, de modo que

$$\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$$

Por tanto,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I}{4\pi\rho}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\mathbf{a}_\phi = \frac{10}{4\pi(5)}\left(\frac{2}{\sqrt{29}} - 0\right)(-\mathbf{a}_y)$$
$$= -59.1\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Ejercicio 7.1

Determine **H** en (0, 0, 5) debida al lado 3 de la espira triangular de la figura 7.6*(a)*.

Respuesta: $-30.63\mathbf{a}_x + 30.63\mathbf{a}_y$ mA/m.

Ejemplo 7.2

Halle **H** en (−3, 4, 0) debida al filamento de corriente que aparece en la figura 7.7*(a)*.

Solución:

Sea $\mathbf{H} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_z$, donde $\mathbf{H}_x$ y $\mathbf{H}_z$ son las contribuciones a la intensidad de campo magnético en $P(-3, 4, 0)$ debidas a las porciones del filamento a lo largo de x y z, respectivamente.

$$\mathbf{H}_z = \frac{I}{4\pi\rho}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,\mathbf{a}_\phi$$

En $P(-3, 4, 0)$, $\rho = (9 + 16)^{1/2} = 5$, $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 0°$, mientras que $\mathbf{a}_\phi$ se obtiene como un vector unitario a lo largo de la trayectoria circular a través de P en el plano $z = 0$, como se muestra en la figura 7.7*(b)*. La dirección de $\mathbf{a}_\phi$ se determina con la regla del tornillo de rosca derecha o de la mano derecha. Con base en la representación geométrica de la figura 7.7*(b)*,

$$\mathbf{a}_\phi = \text{sen}\,\theta\,\mathbf{a}_x + \cos\theta\,\mathbf{a}_y = \frac{4}{5}\mathbf{a}_x + \frac{3}{5}\mathbf{a}_y$$

Alternativamente, $\mathbf{a}_\phi$ puede determinarse a partir de la ecuación (7.15). En el punto P, $\mathbf{a}_\ell$ y $\mathbf{a}_\rho$ son como se ilustra en la figura 7.7*(a)* respecto de $\mathbf{H}_z$. De ahí que,

$$\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_z \times \left(-\frac{3}{5}\mathbf{a}_x + \frac{4}{5}\mathbf{a}_y\right) = \frac{4}{5}\mathbf{a}_x + \frac{3}{5}\mathbf{a}_y$$

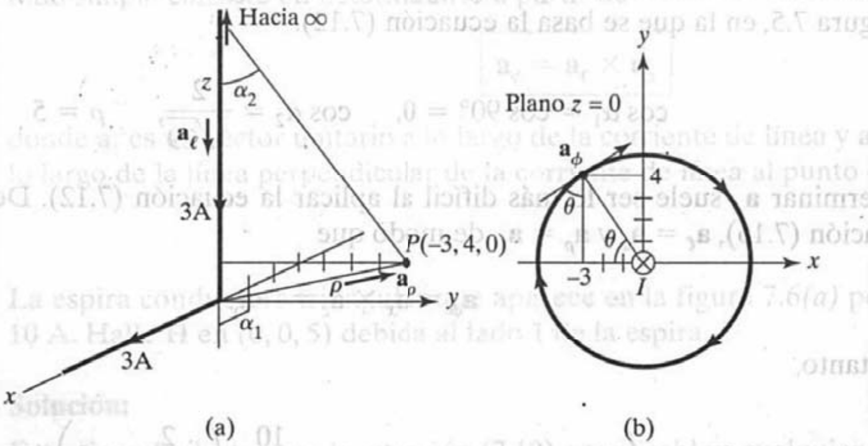


Figura 7.7. Para el ejemplo 7.2: **(a)** filamento de corriente a lo largo de los ejes semiinfinitos x y z; $\mathbf{a}_\ell$ y $\mathbf{a}_\rho$ respecto de $\mathbf{H}_z$ únicamente; **(b)** determinación de $\mathbf{a}_\rho$ respecto de $\mathbf{H}_z$.

como se obtuvo anteriormente. Así

$$\mathbf{H}_z = \frac{3}{4\pi(5)}(1-0)\frac{(4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y)}{5}$$

$$= 38.2\mathbf{a}_x + 28.65\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Cabe señalar que, en este caso, $\mathbf{a}_\phi$ es casualmente el negativo del $\mathbf{a}_\phi$ regular de las coordenadas cilíndricas. $\mathbf{H}_z$ también habría podido obtenerse en coordenadas cilíndricas, de esta forma

$$\mathbf{H}_z = \frac{3}{4\pi(5)}(1-0)(-\mathbf{a}_\phi)$$

$$= -47.75\mathbf{a}_\phi \text{ mA/m}$$

De igual modo, en cuanto a $\mathbf{H}_x$ en P, $\rho = 4$, $\alpha_2 = 0°$, $\cos\alpha_1 = 3/5$ y $\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$ o $\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\ell \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$. En consecuencia,

$$\mathbf{H}_x = \frac{3}{4\pi(4)}\left(1 - \frac{3}{5}\right)\mathbf{a}_z$$

$$= 23.88\ \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

Así,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_z = 38.2\mathbf{a}_x + 28.65\mathbf{a}_y + 23.88\mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

o

$$\mathbf{H} = -47.75\mathbf{a}_\phi + 23.88\mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

Obsérvese que aunque los filamentos de corriente parecen semiinfinitos (pues ocupan los ejes positivos z y x), sólo el filamento a lo largo del eje z es semiinfinito respecto del punto P. Así, $\mathbf{H}_z$ habría podido hallarse mediante la ecuación (7.13), no así $\mathbf{H}_x$, porque el filamento a lo largo del eje x no es semiinfinito respecto de P.

Ejercicio 7.2

El eje y positivo (línea semiinfinita respecto del origen) porta una corriente filamentosa de 2 A en la dirección de $-\mathbf{a}_y$. Suponga que ese eje forma parte de un circuito grande. Halle $\mathbf{H}$ en

a) $A(2, 3, 0)$

b) $B(3, 12, -4)$

Respuestas: *a)* $145.8\mathbf{a}_z$ mA/m y *b)* $48.97\mathbf{a}_x + 36.73\mathbf{a}_z$ mA/m.

Ejemplo 7.3

Una espira circular ubicada en $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ porta una corriente directa de 10 A a lo largo de $\mathbf{a}_\phi$. Determine $\mathbf{H}$ en (0, 0, 4) y (0, 0, −4).

Solución:

Considere la espira circular que aparece en la figura 7.8*(a)*. La intensidad de campo magnético $d\mathbf{H}$ en el punto $P(0, 0, h)$ debida al elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$ está dada por la ley de Biot-Savart:

$$d\mathbf{H} = \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

donde $d\mathbf{l} = \rho\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$, $\mathbf{R} = (0, 0, h) - (x, y, 0) = -\rho \mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z$ y

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ 0 & \rho\, d\phi & 0 \\ -\rho & 0 & h \end{vmatrix} = \rho h\, d\phi\, \mathbf{a}_\rho + \rho^2\, d\phi\, \mathbf{a}_z$$

Por tanto,

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}}(\rho h\, d\phi\, \mathbf{a}_\rho + \rho^2\, d\phi\, \mathbf{a}_z) = dH_\rho\, \mathbf{a}_\rho + dH_z\, \mathbf{a}_z$$

Por simetría, las contribuciones a lo largo de $\mathbf{a}_\rho$ resultan en cero, ya que las componentes radiales producidas por pares de elementos de corriente separados en un ángulo de 180° se anulan. Esto también puede demostrarse matemáticamente, por medio de la expresión de $\mathbf{a}_\rho$ en el sistema de coordenadas rectangulares (es decir, $\mathbf{a}_\rho = \cos\phi\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_y$).

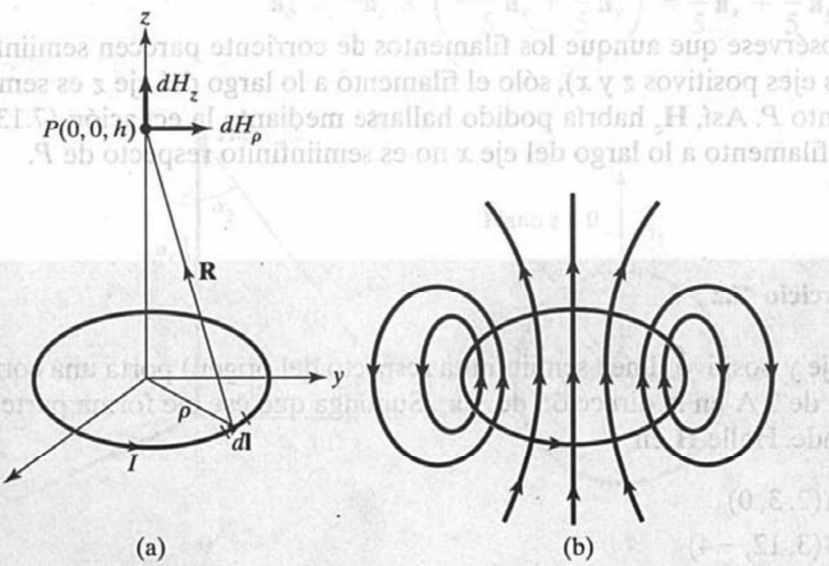


Figura 7.8. Para el ejemplo 7.3: **(a)** espira de corriente circular, **(b)** líneas de flujo debidas a la espira de corriente.

La integración de $\cos\phi$ o $\operatorname{sen}\phi$ sobre $0 \leq \phi \leq 2\pi$ da cero, lo que demuestra que $\mathbf{H}_\rho = 0$. Así,

$$\mathbf{H} = \int dH_z\mathbf{a}_z = \int_0^{2\pi} \frac{I\rho^2\, d\phi\, \mathbf{a}_z}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{I\rho^2 2\pi\mathbf{a}_z}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

o

$$\mathbf{H} = \frac{I\rho^2\mathbf{a}_z}{2[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

a) La sustitución de $I = 10\ A, \rho = 3, h = 4$ produce

$$\mathbf{H}(0, 0, 4) = \frac{10\,(3)^2\,\mathbf{a}_z}{2[9 + 16]^{3/2}} = 0.36\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

b) Si en $d\mathbf{l} \times \mathbf{R}$, líneas atrás, h se reemplaza por $-h$, la componente z de $d\mathbf{H}$ se mantiene igual, mientras que la componente ρ sigue resultando en cero, a causa de la simetría axial del circuito. Por consiguiente,

$$\mathbf{H}(0, 0, -4) = \mathbf{H}(0, 0, 4) = 0.36\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

En la figura 7.8*(b)* se representan gráficamente las líneas de flujo debidas a la espira de corriente circular.

Ejercicio 7.3

Un anillo angosto de 5 cm de radio se sitúa en el plano $z = 1$ cm, con su centro en (0, 0, 1 cm). Si porta 50 mA a lo largo de $\mathbf{a}_\phi$, halle $\mathbf{H}$ en

a) (0, 0, −1 cm)
b) (0, 0, 10 cm)

Respuestas: *a)* 400$\mathbf{a}_z$ mA/m y *b)* 57.3$\mathbf{a}_z$ mA/m.

Ejemplo 7.4

Un solenoide de longitud ℓ y radio a consta de N vueltas de alambre portador de corriente I. Demuestre que en el punto P a lo largo de su eje,

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\mathbf{a}_z$$

donde $n = N/\ell$, θ_1 y θ_2 son los ángulos subtendidos en P por las vueltas en el extremo, como se ilustra en la figura 7.9. Demuestre asimismo que si $\ell >> a$, en el centro del solenoide,

$$\mathbf{H} = nI\mathbf{a}_z$$

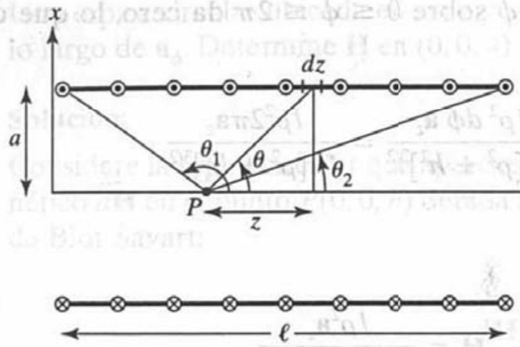


Figura 7.9. Para el ejemplo 7.4; sección transversal de un solenoide.

Solución:

Considérese la sección transversal del solenoide que aparece en la figura 7.9. Puesto que éste consta de espiras circulares, se aplica el resultado del ejemplo 7.3. La contribución al campo magnético H en P por un elemento del solenoide de longitud dz es

$$dH_z = \frac{I\,dl\,a^2}{2[a^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{Ia^2n\,dz}{2[a^2 + z^2]^{3/2}}$$

donde $dl = n\,dz = (N/\ell)\,dz$. Con base en la figura 7.9, $\tan\theta = a/z$; es decir,

$$dz = -a\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta = -\frac{[z^2 + a^2]^{3/2}}{a^2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Por tanto,

$$dH_z = -\frac{nI}{2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

o

$$H_z = -\frac{nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Así,

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\mathbf{a}_z$$

como se solicitó. La sustitución de $n = N/\ell$ da como resultado

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\ell}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\mathbf{a}_z$$

En el centro del solenoide,

$$\cos\theta_2 = \frac{\ell/2}{[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}} = -\cos\theta_1$$

y

$$\mathbf{H} = \frac{In\ell}{2[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}}\,\mathbf{a}_z$$

Si $\ell \gg a$ o $\theta_2 \simeq 0°, \theta_1 \simeq 180°$,

$$\mathbf{H} = nI\mathbf{a}_z = \frac{NI}{\ell}\,\mathbf{a}_z$$

Ejercicio 7.4

Si el solenoide de la figura 7.9 consta de 2000 vueltas, tiene 75 cm de largo y 5 cm de radio y porta una corriente de 50 mA a lo largo de $\mathbf{a}_\phi$, halle **H** en

a) (0, 0, 0)
b) (0, 0, 75 cm)
c) (0, 0, 50 cm)

Respuestas: *a)* $66.52\mathbf{a}_z$ A/m, *b)* $66.52\mathbf{a}_z$ A/m y *c)* $131.7\mathbf{a}_z$ A/m.

7.3. Ley de los circuitos de Ampère. Ecuación de Maxwell

La **ley de los circuitos de Ampère** establece que la integral de línea de la componente tangencial de **H** alrededor de una trayectoria *cerrada* es igual a la corriente neta I_{enc} encerrada por esa trayectoria.

En otras palabras, la circulación de **H** es igual a I_{enc}; es decir,

$$\boxed{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc}} \tag{7.16}$$

Similar a la de Gauss, la ley de Ampère es de fácil aplicación para determinar **H** cuando la distribución de corriente es simétrica. La ecuación (7.16) mantiene validez aun si la distribución de corriente no es simétrica, pero sólo puede usarse para determinar **H** en el caso contrario. La ley de Ampère es un caso especial de la de Biot-Savart, de la cual es posible deducirla.

Al aplicar el teorema de Stokes al miembro izquierdo de la ecuación (7.16) se obtiene

$$I_{enc} = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \tag{7.17}$$

Pero

$$I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{7.18}$$

La comparación de las integrales de superficie de las ecuaciones (7.17) y (7.18) revela claramente que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \tag{7.19}$$

Ésta es la tercera ecuación de Maxwell por deducir; se trata en esencia de la ley de Ampère en forma diferencial (o puntual), mientras que la ecuación (7.16) es la forma integral. En cuanto a la ecuación (7.19), cabe señalar que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$; esto es, que el campo magnetostático no es conservativo.

7.4. Aplicaciones de la ley de Ampère

Apliquemos ahora la ley de los circuitos de Ampère para determinar **H** en algunas distribuciones simétricas de corriente, como hicimos con la ley de Gauss. Consideraremos una corriente de línea infinita, una lámina infinita de corriente y una línea de transmisión coaxial de longitud infinita.

A. Corriente de línea infinita

Considérese una corriente filamentosa I de longitud infinita a lo largo del eje z, como se muestra en la figura 7.10. Para determinar **H** en un punto de observación P, aceptamos que por P pasa una trayectoria cerrada, a la que aplicaremos la ley de Ampère y la cual recibe el nombre de *trayectoria amperiana* (análogo al de *superficie gaussiana*). Elegimos como trayectoria amperiana un círculo concéntrico en vista de la ecuación (7.14), que demuestra que **H** es constante siempre que ρ sea constante. Puesto que esta trayectoria encierra a la corriente I en su totalidad, de acuerdo con la ley de Ampère

$$I = \int H_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \rho \, d\phi \, \mathbf{a}_\phi = H_\phi \int \rho \, d\phi = H_\phi \cdot 2\pi\rho$$

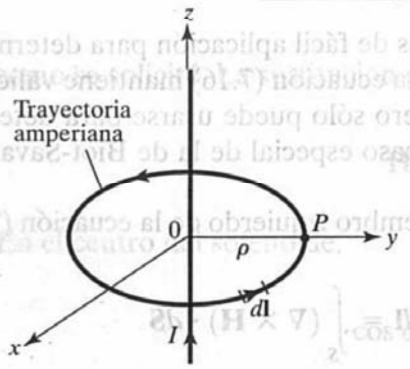


Figura 7.10. Aplicación de la ley de Ampère a una corriente de línea filamentosa infinita.

o

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\phi} \tag{7.20}$$

como era de esperar de la ecuación (7.14).

B. Lámina infinita de corriente

Considérese una lámina infinita de corriente en el plano $z = 0$. Si aquélla presenta una densidad de corriente uniforme $\mathbf{K} = K_y\mathbf{a}_y$ A/m, como se muestra en la figura 7.11, la aplicación de la ley de Ampère a la trayectoria rectangular cerrada (trayectoria amperiana) resulta en

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{enc} = K_y b \tag{7.21a}$$

A fin de evaluar la integral, antes es preciso hacerse una idea de la forma de **H**. Para conseguirlo, es posible suponer que la lámina infinita se compone de filamentos; así, $d\mathbf{H}$ sobre o bajo la lámina debida a un par de corrientes filamentosas puede hallarse mediante las ecuaciones (7.14) y (7.15). Como se evidencia en la figura 7.11*(b)*, la $d\mathbf{H}$ resultante sólo posee la componente x. Asimismo, **H** en un lado de la lámina es la negativa de la ubicada en el otro lado. A causa de la infinita extensión de la lámina, ésta puede concebirse como compuesta por tales pares filamentosos, de manera que las características de **H** en un par son las mismas que las de las láminas infinitas de corriente; es decir,

$$\mathbf{H} = \begin{cases} H_o\mathbf{a}_x & z > 0 \\ -H_o\mathbf{a}_x & z < 0 \end{cases} \tag{7.21b}$$

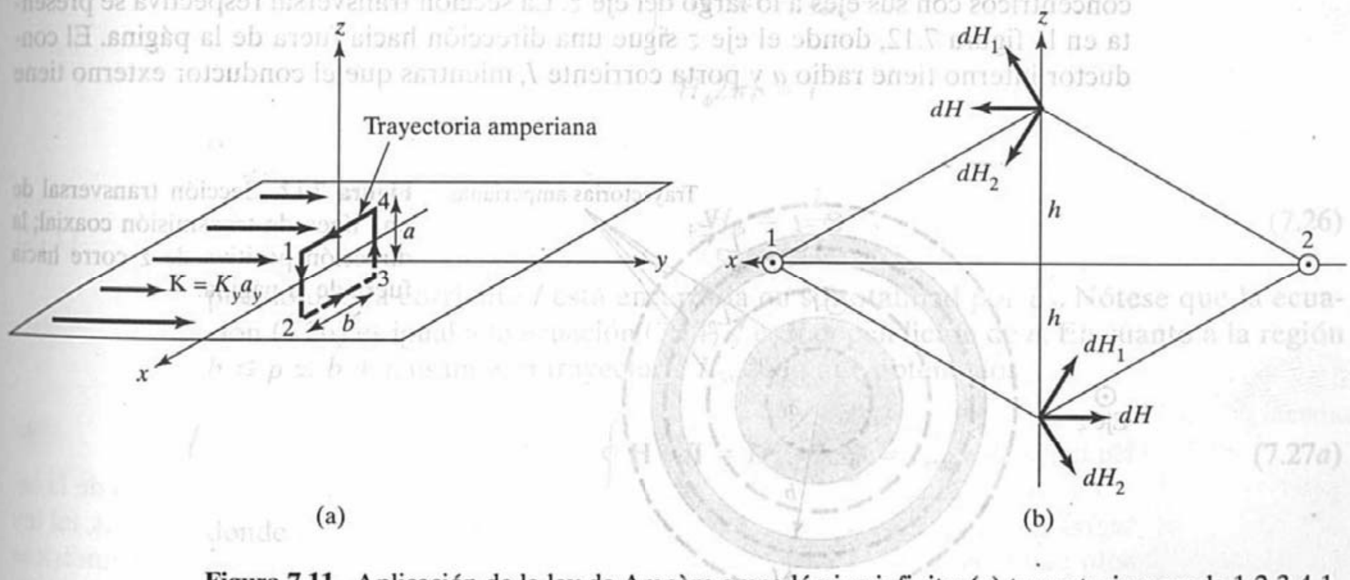


Figura 7.11. Aplicación de la ley de Ampère a una lámina infinita: **(a)** trayectoria cerrada 1-2-3-4-1, **(b)** par simétrico de filamentos de corriente con corriente a lo largo de $\mathbf{a}_y$.

donde H_o aún está por determinarse. La evaluación de la integral de línea de **H** de la ecuación (7.21*b*) a lo largo de la trayectoria cerrada de la figura 7.11*(a)* da como resultado

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \left(\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1\right)\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$$
$$= 0(-a) + (-H_o)(-b) + 0(a) + H_o(b) \tag{7.21c}$$
$$= 2H_o b$$

A partir de las ecuaciones (7.21*a*) y (7.21*c*) obtenemos $H_o = \frac{1}{2}K_y$. La sustitución de H_o en la ecuación (7.21*b*) resulta en

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{1}{2}K_y\mathbf{a}_x, & z > 0 \\ -\frac{1}{2}K_y\mathbf{a}_x, & z < 0 \end{cases} \tag{7.22}$$

En general, en el caso de una lámina infinita de densidad de corriente **K** A/m,

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K}\times\mathbf{a}_n} \tag{7.23}$$

donde $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal dirigido de la lámina de corriente al punto de interés.

C. Línea de transmisión coaxial de longitud infinita

Considérese una línea de transmisión de longitud infinita consistente en dos cilindros concéntricos con sus ejes a lo largo del eje *z*. La sección transversal respectiva se presenta en la figura 7.12, donde el eje *z* sigue una dirección hacia fuera de la página. El conductor interno tiene radio *a* y porta corriente *I*, mientras que el conductor externo tiene

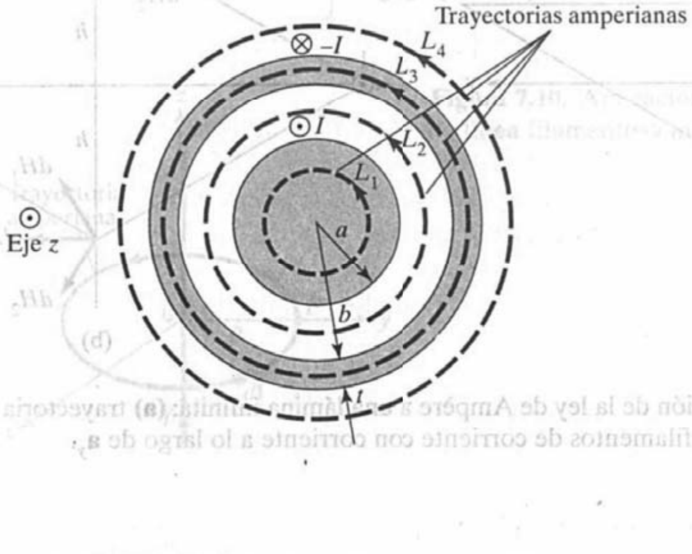


Figura 7.12. Sección transversal de una línea de transmisión coaxial; la dirección positiva de *z* corre hacia fuera de la página.

un radio interno b y grosor t y porta una corriente de retorno $-I$. Se desea determinar **H** en cualquier punto partiendo del supuesto de que la corriente está uniformemente distribuida en ambos conductores. Puesto que la distribución de corriente es simétrica, se aplica la ley de Ampère a lo largo de la trayectoria amperiana en referencia a cada una de las cuatro posibles regiones: $0 \leq \rho \leq a, a \leq \rho \leq b, b \leq \rho \leq b + t$, y $\rho \geq b + t$.

En el caso de la región $0 \leq \rho \leq a$, se aplica la ley de Ampère a la trayectoria L_1, de lo que resulta

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{7.24}$$

Puesto que la corriente está uniformemente distribuida en la sección transversal,

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2}\,\mathbf{a}_z, \qquad d\mathbf{S} = \rho\, d\phi\, d\rho\, \mathbf{a}_z$$

$$I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\pi a^2} \int\!\!\int \rho\, d\phi\, d\rho = \frac{I}{\pi a^2}\, \pi \rho^2 = \frac{I\rho^2}{a^2}$$

Por tanto, la ecuación (7.24) se convierte en

$$H_\phi \int dl = H_\phi\, 2\pi\rho = \frac{I\rho^2}{a^2}$$

o

$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \tag{7.25}$$

Respecto de la región $a \leq \rho \leq b$, usamos la trayectoria L_2 como la trayectoria amperiana,

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = I$$

$$H_\phi 2\pi\rho = I$$

o

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \tag{7.26}$$

puesto que la corriente I está encerrada en su totalidad por L_2. Nótese que la ecuación (7.26) es igual a la ecuación (7.14) y es independiente de a. En cuanto a la región $b \leq \rho \leq b + t$, usamos la trayectoria L_3, de lo que obtenemos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\phi \cdot 2\pi\rho = I_{\text{enc}} \tag{7.27a}$$

donde

$$I_{\text{enc}} = I + \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

y **J** es en este caso la densidad de corriente (corriente por unidad de área) del conductor externo y se halla a lo largo de $-\mathbf{a}_z$; es decir,

$$\mathbf{J} = \frac{-I}{\pi[(b+t)^2 - b^2]}\,\mathbf{a}_z$$

Así,

$$I_{\text{enc}} = I - \frac{I}{\pi[(b+t)^2 - t^2]} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=b}^{\rho} \rho\, d\rho\, d\phi$$

$$= I\left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt}\right]$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación (7.27*a*) produce

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt}\right] \tag{7.27b}$$

En el caso de la región $\rho \geq b + t$, usamos la trayectoria L_4 y obtenemos

$$\oint_{L_4} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I - I = 0$$

o

$$H_\phi = 0 \tag{7.28}$$

La reunión de las ecuaciones (7.25) a (7.28) da como resultado

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \dfrac{I\rho}{2\pi a^2}\,\mathbf{a}_\phi, & 0 \leq \rho \leq a \\[2ex] \dfrac{I}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\phi, & a \leq \rho \leq b \\[2ex] \dfrac{I}{2\pi\rho}\left[1 - \dfrac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt}\right]\mathbf{a}_\phi, & b \leq \rho \leq b + t \\[2ex] 0, & \rho \geq b + t \end{cases} \tag{7.29}$$

En la figura 7.13 se ofrece una representación gráfica de la magnitud de **H**.

De estos ejemplos se desprende que la posibilidad de extraer a **H** del signo de la integral es la clave al usar la ley de Ampère para determinar **H**. En otras palabras, tal ley sólo puede emplearse para calcular **H** cuando ésta se debe a distribuciones simétricas de corriente, en las cuales es posible hallar una trayectoria cerrada en la que **H** sea de magnitud constante.

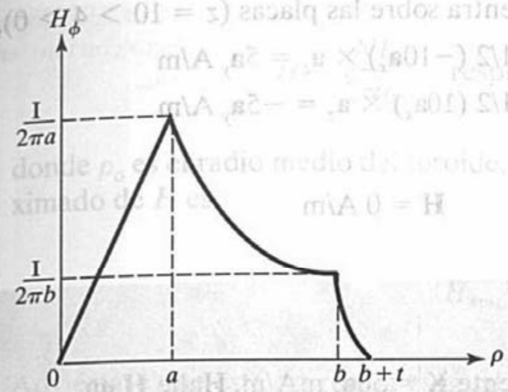


Figura 7.13. Diagrama de H_ϕ contra ρ.

Ejemplo 7.5

Los planos $z = 0$ y $z = 4$ portan corrientes $\mathbf{K} = -10\mathbf{a}_x$ A/m y $\mathbf{K} = 10\mathbf{a}_x$ A/m, respectivamente. Determine $\mathbf{H}$ en

a) (1, 1, 1)
b) (0, −3, 10)

Solución:
Concedamos que la figura 7.14 representa a las láminas paralelas de corriente de este ejemplo. Asimismo, sea

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o + \mathbf{H}_4$$

donde $\mathbf{H}_o$ y $\mathbf{H}_4$ son las contribuciones debidas a las láminas de corriente $z = 0$ y $z = 4$, respectivamente. Así, emplearemos la ecuación (7.23).

a) En (1, 1, 1), el cual se encuentra entre las placas $(0 < z = 1 < 4)$,

$$\mathbf{H}_o = 1/2\ \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n = 1/2\ (-10\mathbf{a}_x) \times \mathbf{a}_z = 5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$
$$\mathbf{H}_4 = 1/2\ \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n = 1/2\ (10\mathbf{a}_x) \times (-\mathbf{a}_z) = 5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

Por tanto,

$$\mathbf{H} = 10\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

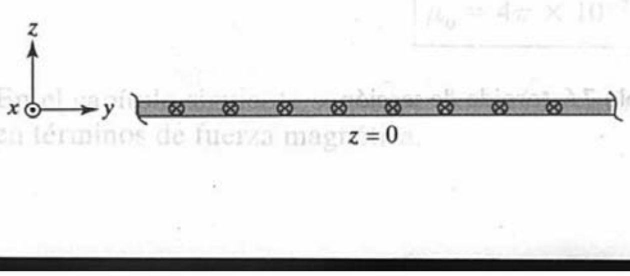


Figura 7.14. Para el ejemplo 7.5; láminas de corriente paralelas infinitas.

b) En $(0, -3, 10)$, el cual se encuentra sobre las placas $(z = 10 > 4 > 0)$,

$$\mathbf{H}_o = 1/2\,(-10\mathbf{a}_x) \times \mathbf{a}_z = 5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H}_4 = 1/2\,(10\mathbf{a}_x) \times \mathbf{a}_z = -5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

Por tanto,

$$\mathbf{H} = 0 \text{ A/m}$$

Ejercicio 7.5

El plano $y = 1$ porta una corriente $\mathbf{K} = 50\mathbf{a}_z$ mA/m. Halle $\mathbf{H}$ en

a) $(0, 0, 0)$

b) $(1, 5, -3)$

Respuestas: *a)* $25\mathbf{a}_x$ mA/m y *b)* $-25\mathbf{a}_x$ mA/m.

Ejemplo 7.6

Un toroide cuyas dimensiones se presentan en la figura 7.15 cuenta con N vueltas y porta corriente I. Determine H dentro y fuera del toroide.

Solución:

Se aplica la ley de los circuitos de Ampère a la trayectoria amperiana, en este caso el círculo de radio ρ indicado con línea punteada en la figura 7.15. En razón de que esa trayectoria es cruzada por las N vueltas, cada una de las cuales porta corriente I, la corriente neta encerrada por la trayectoria amperiana es NI. En consecuencia,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} \rightarrow H \cdot 2\pi\rho = NI$$

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$

$H \oint dL = NI$

$H(2\pi\rho) = NI$

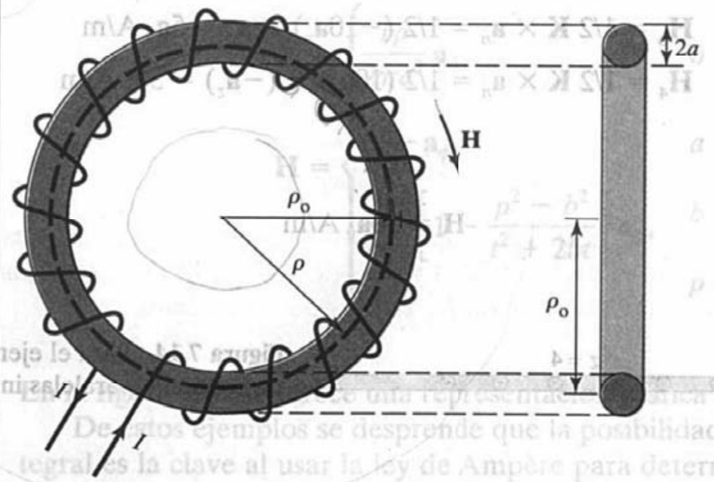


Figura 7.15. Para el ejemplo 7.6; toroide de sección transversal circular.

o

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}, \quad \text{respecto de } \rho_o - a < \rho < \rho_o + a$$

donde ρ_o es el radio medio del toroide, como se muestra en la figura 7.15. Un valor aproximado de H es

$$H_{\text{aprox}} = \frac{NI}{2\pi\rho_o} = \frac{NI}{\ell}$$

Adviértase que esta expresión es igual a la fórmula obtenida para H con relación a puntos muy dentro de un solenoide de gran longitud ($\ell \gg a$). Así, un solenoide recto podría considerarse una bobina toroidal especial en la que $\rho_o \to \infty$. Fuera del toroide, la corriente encerrada por una trayectoria amperiana es $NI - NI = 0$, y por tanto $H = 0$.

Ejercicio 7.6

Un toroide de sección transversal circular con centro en el origen y eje en el eje z cuenta con 1000 vueltas, con $\rho_o = 10$ cm y $a = 1$ cm. Si porta una corriente de 100 mA, halle $|H|$ en

a) (3 cm, −4 cm, 0)

b) (6 cm, 9 cm, 0)

Respuestas: *a)* 0 y *b)* 147.1 A/m.

7.5. Densidad de flujo magnético. Ecuación de Maxwell

La densidad de flujo magnético **B** se asemeja a la densidad de flujo eléctrico **D**. Así como $\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}$ en el vacío, la densidad de flujo magnético **B** se relaciona con la intensidad de campo magnético **H** de acuerdo con

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}} \tag{7.30}$$

donde μ_o es una constante llamada *permeabilidad del vacío*. Esta constante se expresa en henrys/metro (H/m) y su valor es

$$\boxed{\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} \tag{7.31}$$

En el capítulo siguiente se proporcionará la definición precisa del campo magnético **B**, en términos de fuerza magnética.

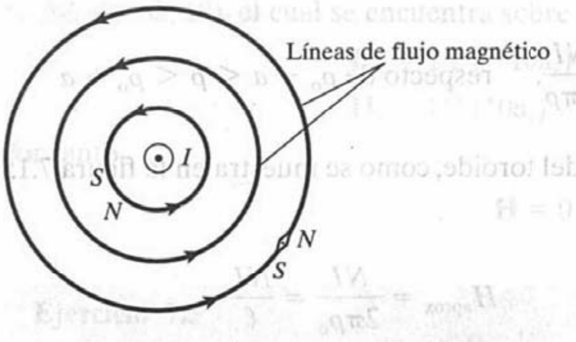


Figura 7.16. Líneas de flujo magnético debidas a un alambre recto con corriente dirigida hacia fuera de la página.

El flujo magnético a través de una superficie S está dado por

$$\boxed{\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} \tag{7.32}$$

donde el flujo magnético Ψ se expresa en webers (Wb) y la densidad de flujo magnético en webers/metro cuadrado (Wb/m^2) o teslas.

La línea de flujo magnético es la trayectoria a la que $\mathbf{B}$ es tangencial en cualquier punto de un campo magnético. La aguja de una brújula magnética se orienta a lo largo de esa línea cuando se coloca en el campo magnético. En la figura 7.16 se muestran, por ejemplo, las líneas de flujo magnético debidas a un alambre recto y largo. Las líneas de flujo magnético se determinan como las de flujo eléctrico, explicadas en la sección 4.10. La dirección de $\mathbf{B}$ es la que la aguja de la brújula magnética indica como "norte". Note que cada línea de flujo es cerrada; no tiene principio ni fin. Aunque la figura 7.16 se refiere a un conductor recto portador de corriente, en general las líneas de flujo magnético son cerradas y no se cruzan entre sí sea cual fuere la distribución de corriente.

En un campo electrostático, el flujo que pasa por una superficie cerrada es igual a la carga encerrada; esto es, $\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$. Así, es posible la existencia de una carga eléctrica aislada, como se muestra en la figura 7.17*(a)*, lo que revela asimismo que las líneas de flujo eléctrico no son necesariamente cerradas. Las de flujo magnético, en cambio, siempre se cierran en sí mismas, como se observa en la figura 7.17*(b)*. Esto se debe a que

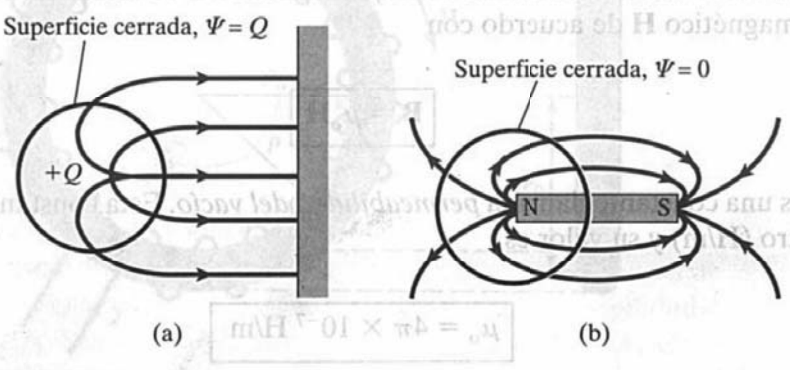


Figura 7.17. Flujo que sale de una superficie cerrada debido a: **(a)** una carga eléctrica aislada $\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$, **(b)** una carga magnética, $\Psi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

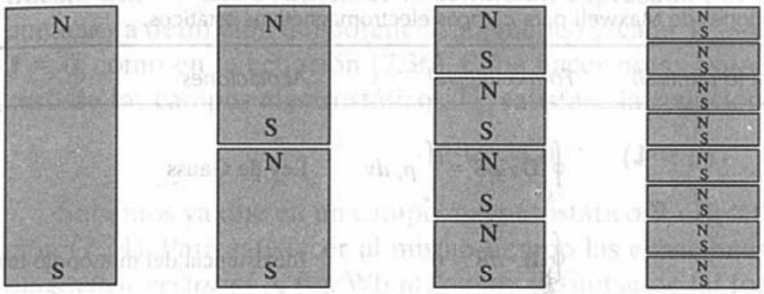


Figura 7.18. La división sucesiva de una barra imantada resulta en piezas con polos norte y sur, lo que demuestra que es imposible aislar los polos magnéticos.

es imposible que existan polos magnéticos (o cargas magnéticas) aislados. Si, por ejemplo, se deseara conseguir un polo magnético aislado dividiendo sucesivamente en dos una barra magnética, cada una de las piezas resultantes tendría un polo norte y uno sur, como se ilustra en la figura 7.18. Es imposible separar el polo norte del polo sur.

No existen cargas **magnéticas aisladas.**

En un campo magnético, así, el flujo total a través de una superficie cerrada debe ser de cero; es decir,

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0} \tag{7.33}$$

Esta ecuación es la *ley de la conservación del flujo magnético* o *ley de Gauss para campos magnetostáticos*, así como $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$ es la ley de Gauss para campos electrostáticos. Aunque el campo magnetostático no es conservativo, el flujo magnético se conserva.

Al aplicar el teorema de la divergencia a la ecuación (7.33) se obtiene

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{B}\, dv = 0$$

o

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \tag{7.34}$$

Ésta es la cuarta ecuación de Maxwell por deducir. La ecuación (7.33) o (7.34) indica que los campos magnetostáticos no tienen origen ni pérdida, y la segunda de ellas que las líneas de campo magnético siempre son continuas.

7.6. Ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos estáticos

En la tabla 7.2 se reúnen las cuatro ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos estáticos, que ya hemos deducido. En beneficio de la claridad, en ella se ha modificado el orden en que fueron deducidas.

Tabla 7.2. Ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos estáticos.

Forma diferencial (o puntual)	*Forma integral*	*Acotaciones*
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv$	Ley de Gauss
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Inexistencia del monopolo magnético
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	Conservatividad del campo electrostático
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Ley de Ampère

La opción entre la forma diferencial e integral de estas ecuaciones depende de cada problema específico. En la tabla 7.2 salta a la vista que la definición de un campo vectorial se reduce a su rotacional y su divergencia. Un campo sólo puede ser eléctrico o magnético si satisface las correspondientes ecuaciones de Maxwell (véanse los problemas 7.26 y 7.27). Cabe destacar que, tal como se les presenta en la tabla 7.2, las ecuaciones de Maxwell se refieren únicamente a campos electromagnéticos estáticos. Como se explicará en el capítulo 9, las ecuaciones de divergencia se mantienen sin cambios en el caso de campos electromagnéticos variables en el tiempo, mientras que las ecuaciones de rotacional deberán modificarse.

7.7. Potenciales magnéticos escalar y vectorial

Como se recordará, la asociación del potencial eléctrico V con la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ ($\mathbf{E} = -\nabla V$) nos permitió simplificar ciertos problemas de campos electrostáticos. De la misma manera, es posible definir un potencial asociado con el campo magnetostático $\mathbf{B}$. Tal potencial magnético puede ser un escalar V_m o un vector $\mathbf{A}$. Para definir V_m y $\mathbf{A}$ es preciso recordar dos importantes identidades (véanse el ejemplo 3.9 y el ejercicio 3.9):

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \tag{7.35a}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{7.35b}$$

las cuales rigen siempre sobre cualquier campo escalar V y campo vectorial $\mathbf{A}$.

De igual modo que $\mathbf{E} = -\nabla V$, la relación con $\mathbf{H}$ del *potencial magnético escalar* V_m (en amperes) se define de acuerdo con

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla V_m} \quad \text{si } \mathbf{J} = 0 \tag{7.36}$$

La condición añadida a esta ecuación es importante y debe ser explicada. La combinación de las ecuaciones (7.36) y (7.19) resulta en

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (-\nabla V_m) = 0 \tag{7.37}$$

puesto que V_m debe satisfacer la condición expresada por la ecuación (7.35*a*). En consecuencia, la definición del potencial magnético escalar V_m sólo rige en una región en la que $\mathbf{J} = 0$, como en la ecuación (7.36). Cabe hacer notar asimismo que, al igual que V en el caso de los campos electrostáticos, V_m satisface la ecuación de Laplace; por tanto,

$$\nabla^2 V_m = 0, \qquad (\mathbf{J} = 0) \tag{7.38}$$

Sabemos ya que en un campo magnetostático $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, como se enunció en la ecuación (7.34). Para satisfacer al mismo tiempo las ecuaciones (7.34) y (7.35*b*), el *potencial magnético vectorial* **A** (en Wb/m) puede definirse de tal forma que

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \tag{7.39}$$

Así como se definió

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o r} \tag{7.40}$$

es posible definir

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_o I \, d\mathbf{l}}{4\pi R}} \quad \text{para corriente de línea} \tag{7.41}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_o \mathbf{K} \, dS}{4\pi R}} \quad \text{para corriente superficial} \tag{7.42}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu_o \mathbf{J} \, dv}{4\pi R}} \quad \text{para corriente volumétrica} \tag{7.43}$$

En vez de hacerlo de la ecuación (7.40), las ecuaciones (7.41) a (7.43) podrían obtenerse de las ecuaciones (7.6) a (7.8). La ecuación (7.41), por ejemplo, puede deducirse de la (7.6) en asociación con la (7.39). Ello implica expresar la ecuación (7.6) como

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_L \frac{I \, d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \tag{7.44}$$

donde **R** es el vector de distancia desde el elemento lineal $d\mathbf{l}'$ en el punto de origen (x', y', z') hasta el punto del campo (x, y, z), como se muestra en la figura 7.19, y $R = |\mathbf{R}|$; esto es,

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} \tag{7.45}$$

Por tanto,

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

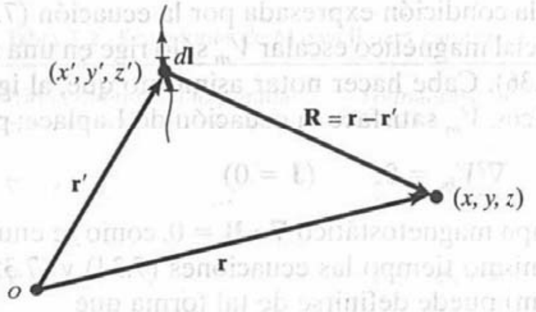


Figura 7.19. Ilustración del punto de origen (x', y', z') y el punto del campo (x, y, z).

o

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \quad \left(= \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}\right) \tag{7.46}$$

donde la derivación se realiza respecto de x, y y z. Al sustituir esta expresión en la ecuación (7.44) se obtiene

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_L I\, d\mathbf{l}' \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{7.47}$$

Se aplica entonces la identidad vectorial

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F} \tag{7.48}$$

donde f es un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Si se adopta $f = 1/R$ y $\mathbf{F} = d\mathbf{l}'$ tenemos

$$d\mathbf{l}' \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R}\nabla \times d\mathbf{l}' - \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{l}'}{R}\right)$$

Puesto que ∇ opera respecto de (x, y, z) mientras que $d\mathbf{l}'$ es una función de (x', y', z'), $\nabla \times d\mathbf{l}' = 0$. Por tanto,

$$d\mathbf{l}' \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \frac{d\mathbf{l}'}{R} \tag{7.49}$$

Con esta ecuación, la ecuación (7.47) se reduce a

$$\mathbf{B} = \nabla \times \int_L \frac{\mu_o I\, d\mathbf{l}'}{4\pi R} \tag{7.50}$$

La comparación de la ecuación (7.50) con la ecuación (7.39) indica que

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_o I\, d\mathbf{l}'}{4\pi R}$$

lo que comprueba la ecuación (7.41).

De la sustitución de la ecuación (7.39) en la ecuación (7.32) y la aplicación del teorema de Stokes se obtiene

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

o

$$\boxed{\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}} \tag{7.51}$$

Así, el flujo magnético a través de un área dada puede hallarse por medio de la ecuación (7.32) o (7.51). De igual modo, el campo magnético puede determinarse mediante V_m o **A**; la elección depende de la naturaleza del problema de que se trate, aunque V_m sólo puede emplearse en una región sin origen. El potencial magnético vectorial es, así, un recurso muy eficaz y elegante para la resolución de problemas electromagnéticos, particularmente los relativos a antenas. Como se advertirá en el capítulo 13, en problemas de antenas es más fácil hallar **B** si antes se calcula **A**.

Ejemplo 7.7

Dado el potencial magnético vectorial $\mathbf{A} = -\rho^2/4\ \mathbf{a}_z$ Wb/m, calcule el flujo magnético total que cruza la superficie $\phi = \pi/2, 1 \le \rho \le 2$ m, $0 \le z \le 5$ m.

Solución:

Este problema puede resolverse de dos maneras: con la ecuación (7.32) o (7.51).

Método 1:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\mathbf{a}_\phi = \frac{\rho}{2}\mathbf{a}_\phi, \qquad d\mathbf{S} = d\rho\, dz\, \mathbf{a}_\phi$$

Por tanto,

$$\Psi = \int \mathrm{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{5}\int_{\rho=1}^{2} \rho\, d\rho\, dz = \frac{1}{4}\rho^2\Big|_2^1 (5) = \frac{15}{4}$$

$$\Psi = 3.75 \text{ Wb}$$

Método 2:

Se usa

$$\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

donde L es la trayectoria que circunscribe a la superficie S y Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 y Ψ_4 las evaluaciones de $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo de los segmentos de L marcados con los números 1 a 4, respectivamente, en la figura 7.20. Puesto que **A** sólo cuenta con la componente z,

$$\Psi_1 = 0 = \Psi_3$$

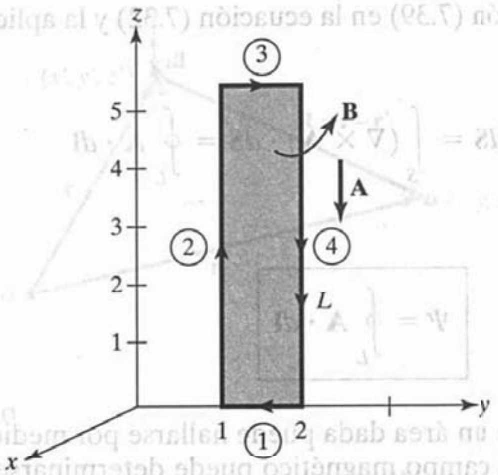


Figura 7.20. Para el ejemplo 7.7.

Esto es,

$$\Psi = \Psi_2 + \Psi_4 = -\frac{1}{4}\left[(1)^2\int_0^5 dz + (2)^2\int_5^0 dz\right]$$

$$= -\frac{1}{4}(1-4)(5) = \frac{15}{4}$$

$$= 3.75 \text{ Wb}$$

como se obtuvo anteriormente. Nótese que la dirección de la trayectoria L debe coincidir con la de $d\mathbf{S}$.

Ejercicio 7.7

Cierta distribución de corriente produce el potencial magnético vectorial $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x + y^2x\mathbf{a}_y - 4xyz\mathbf{a}_z$ Wb/m. Calcule

a) **B** en $(-1, 2, 5)$

b) El flujo a través de la superficie definida por $z = 1, 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4$

Respuestas: *a)* $20\mathbf{a}_x + 40\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ Wb/m² y *b)* 20 Wb.

Ejemplo 7.8

Si el plano $z = 0$ porta una corriente uniforme $\mathbf{K} = K_y\mathbf{a}_y$,

$$\mathbf{H} = \begin{cases} 1/2\, K_y\mathbf{a}_x, & z > 0 \\ -1/2\, K_y\mathbf{a}_x, & z < 0 \end{cases}$$

Esto se obtuvo en la sección 7.4 aplicando la ley de Ampère. Obténgalo ahora mediante el concepto de potencial magnético vectorial.

Solución:

Considérese la lámina de corriente de la figura 7.21. Con base en la ecuación (7.42),

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_o \mathbf{K}\, dS}{4\pi R}$$

En este problema, $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$, $dS = dx'\, dy'$, y en el caso de $z > 0$,

$$\begin{aligned} R = |\mathbf{R}| &= |(0, 0, z) - (x', y', 0)| \\ &= [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{7.8.1}$$

donde las coordenadas primas remiten al punto de origen y las no primas al punto del campo. Es necesario (y usual) distinguir entre ambos puntos para evitar confusiones (véase la fig. 7.19). Por consiguiente,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_o K_y\, dx'\, dy'\, \mathbf{a}_y}{4\pi[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \nabla \times d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial z} dA_y\, \mathbf{a}_x \\ &= \frac{\mu_o K_y z\, dx'\, dy'\, \mathbf{a}_x}{4\pi[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'\, dy'}{[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}} \tag{7.8.2}$$

Para mayor facilidad, en el integrando podemos convertir las coordenadas cartesianas en cilíndricas, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{\rho'=0}^{\infty}\int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\rho'\, d\phi'\, d\rho'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} 2\pi \int_0^{\infty} [(\rho')^2 + z^2]^{-3/2}\, 1/2\, d[(\rho')^2] \\ &= \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{2} \frac{-1}{[(\rho')^2 + z^2)^{1/2}} \Bigg|_{\rho'=0}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_o K_y \mathbf{a}_x}{2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = \frac{K_y}{2} \mathbf{a}_x, \quad \text{respecto de } z > 0$$

Mediante el simple reemplazo de z por $-z$ en la ecuación (7.8.2) y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene

$$\mathbf{H} = -\frac{K_y}{2} \mathbf{a}_x, \quad \text{respecto de } z < 0$$

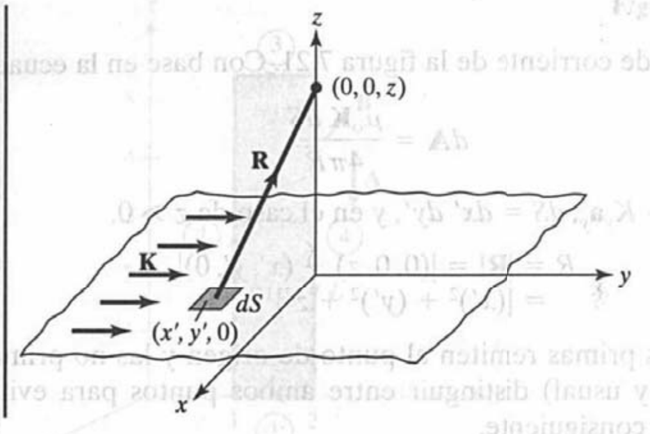


Figura 7.21. Para el ejemplo 7.8; lámina infinita de corriente.

Ejercicio 7.8

Repita el ejemplo 7.8 empleando esta vez la ley de Biot-Savart para determinar **H** en los puntos $(0, 0, h)$ y $(0, 0, -h)$.

†7.8. Deducción de las leyes de Biot-Savart y Ampère

Tanto la ley de Biot-Savart como la de Ampère pueden deducirse del concepto de potencial magnético vectorial. Tal deducción supone emplear las identidades vectoriales de la ecuación (7.48) y

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{7.52}$$

Puesto que la ley de Biot-Savart expresada en la ecuación (7.4) corresponde básicamente a la corriente de línea, comencemos nuestra deducción con las ecuaciones (7.39) y (7.41); es decir,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \oint_L \frac{\mu_o I \, d\mathbf{l}'}{4\pi R} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_L \nabla \times \frac{1}{R} \, d\mathbf{l}', \tag{7.53}$$

donde R es como se le definió en la ecuación (7.45). Si al aplicar la identidad vectorial de la ecuación (7.48) se concede que $\mathbf{F} = d\mathbf{l}$ y $f = 1/R$, la ecuación (7.53) se convierte en

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_L \left[\frac{1}{R} \nabla \times d\mathbf{l}' + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{l}' \right] \tag{7.54}$$

Puesto que ∇ opera respecto de (x, y, z) y $d\mathbf{l}'$ es una función de (x', y', z'), $\nabla \times d\mathbf{l}' = 0$. Asimismo,

$$\frac{1}{R} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2} \tag{7.55}$$

$$\nabla\left[\frac{1}{R}\right] = -\frac{(x-x')\mathbf{a}_x + (y-y')\mathbf{a}_y + (z-z')\mathbf{a}_z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \tag{7.56}$$

donde $\mathbf{a}_R$ es un vector unitario del punto de origen al punto del campo. De este modo, la ecuación (7.54) (tras eliminar el signo prima de $d\mathbf{l}'$) se convierte en

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{R^2} \tag{7.57}$$

la cual es la ley de Biot-Savart.

Al combinar la identidad de la ecuación (7.52) con la ecuación (7.39) se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{7.58}$$

Es posible demostrar que, en el caso de un campo magnético estático,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \tag{7.59}$$

de tal forma que, tras reemplazar $\mathbf{B}$ por $\mu_o\mathbf{H}$ y usar la ecuación (7.19), la ecuación (7.58) se convierte en

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_o\nabla \times \mathbf{H}$$

o

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_o\mathbf{J}} \tag{7.60}$$

expresión a la que se le conoce como *ecuación vectorial de Poisson*, similar a la ecuación de Poisson ($\nabla^2 V = -\rho_v/\varepsilon$) en electrostática. En coordenadas cartesianas, la ecuación (7.60) puede descomponerse en tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_o J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_o J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_o J_z \end{aligned} \tag{7.61}$$

las que podrían considerarse como *ecuaciones escalares de Poisson*.

También es posible demostrar que la ley de los circuitos de Ampère es congruente con nuestra definición de potencial magnético vectorial. A partir del teorema de Stokes y la ecuación (7.39),

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{\mu_o}\int_S \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \tag{7.62}$$

Con base en las ecuaciones (7.52), (7.59) y (7.60),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2\mathbf{A} = \mu_o\mathbf{J}$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación (7.62) resulta en

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

la cual es la ley de los circuitos de Ampère.

Resumen

1. Las leyes básicas que rigen a los campos magnetostáticos son las de Biot-Savart y Ampère. Semejante a la de Coulomb, la ley de Biot-Savart establece que la intensidad de campo magnético $d\mathbf{H}$ en $\mathbf{r}$ debida al elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$ en $\mathbf{r}'$ es

$$d\mathbf{H} = \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \qquad \text{(en A/m)}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y $R = |\mathbf{R}|$. En el caso de distribuciones de corriente superficial y volumétrica, $I\,d\mathbf{l}$ se reemplaza por $\mathbf{K}\,dS$ y $\mathbf{J}\,dv$, respectivamente; es decir,

$$I\,d\mathbf{l} \equiv \mathbf{K}\,dS \equiv \mathbf{J}\,dv$$

2. Similar a la de Gauss, la ley de los circuitos de Ampère establece que la circulación de $\mathbf{H}$ alrededor de una trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada por la trayectoria; es decir,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

o

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \text{(tercera ecuación de Maxwell por deducir).}$$

Cuando la distribución de corriente es simétrica, lo que permite hallar una trayectoria amperiana (en la que $\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{a}_\phi$ es constante), la ley de Ampère es útil para determinar $\mathbf{H}$; esto es,

$$H_\phi \oint dl = I_{\text{enc}} \qquad \text{o} \qquad H_\phi = \frac{I_{\text{enc}}}{\ell}$$

3. El flujo magnético a través de una superficie S está dado por

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(en Wb)}$$

donde $\mathbf{B}$ es la densidad de flujo magnético, en Wb/m^2. En el vacío,

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$$

donde $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m = permeabilidad del vacío.

4. Dada la inexistencia de monopolos magnéticos aislados o libres, el flujo magnético neto a través de una superficie cerrada es de cero;

$$\Psi = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

o

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(cuarta ecuación de Maxwell por deducir).}$$

5. Para este momento se han deducido ya las cuatro ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos estáticos:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

6. El potencial magnético escalar V_m se define como

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad \text{si } \mathbf{J} = 0$$

y el potencial magnético vectorial $\mathbf{A}$ como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

donde $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Con la definición de $\mathbf{A}$, el flujo magnético a través de una superficie S puede hallarse a partir de

$$\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

donde L es la trayectoria cerrada que define a la superficie S (fig. 3.20). En vez de emplear para ello la ley de Biot-Savart, el campo magnético debido a una distribución de corriente puede determinarse mediante $\mathbf{A}$, en particular en la teoría de antenas. En el caso de un elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$ en $\mathbf{r}'$, el potencial magnético vectorial en $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_o I\, d\mathbf{l}}{4\pi R}, \qquad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

7. Existen semejanzas entre los campos eléctricos y los magnéticos; algunas de ellas se enumeraron en la tabla 7.1. En correspondencia con la ecuación de Poisson $\nabla^2 V = -\rho_v/\varepsilon$, por ejemplo, está

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_o \mathbf{J}$$

Preguntas de repaso

7.1. Uno de los siguientes no es origen de campos magnetostáticos:

a) Corriente directa en un alambre.
b) Imán permanente.
c) Carga acelerada.
d) Campo eléctrico que cambia en forma lineal con el tiempo.
e) Disco cargado que gira a una velocidad uniforme.

7.2. Identifique en la figura 7.22 la configuración que no constituye una representación correcta de I y $\mathbf{H}$.

7.3. Considere los puntos A, B, C, D y E en el círculo de radio 2 que aparece en la figura 7.23. Los elementos de la lista de la derecha son los valores de $\mathbf{a}_\phi$ en diferentes puntos de ese círculo. Haga coincidir tales elementos con los puntos referidos en la lista de la izquierda.

a) A	(i)	$\mathbf{a}_x$
b) B	(ii)	$-\mathbf{a}_x$
c) C	(iii)	$\mathbf{a}_y$
d) D	(iv)	$-\mathbf{a}_y$
e) E	(v)	$\dfrac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$
	(vi)	$\dfrac{-\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$
	(vii)	$\dfrac{-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$
	(viii)	$\dfrac{\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$

7.4. El eje z porta una corriente filamentosa de 10π A a lo largo de $\mathbf{a}_z$. ¿Cuál de las expresiones siguientes es incorrecta?

a) $\mathbf{H} = -\mathbf{a}_x$ A/m en $(0, 5, 0)$
b) $\mathbf{H} = \mathbf{a}_\phi$ A/m en $(5, \pi/4, 0)$
c) $\mathbf{H} = -0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y$ en $(-3, 4, 0)$
d) $\mathbf{H} = -\mathbf{a}_\phi$ en $(5, 3\pi/2, 0)$

7.5. El plano $y = 0$ porta una corriente uniforme de $30\mathbf{a}_z$ mA/m. En $(1, 10, -2)$, la intensidad de campo magnético es de

a) $-15\mathbf{a}_x$ mA/m
b) $15\mathbf{a}_x$ mA/m

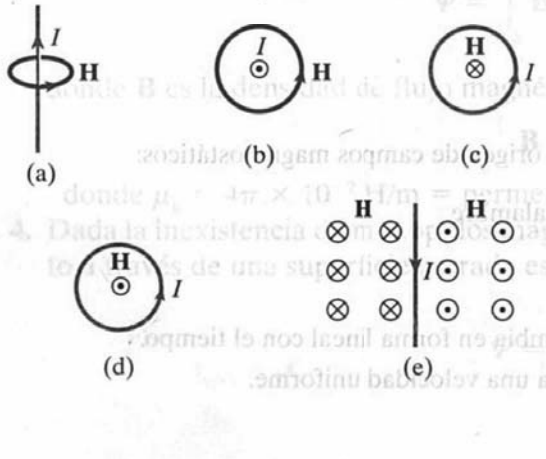


Figura 7.22. Para la pregunta de repaso 7.2.

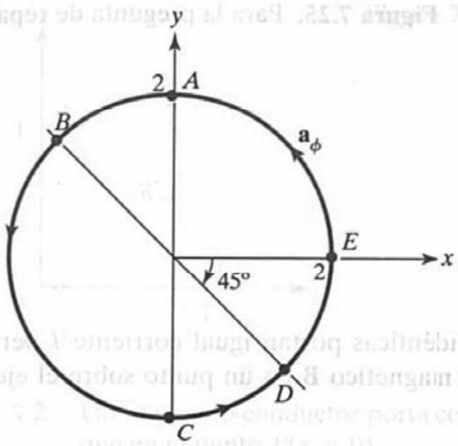


Figura 7.23. Para la pregunta de repaso 7.3.

c) $477.5\mathbf{a}_y$ μA/m

d) $18.85\mathbf{a}_y$ nA/m

e) Ninguno de los valores anteriores.

7.6. Con relación a las corrientes y trayectorias cerradas de la figura 7.24, calcule el valor de $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$.

7.7. ¿Cuál de los siguientes enunciados no es una característica de un campo magnético estático?

a) Es solenoidal.

b) Es conservativo.

c) No tiene pérdida ni origen.

d) Las líneas de flujo magnético siempre son cerradas.

e) El número total de las líneas de flujo que entran en una región dada es igual al número total de líneas de flujo que salen de esa región.

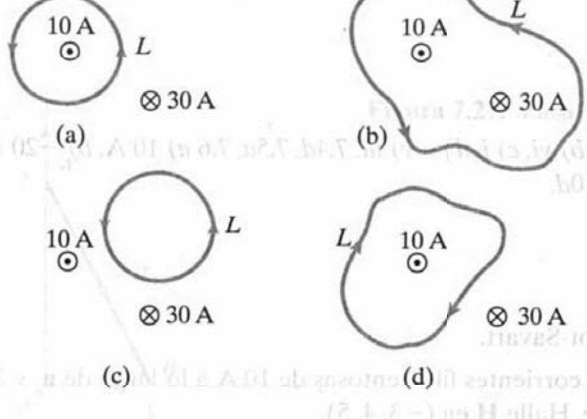


Figura 7.24. Para la pregunta de repaso 7.6.

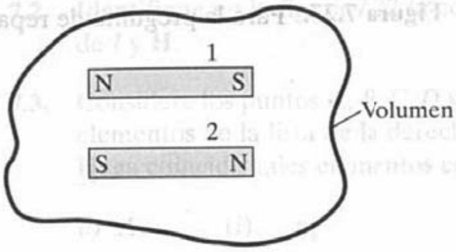


Figura 7.25. Para la pregunta de repaso 7.10.

7.8. Dos bobinas circulares coaxiales idénticas portan igual corriente I pero en direcciones opuestas. La magnitud del campo magnético **B** en un punto sobre el eje equidistante de las bobinas es

a) Cero.

b) Igual a la producida por una bobina.

c) Dos veces más que la producida por una bobina.

d) La mitad de la producida por una bobina.

7.9. Una de las ecuaciones siguientes no es una de las de Maxwell para campos electromagnéticos estáticos en un medio lineal homogéneo.

a) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

b) $\nabla \times \mathbf{D} = 0$

c) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I$

d) $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$

e) $\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_o \mathbf{J}$

7.10. Dos barras imantadas con intensidad de $Q_{m1} = 20$ A · m y $Q_{m2} = 10$ A · m (cargas magnéticas) en su polo norte se colocan dentro de un volumen, como se muestra en la figura 7.25. El flujo magnético que sale del volumen es de

a) 200 Wb

b) 30 Wb

c) 10 Wb

d) 0 Wb

e) −10 Wb

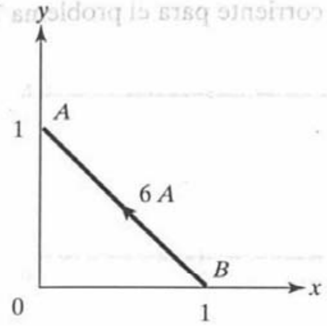
Respuestas: 7.1*c*, 7.2*c*, 7.3 *a) ii*, *b) vi*, *c) i*, *d) v*, *e) iii*, 7.4*d*, 7.5*a*, 7.6 *a)* 10 A, *b)* −20 A, *c)* 0, *d)* −10 A, 7.7*b*, 7.8*a*, 7.9*e*, 7.10*d*.

Problemas

7.1. *a)* Enuncie la ley de Biot-Savart.

b) Los ejes y y z portan corrientes filamentosas de 10 A a lo largo de $\mathbf{a}_y$ y 20 A a lo largo de $-\mathbf{a}_z$, respectivamente. Halle **H** en $(-3, 4, 5)$.

Figura 7.26. Para el problema 7.3.



7.2. Un filamento conductor porta corriente I del punto $A(0, 0, a)$ al punto $B(0, 0, b)$. Demuestre que en el punto $P(x, y, 0)$,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}}\left[\frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}\right]\mathbf{a}_y$$

7.3. Considere AB en la figura 7.26 como parte de un circuito eléctrico. Halle **H** en el origen debida a AB.

7.4. Repita el problema 7.3 con relación al conductor AB de la figura 7.27.

7.5. La línea $x = 0$, $y = 0$, $0 \leq z \leq 10$ m porta una corriente de 2 A a lo largo de $\mathbf{a}_z$. Calcule **H** en los puntos

a) $(5, 0, 0)$

b) $(5, 5, 0)$

c) $(5, 15, 0)$

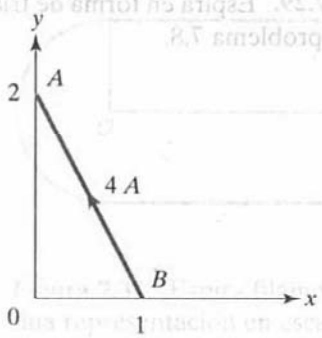
d) $(5, -15, 0)$

***7.6.** *a)* Halle **H** en $(0, 0, 5)$ debida al lado 2 de la espira triangular de la figura 7.6*(a)*.

b) Halle **H** en $(0, 0, 5)$ debida a la espira completa.

7.7. Un conductor de longitud infinita se dobla en forma de L, como se ilustra en la figura 7.28. Si por él fluye una corriente directa de 5 A, halle la intensidad de campo magnético en *a)* $(2, 2, 0)$, *b)* $(0, -2, 0)$ y c) $(0, 0, 2)$.

Figura 7.27. Para el problema 7.4.



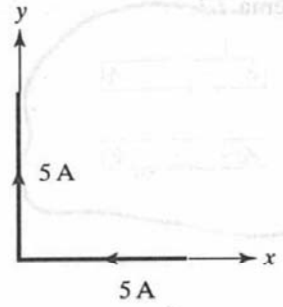


Figura 7.28. Filamento de corriente para el problema 7.7.

7.8. Halle **H** en el centro C de una espira en forma de triángulo equilátero de 4 m por lado que porta una corriente de 5 A, como se ilustra en la figura 7.29.

7.9. Una espira rectangular que porta una corriente de 10 A se sitúa en el plano $z = 0$, como se muestra en la figura 7.30. Evalúe **H** en

a) $(2, 2, 0)$

b) $(4, 2, 0)$

c) $(4, 8, 0)$

d) $(0, 0, 2)$

7.10. Una espira conductora cuadrada de lado $2a$ se ubica en el plano $z = 0$ y porta una corriente I en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Demuestre que en el centro de la espira

$$\mathbf{H} = \frac{\sqrt{2}I}{\pi a}\,\mathbf{a}_z$$

***7.11.** *a)* Una espira filamentosa portadora de corriente I se dobla en forma de un polígono regular de n lados. Demuestre que en el centro del polígono

$$H = \frac{nI}{2\pi r}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

donde r es el radio del círculo circunscrito por el polígono.

b) Aplique estos mismos criterios a los casos en que $n = 3$ y $n = 4$ y compruebe si sus resultados son acordes con los de la espira triangular del problema 7.8 y la espira cuadrada del problema 7.10, respectivamente.

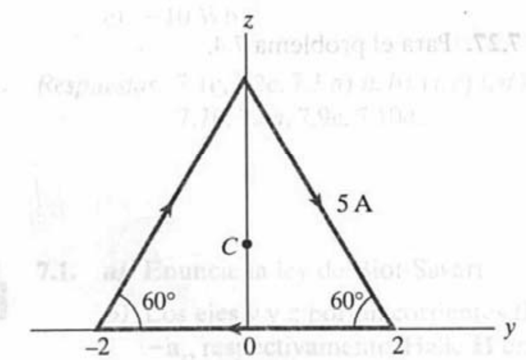


Figura 7.29. Espira en forma de triángulo equilátero para el problema 7.8.

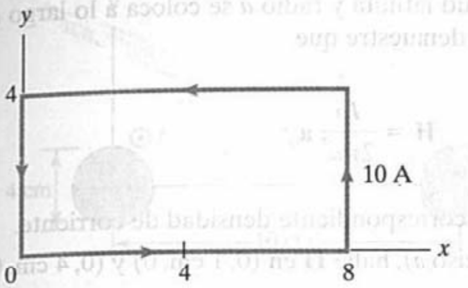


Figura 7.30. Espira rectangular para el problema 7.9.

c) Demuestre que, al aumentar n, el resultado del inciso *a)* se convierte en el de la espira circular del ejemplo 7.3.

7.12. Con relación a la espira filamentosa que aparece en la figura 7.31, halle la intensidad de campo magnético en O.

7.13. Dos espiras de corriente idénticas tienen su centro en (0, 0, 0) y (0, 0, 4) y sus ejes en el eje z (con lo que forman la "bobina de Helmholtz"). Si cada una de ellas tiene un radio de 2 m y porta una corriente de 5 A en $\mathbf{a}_\phi$, calcule $\mathbf{H}$ en

a) (0, 0, 0)

b) (0, 0, 2)

7.14. Un solenoide de 3 cm de largo porta una corriente de 400 mA. Si debe producir una densidad de flujo magnético de 5 mWb/m^2, ¿cuántas vueltas de alambre debe poseer?

7.15. Un solenoide de 4 mm de radio y 2 cm de longitud cuenta con 150 vueltas/m y porta una corriente de 500 mA. Halle: a) $|\mathbf{H}|$ en el centro, b) $|\mathbf{H}|$ en los extremos del solenoide.

7.16. El plano $x = 10$ porta una corriente de 100 mA/m a lo largo de $\mathbf{a}_z$, mientras que la línea $x = 1$, $y = -2$ porta una corriente filamentosa de 20π mA a lo largo de $\mathbf{a}_z$. Determine $\mathbf{H}$ en (4, 3, 2).

7.17. *a)* Enuncie la ley de los circuitos de Ampère.

b) Un cilindro conductor hueco posee un radio interno a y un radio externo b y porta corriente I a lo largo de la dirección positiva de z. Halle $\mathbf{H}$ en cualquier punto.

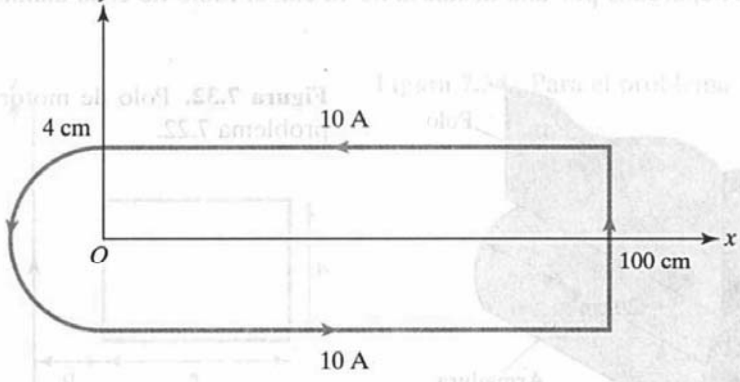


Figura 7.31. Espira filamentosa para el problema 7.12; no es una representación en escala.

7.18. *a)* Un conductor sólido de longitud infinita y radio a se coloca a lo largo del eje z. Si porta corriente I en la dirección $+z$, demuestre que

$$\mathbf{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\,\mathbf{a}_\phi$$

dentro del conductor. Halle la correspondiente densidad de corriente.

b) Si $I = 3$ A y $a = 2$ cm en el inciso *a)*, halle **H** en (0, 1 cm, 0) y (0, 4 cm, 0).

7.19. Si $\mathbf{H} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y$ A/m en el plano $z = 0$, *a)* determine la densidad de corriente y *b)* compruebe la ley de Ampère considerando que la circulación de **H** ocurre alrededor del borde del rectángulo $z = 0, 0 < x < 3, -1 < y < 4$.

7.20. En cierta región conductora,

$$\mathbf{H} = yz(x^2 + y^2)\mathbf{a}_x - y^2xz\mathbf{a}_y + 4x^2y^2\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

a) Determine **J** en (5, 2, −3).

b) Halle la corriente que pasa por $x = -1, 0 < y, z < 2$.

c) Demuestre que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

7.21. Un alambre filamentoso de longitud infinita porta una corriente de 2 A en la dirección $+z$. Calcule

a) **B** en (−3, 4, 7).

b) El flujo a través de la espira cuadrada descrita por $2 \leq \rho \leq 6, 0 \leq z \leq 4, \phi = 90°$.

7.22. El motor eléctrico que aparece en la figura 7.32 posee un campo

$$\mathbf{H} = \frac{10^6}{\rho}\,\text{sen}\;2\phi\,\mathbf{a}_\rho \text{ A/m}$$

Calcule el flujo por polo que pasa por el entrehierro si la longitud axial del polo es de 20 cm.

7.23. Considere la línea de transmisión de dos alambres cuya sección transversal se presenta en la figura 7.33. Separados por una distancia de 10 cm, el radio de cada alambre es de 2 cm. El

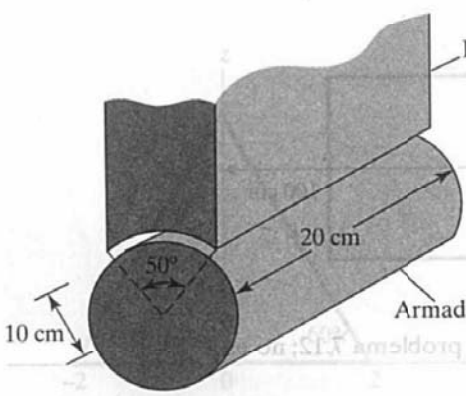


Figura 7.32. Polo de motor eléctrico para el problema 7.22.

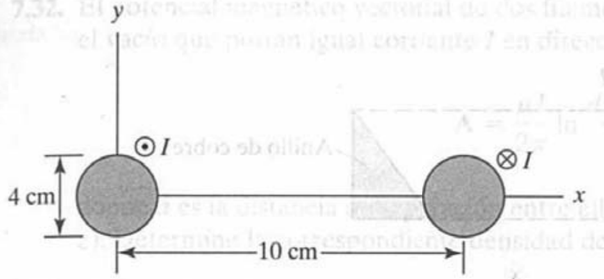


Figura 7.33. Línea de dos hilos para el problema 7.23.

alambre centrado en (0, 0) porta una corriente de 5 A, en tanto que el otro, centrado en (10 cm, 0), porta la corriente de retorno. Halle **H** en

a) (5 cm, 0)

b) (10 cm, 5 cm)

7.24. Determine el flujo magnético a través de una espira rectangular ($a \times b$) debido a un conductor de longitud infinita que porta corriente I, como se muestra en la figura 7.34. La espira y los conductores rectos están separados por una distancia d.

***7.25.** Un anillo de cobre de sección transversal triangular circunda a un cable recto muy largo, como se observa en la figura 7.35. Si el cable porta una corriente I, demuestre que el número total de líneas de flujo magnético en el anillo es de

$$\Psi = \frac{\mu_o I h}{2\pi b}\left[b - a \ln \frac{a+b}{b}\right]$$

Calcule Ψ si $a = 30$ cm, $b = 10$ cm, $h = 5$ cm e $I = 10$ A.

7.26. Considere los campos arbitrarios siguientes. Infiera cuáles de ellos pueden representar un campo electrostático o magnetostático en el vacío.

a) $\mathbf{A} = y \cos ax\mathbf{a}_x + (y + e^{-x})\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{B} = \dfrac{20}{\rho}\mathbf{a}_\rho$

c) $\mathbf{C} = r^2 \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{a}_\phi$

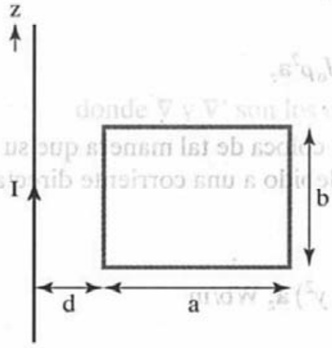


Figura 7.34. Para el problema 7.24.

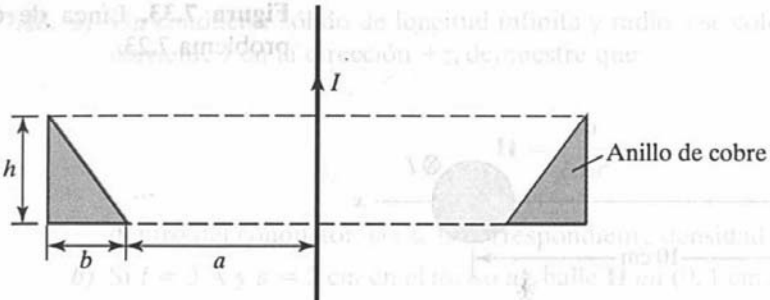


Figura 7.32. Sección transversal de un anillo de cobre que encierra a un cable recto muy largo; para el problema 7.25.

7.27. Repita el problema anterior con relación a los campos siguientes.

a) $\mathbf{D} = y^2 z\mathbf{a}_x + 2(x+1)yz\mathbf{a}_y - (x+1)z^2\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{E} = \dfrac{(z+1)}{\rho}\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho + \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}$

c) $\mathbf{F} = \dfrac{1}{r^2}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta)$

7.28. En el caso de una distribución de corriente en el vacío,

$$\mathbf{A} = (2x^2y + yz)\mathbf{a}_x + (xy^2 - xz^3)\mathbf{a}_y - (6xyz - 2x^2y^2)\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

a) Calcule **B**.

b) Halle el flujo magnético a través de la espira descrita por $x = 1, 0 < y, z < 2$.

c) Demuestre que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

7.29. El potencial magnético vectorial de una distribución de corriente en el vacío está dado por

$$\mathbf{A} = 15e^{-\rho}\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

Halle **H** en $(3, \pi/4, -10)$. Calcule el flujo a través de $\rho = 5, 0 \le \phi \le \pi/2, 0 \le z \le 10$.

7.30. Un conductor de radio a porta una corriente uniforme con $\mathbf{J} = J_o\mathbf{a}_z$. Demuestre que el potencial magnético vectorial respecto de $\rho > a$ es

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4}\mu_o J_o \rho^2 \mathbf{a}_z$$

7.31. Un conductor de longitud infinita de radio a se coloca de tal manera que su eje corre a lo largo del eje z. El potencial magnético vectorial debido a una corriente directa I_o que fluye a lo largo de $\mathbf{a}_z$ en el conductor está dado por

$$\mathbf{A} = \frac{-I_o}{4\pi a^2}\mu_o(x^2 + y^2)\,\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

Halle la **H** correspondiente. Compruebe su resultado mediante la ley de Ampère.

7.32. El potencial magnético vectorial de dos filamentos de corriente rectos infinitos paralelos en el vacío que portan igual corriente I en direcciones contrarias es

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{d - \rho}{\rho} \, \mathbf{a}_z$$

donde d es la distancia de separación entre ellos (uno de los cuales se halla a lo largo del eje z). Determine la correspondiente densidad de flujo magnético **B**.

7.33. Halle la densidad de corriente **J** para

$$\mathbf{A} = \frac{10}{\rho^2} \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

en el vacío.

7.34. Compruebe que el potencial magnético escalar en $(0, 0, z)$ debido a una espira circular de radio a, como se muestra en la figura 7.8*(a)*, es

$$V_m = \frac{I}{2}\left[1 - \frac{z}{[z^2 + a^2]^{1/2}}\right]$$

***7.35.** Una línea de transmisión coaxial se compone de tal manera que el radio del conductor interno es a y el conductor externo tiene radios $3a$ y $4a$. Determine el potencial magnético vectorial dentro del conductor externo. Adopte $A_z = 0$ respecto de $\rho = 3a$.

7.36. El eje z porta una corriente filamentosa de 12 A a lo largo de $\mathbf{a}_z$. Calcule V_m en $(4, 30°, -2)$ si $V_m = 0$ en $(10, 60°, 7)$.

7.37. El plano $z = -2$ porta una corriente de $50\mathbf{a}_y$ A/m. Si $V_m = 0$ en el origen, halle V_m en

a) $(-2, 0, 5)$
b) $(10, 3, 1)$

7.38. Compruebe en coordenadas cilíndricas que

a) $\nabla \times (\nabla V) = 0$
b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

7.39. Si $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y $R = |\mathbf{R}|$, demuestre que

$$\nabla \frac{1}{\mathbf{R}} = -\nabla' \frac{1}{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

donde ∇ y ∇' son los operadores con respecto a (x, y, z) y (x', y', z), respectivamente.

8 Fuerza, materiales y dispositivos magnéticos

Haz todo el bien posible,
por todos los medios,
de todas las formas,
en todos los sitios,
todas las veces,
a todos los seres,
siempre que puedas.

JOHN WESLEY

8.1. Introducción

Habiendo considerado las leyes y técnicas básicas de uso más frecuente en el cálculo del campo magnético **B** debido a elementos portadores de corriente, estamos preparados para estudiar la fuerza que ejerce un campo magnético sobre partículas cargadas, elementos de corriente y espiras. Tal estudio es importante para problemas relacionados con dispositivos eléctricos como amperímetros, voltímetros, galvanómetros, ciclotrones, plasmas, motores y generadores magnetohidrodinámicos. En este capítulo se dará la definición precisa de campo magnético, deliberadamente aplazada en el capítulo anterior, y se considerarán los conceptos de momentos y dipolo magnéticos.

Se examinarán asimismo los campos magnéticos en medios materiales, en oposición a los campos magnéticos en el vacío analizados en el capítulo anterior. Los resultados obtenidos en este último precisarán apenas unas cuantas modificaciones para dar cuenta de la presencia de materiales en un campo magnético. Finalmente, también se explicará lo relativo a inductores, inductancias, energía magnética y circuitos magnéticos.

8.2. Fuerzas debidas a campos magnéticos

La fuerza debida a campos magnéticos puede experimentarse en al menos tres formas: *a)* en una partícula cargada en movimiento en un campo **B**, *b)* en un elemento de corriente en un campo **B** externo y *c)* entre dos elementos de corriente.

A. Fuerza sobre una partícula cargada

Como se explicó en el capítulo 4, la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ sobre una carga eléctrica Q estacionaria o en movimiento en un campo eléctrico está dada por la ley experimental de Coulomb y se relaciona con la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ de la manera siguiente:

$$\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E} \tag{8.1}$$

Esto indica que si Q es positiva, $\mathbf{F}_e$ y $\mathbf{E}$ tienen la misma dirección.

Un campo magnético sólo puede ejercer fuerza sobre una carga en movimiento. Se ha comprobado que la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ experimentada por una carga Q en movimiento con una velocidad $\mathbf{u}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$ es

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{8.2}$$

Esto señala claramente que $\mathbf{F}_m$ es perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{B}$.

A partir de las ecuaciones (8.1) y (8.2) es posible comparar la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ y la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$. $\mathbf{F}_e$ es independiente de la velocidad de la carga y puede realizar trabajo sobre esta última y alterar su energía cinética. En cambio, $\mathbf{F}_m$ depende de la velocidad de la carga y es normal a ella. Además, no puede realizar trabajo sobre la carga, puesto que se encuentra en ángulos rectos con relación a la dirección de movimiento de la carga ($\mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = 0$), ni causar un incremento en la energía cinética de ésta. La magnitud de $\mathbf{F}_m$ es generalmente reducida en comparación con la de $\mathbf{F}_e$, salvo a altas velocidades.

En el caso de una carga Q en movimiento en presencia de campos tanto eléctrico como magnético, la fuerza total sobre la carga está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

o

$$\boxed{\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \tag{8.3}$$

Ésta es la *ecuación de la fuerza de Lorentz*.[1] En ella se relaciona la fuerza mecánica con la fuerza eléctrica. Si la masa de la partícula cargada en movimiento en los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ es m, por efecto de la segunda ley del movimiento de Newton

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{8.4}$$

La solución de esta ecuación es importante para determinar el movimiento de partículas cargadas en los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Téngase presente que, en tales campos, la transferencia de energía sólo puede ocurrir por medio del campo eléctrico. En la tabla 8.1 se ofrece un resumen de la fuerza ejercida sobre una partícula cargada.

Dado el estrecho paralelismo entre la ecuación (8.2) y la ecuación (8.1), la cual define al campo eléctrico, algunos autores y profesores prefieren iniciar sus disertaciones sobre la magnetostática con la ecuación (8.2), tal como las referentes a la electrostática suelen comenzar con la ley de la fuerza de Coulomb.

[1] Así llamada en honor a Hendrik Lorentz (1853-1928), el primero en aplicar esta ecuación al movimiento en el campo eléctrico.

Tabla 8.1. Fuerza sobre una partícula cargada.

Estado de la partícula	*Campo E*	*Campo B*	*Campos E y B combinados*
Estacionario	$Q\mathbf{E}$	—	$Q\mathbf{E}$
Móvil	$Q\mathbf{E}$	$Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$	$Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

B. Fuerza sobre un elemento de corriente

Para determinar la fuerza sobre un elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$ de un conductor portador de corriente debida al campo magnético $\mathbf{B}$, la ecuación (8.2) se modifica con base en el hecho de que en una corriente de convección [véase la ecuación (5.7)]:

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} \tag{8.5}$$

De acuerdo con la ecuación (7.5), asimismo, la relación entre los elementos de corriente está dada por:

$$I\,d\mathbf{l} = \mathbf{K}\,dS = \mathbf{J}\,dv \tag{8.6}$$

La combinación de las ecuaciones (8.5) y (8.6) da como resultado

$$I\,d\mathbf{l} = \rho_v \mathbf{u}\,dv = dQ\,\mathbf{u}$$

Alternativamente, $I\,d\mathbf{l} = \dfrac{dQ}{dt}\,d\mathbf{l} = dQ\,\dfrac{d\mathbf{l}}{dt} = dQ\,\mathbf{u}$

Por tanto,

$$\boxed{I\,d\mathbf{l} = dQ\,\mathbf{u}} \tag{8.7}$$

Esto indica que una carga elemental dQ que se mueve a una velocidad $\mathbf{u}$ (produciendo así el elemento de corriente de convección $dQ\,\mathbf{u}$) es equivalente a un elemento de corriente de conducción $I\,d\mathbf{l}$. En consecuencia, la fuerza sobre un elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$ se halla a partir de la ecuación (8.2) mediante el mero reemplazo de $Q\mathbf{u}$ por $I\,d\mathbf{l}$; es decir,

$$d\mathbf{F} = I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{8.8}$$

Si la corriente I fluye a través de una trayectoria cerrada L o circuito, la fuerza sobre el circuito está dada por

$$\boxed{\mathbf{F} = \oint_L I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B}} \tag{8.9}$$

Al usar la ecuación (8.8) u (8.9), téngase en cuenta que el campo magnético producido por el elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$ no ejerce fuerza sobre el propio elemento, de la misma manera en que una carga puntual no ejerce fuerza sobre sí. El campo $\mathbf{B}$ que ejerce fuerza sobre $I\,d\mathbf{l}$ se debe a otro elemento. En otras palabras, en la ecuación (8.8) u (8.9)

el campo **B** es externo al elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$. Si, además, en vez del elemento de corriente de línea $I\,d\mathbf{l}$ se tienen elementos de corriente superficial $\mathbf{K}\,dS$ o de corriente volumétrica $\mathbf{J}\,dv$, la aplicación de la ecuación (8.6) convierte a la ecuación (8.8) en

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K}\,dS \times \mathbf{B} \qquad \text{o} \qquad d\mathbf{F} = \mathbf{J}\,dv \times \mathbf{B} \tag{8.8a}$$

y la ecuación (8.9) en

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K}\,dS \times \mathbf{B} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{F} = \int_v \mathbf{J}\,dv \times \mathbf{B} \tag{8.9a}$$

Con fundamento en la ecuación (8.8),

El **campo magnético B** es la fuerza por unidad de elemento de corriente.

B también podría definirse, a partir de la ecuación (8.2), como el vector que satisface $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, así como el campo eléctrico **E** es la fuerza por unidad de carga, $\mathbf{F}_e/q$. Estas dos definiciones muestran que **B** describe las propiedades de fuerza de un campo magnético.

C. Fuerza entre dos elementos de corriente

Consideremos ahora la fuerza entre dos elementos $I_1\,d\mathbf{l}_1$ e $I_2\,d\mathbf{l}_2$. De acuerdo con la ley de Biot-Savart, ambos elementos de corriente producen campos magnéticos. Así, es posible hallar la fuerza $d(d\mathbf{F}_1)$ sobre el elemento $I_1\,d\mathbf{l}_1$ debida al campo $d\mathbf{B}_2$ producido por el elemento $I_2\,d\mathbf{l}_2$, como se indica en la figura 8.1. Con base en la ecuación (8.8),

$$d(d\mathbf{F}_1) = I_1\,d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_2 \tag{8.10}$$

Pero según la ley de Biot-Savart,

$$d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I_2\,d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}}}{4\pi R_{21}^2} \tag{8.11}$$

En consecuencia,

$$d(d\mathbf{F}_1) = \frac{\mu_o I_1\,d\mathbf{l}_1 \times (I_2\,d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}})}{4\pi R_{21}^2} \tag{8.12}$$

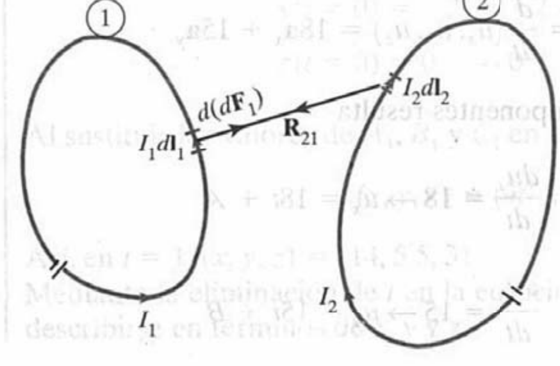


Figura 8.1. Fuerza entre dos espiras de corriente.

Esta ecuación es en esencia la ley de la fuerza entre dos elementos de corriente, análoga a la de Coulomb, la que a su vez expresa la fuerza entre dos cargas estacionarias. A partir de la ecuación (8.12), la fuerza total $\mathbf{F}_1$ sobre la espira de corriente 1 debida a la espira de corriente 2 de la figura 8.1 es

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_o I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2} \tag{8.13}$$

Aunque esta ecuación parece complicada, recuérdese que se basa en la ecuación (8.10). La realmente importante es la ecuación (8.9) u (8.10).

La fuerza $\mathbf{F}_2$ sobre la espira 2 debida al campo magnético $\mathbf{B}_1$ de la espira 1 se obtiene de la ecuación (8.13) mediante el intercambio de los subíndices 1 y 2. Es posible demostrar que $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$; así, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ cumplen la tercera ley de Newton, según la cual la acción y la reacción son iguales y opuestas. Vale mencionar que la ecuación (8.13) fue establecida experimentalmente por Oersted y Ampère, en tanto que Biot y Savart (colegas de Ampère) se redujeron a fundar en ella la ley que lleva su nombre.

Ejemplo 8.1

Una partícula cargada de 2 kg de masa y carga de 3 C se pone en movimiento en el punto (1, −2, 0) a una velocidad de $4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$ m/s en un campo eléctrico $12\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y$ V/m. En el instante $t = 1$ s, determine

a) La aceleración de la partícula.
b) Su velocidad.
c) Su energía cinética.
d) Su posición.

Solución:

a) Éste es un problema de valor inicial, pues en él se cuenta con los valores iniciales. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = Q\mathbf{E}$$

donde $\mathbf{a}$ es la aceleración de la partícula. Por tanto,

$$\mathbf{a} = \frac{Q\mathbf{E}}{m} = \frac{3}{2}(12\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y) = 18\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_x, u_y, u_z) = 18\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y$$

b) De la igualación de las componentes resulta

$$\frac{du_x}{dt} = 18 \rightarrow u_x = 18t + A \tag{8.1.1}$$

$$\frac{du_y}{dt} = 15 \rightarrow u_y = 15t + B \tag{8.1.2}$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0 \rightarrow u_z = C \tag{8.1.3}$$

donde A, B y C son constantes de integración. Pero en $t = 0$, $\mathbf{u} = 4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$. Así,

$$u_x(t = 0) = 4 \rightarrow 4 = 0 + A \quad \text{o} \quad A = 4$$
$$u_y(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \quad \text{o} \quad B = 0$$
$$u_z(t = 0) = 3 \rightarrow 3 = C$$

La sustitución de los valores de A, B y C en las ecuaciones (8.1.1) a (8.1.3) resulta en

$$\mathbf{u}(t) = (u_x, u_y, u_z) = (18t + 4, 15t, 3)$$

En consecuencia,

$$\mathbf{u}(t = 1\text{ s}) = 22\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \text{ m/s}$$

c) Energía cinética (EC) $= \frac{1}{2}m|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2}(2)(22^2 + 15^2 + 3^2)$

$= 718$ J

d) $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(x, y, z) = (18t + 4, 15t, 3)$

La igualación de las componentes produce

$$\frac{dx}{dt} = u_x = 18t + 4 \rightarrow x = 9t^2 + 4t + A_1 \tag{8.1.4}$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y = 15t \qquad \rightarrow y = 7.5t^2 + B_1 \tag{8.1.5}$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z = 3 \qquad \rightarrow z = 3t + C_1 \tag{8.1.6}$$

En $t = 0$, $(x, y, z) = (1, -2, 0)$; por tanto,

$$x(t = 0) = 1 \quad \rightarrow 1 \quad = 0 + A_1 \quad \text{o} \quad A_1 = 1$$
$$y(t = 0) = -2 \rightarrow -2 = 0 + B_1 \quad \text{o} \quad B_1 = -2$$
$$z(t = 0) = 0 \quad \rightarrow 0 \quad = 0 + C_1 \quad \text{o} \quad C_1 = 0$$

Al sustituir los valores de A_1, B_1 y C_1 en las ecuaciones (8.1.4) a (8.1.6) se obtiene

$$(x, y, z) = (9t^2 + 4t + 1, 7.5t^2 - 2, 3t) \tag{8.1.7}$$

Así, en $t = 1$, $(x, y, z) = (14, 5.5, 3)$.
Mediante la eliminación de t en la ecuación (8.1.7), el movimiento de la partícula puede describirse en términos de x, y y z.

Ejercicio 8.1

Una partícula cargada de 1 kg de masa y carga de 2 C se pone en movimiento en el origen a una velocidad inicial de cero en una región en la que $\mathbf{E} = 3\mathbf{a}_z$ V/m. Halle

a) La fuerza sobre la partícula.

b) El tiempo que ésta tarda en llegar al punto $P(0, 0, 12 \text{ m})$.

c) Su velocidad y aceleración en *P*.

d) Su energía cinética en *P*.

Respuestas: *a)* $6\mathbf{a}_z$ N, *b)* 2 s, *c)* $12\mathbf{a}_z$ m/s, $6\mathbf{a}_z$ m/s^2 y *d)* 72 J.

Ejemplo 8.2

Una partícula cargada de 2 kg de masa y 1 C se pone en movimiento en el origen a una velocidad de $3\mathbf{a}_y$ m/s y viaja en una región de campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 10\mathbf{a}_z$ Wb/m^2. En $t = 4$ s, determine

a) La velocidad y aceleración de la partícula.

b) La fuerza magnética sobre ella.

c) Su energía cinética (EC) y ubicación.

d) Su trayectoria eliminando *t*.

e) Demuestre finalmente que su energía cinética se mantiene constante.

Solución:

a) $\mathbf{F} = m\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{Q}{m}\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}(u_x\mathbf{a}_x + u_y\mathbf{a}_y + u_z\mathbf{a}_z) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5(u_y\mathbf{a}_x - u_x\mathbf{a}_y)$$

Al igualar las componentes se obtiene

$$\frac{du_x}{dt} = 5u_y \tag{8.2.1}$$

$$\frac{du_y}{dt} = -5u_x \tag{8.2.2}$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0 \rightarrow u_z = C_o \tag{8.2.3}$$

En las ecuaciones (8.2.1) y (8.2.2) es posible eliminar u_x o u_y obteniendo las segundas derivadas de una ecuación y usando la otra. Así

$$\frac{d^2u_x}{dt^2} = 5\frac{du_y}{dt} = -25u_x$$

o

$$\frac{d^2u_x}{dt^2} + 25u_x = 0$$

la cual es una ecuación diferencial lineal con solución (véase el caso C del ejemplo 6.5)

$$u_x = C_1 \cos 5t + C_2 \operatorname{sen} 5t \tag{8.2.4}$$

Con base en las ecuaciones (8.2.1) y (8.2.4),

$$5u_y = \frac{du_x}{dt} = -5C_1 \operatorname{sen} 5t + 5C_2 \cos 5t \tag{8.2.5}$$

o

$$u_y = -C_1 \operatorname{sen} 5t + C_2 \cos 5t$$

Se determinan ahora las constantes C_o, C_1 y C_2 aplicando las condiciones iniciales. En $t = 0$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{a}_y$. En consecuencia,

$$u_x = 0 \rightarrow 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$u_y = 3 \rightarrow 3 = -C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \rightarrow C_2 = 3$$

$$u_z = 0 \rightarrow 0 = C_o$$

La sustitución de los valores de C_o, C_1 y C_2 en las ecuaciones (8.2.3) a (8.2.5) produce

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (3 \operatorname{sen} 5t, 3\cos 5t, 0) \tag{8.2.6}$$

Por tanto,

$$\mathbf{u}(t = 4) = (3 \operatorname{sen} 20, 3 \cos 20, 0)$$
$$= 2.739\mathbf{a}_x + 1.224\mathbf{a}_y \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = (15 \cos 5t, -15 \operatorname{sen} 5t, 0)$$

y

$$\mathbf{a}(t = 4) = 6.101\mathbf{a}_x - 13.703\mathbf{a}_y \text{ m/s}^2$$

b)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = 12.2\mathbf{a}_x - 27.4\mathbf{a}_y \text{ N}$$

o

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = (1)(2.739\mathbf{a}_x + 1.224\mathbf{a}_y) \times 10\mathbf{a}_z$$
$$= 12.2\mathbf{a}_x - 27.4\mathbf{a}_y \text{ N}$$

c) $EC = 1/2m\,|\mathbf{u}|^2 = 1/2(2)\,(2.739^2 + 1.224^2) = 9\ \text{J}$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = 3\ \text{sen}\ 5t \rightarrow x = -\frac{3}{5}\cos 5t + b_1 \tag{8.2.7}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = 3\cos 5t \rightarrow y = \frac{3}{5}\ \text{sen}\ 5t + b_2 \tag{8.2.8}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow z = b_3 \tag{8.2.9}$$

donde b_1, b_2 y b_3 son constantes de integración. En $t = 0, (x, y, z) = (0, 0, 0)$, de manera que

$$x(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{3}{5}\cdot 1 + b_1 \rightarrow b_1 = 0.6$$

$$y(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = \frac{3}{5}\cdot 0 + b_2 \rightarrow b_2 = 0$$

$$z(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = b_3$$

Al sustituir los valores de b_1, b_2 y b_3 en las ecuaciones (8.2.7) a (8.2.9) se obtiene

$$(x, y, z) = (0.6 - 0.6\cos 5t, 0.6\ \text{sen}\ 5t, 0) \tag{8.2.10}$$

En $t = 4$ s,

$$(x, y, z) = (0.3552, 0.5478, 0)$$

d) A partir de la ecuación (8.2.10), se elimina t al observar que

$$(x - 0.6)^2 + y^2 = (0.6)^2\,(\cos^2 5t + \text{sen}^2\, 5t), \qquad z = 0$$

o

$$(x - 0.6)^2 + y^2 = (0.6)^2, \qquad z = 0$$

lo que equivale a un círculo en el plano $z = 0$, centrado en $(0.6, 0, 0)$ y con un radio de 0.6 m. Así, la partícula gira en una órbita alrededor de una línea del campo magnético.

e) $$EC = \frac{1}{2}m\,|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2}(2)\,(9\cos^2 5t + 9\ \text{sen}^2\, 5t) = 9\ \text{J}$$

lo que confirma que la energía cinética es igual en $t = 0$ y $t = 4$ s. Esto indica que el campo magnético uniforme no tiene ningún efecto sobre la energía cinética de la partícula.

Cabe hacer notar que la velocidad angular $\omega = QB/m$ y el radio de la órbita $r = u_o/\omega$, donde u_o es la velocidad inicial. Una interesante aplicación de la idea expuesta en este ejemplo es un método usual para enfocar un haz de electrones. Este método consiste en orientar un campo magnético uniforme en dirección paralela al haz deseado, como se muestra en la figura 8.2. Cada uno de los electrones que emergen del disparador de electrones sigue una trayectoria helicoidal y, por efecto de su eje, se impacta junto con los demás en el mismo punto focal. Si en ese punto se encontrara la pantalla de un tubo de rayos catódicos, en ella sólo aparecería una señal.

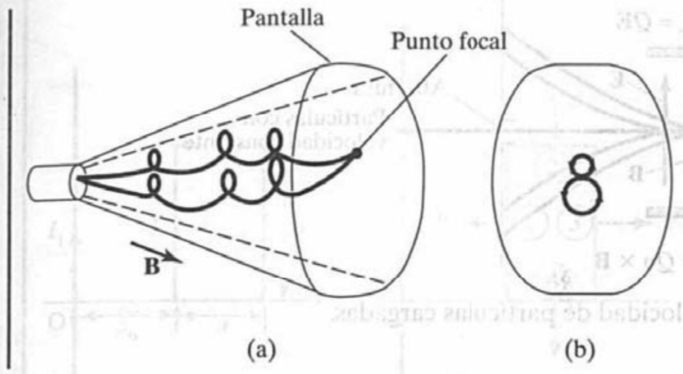


Figura 8.2. Enfoque magnético de un haz de electrones: **(a)** trayectorias helicoidales de los electrones, **(b)** vista final de las trayectorias.

Ejercicio 8.2

Un protón de masa m es proyectado en un campo uniforme $\mathbf{B} = B_o\mathbf{a}_z$ a una velocidad inicial $\alpha\mathbf{a}_x + \beta\mathbf{a}_z$. *a)* Halle las ecuaciones diferenciales que debe satisfacer el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$. *b)* Demuestre que una solución de estas ecuaciones es

$$x = \frac{\alpha}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t, \qquad y = \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t, \qquad z = \beta t$$

donde $\omega = eB_o/m$ y e es la carga en el protón. *c)* Demuestre que esta solución describe una hélice circular en el espacio.

Respuestas: *a)* $\dfrac{dx}{dt} = \alpha\cos\omega t$, $\dfrac{dy}{dt} = -\alpha\,\text{sen}\,\omega t$, $\dfrac{dz}{dt} = \beta$, *b)* y *c)* comprobación.

Ejemplo 8.3

Una partícula cargada se mueve a una velocidad uniforme de $4\mathbf{a}_x$ m/s en una región en la que $\mathbf{E} = 20\,\mathbf{a}_y$ V/m y $\mathbf{B} = B_o\mathbf{a}_z$ Wb/m². Determine B_o de manera que la velocidad de la partícula sea constante.

Solución:

Si la partícula se mueve a una velocidad constante, esto implica que su aceleración es de cero. En otras palabras, la partícula no experimenta ninguna fuerza neta. Por tanto,

$$0 = \mathbf{F} = m\mathbf{a} = Q\,(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$0 = Q\,(20\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_x \times B_o\mathbf{a}_z)$$

o

$$-20\mathbf{a}_y = -4B_o\mathbf{a}_y$$

Así, $B_o = 5$.

Este ejemplo ilustra el importante principio que se aplica en un filtro de velocidad como el que aparece en la figura 8.3. En esta aplicación, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{u}$ son mutuamente

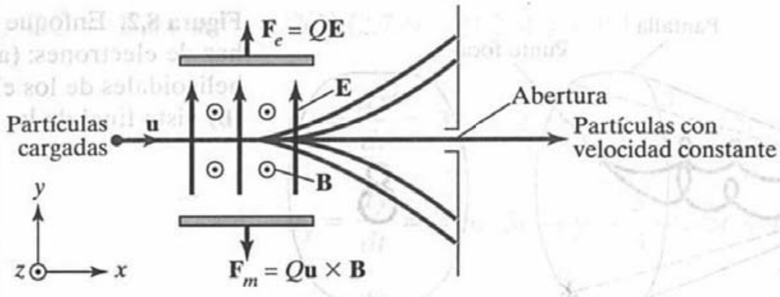


Figura 8.3. Filtro de velocidad de partículas cargadas.

perpendiculares, de modo que $Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ sigue la dirección contraria a $Q\mathbf{E}$, sin importar el signo de la carga. Cuando la magnitud de los dos vectores es igual,

$$QuB = QE$$

o

$$u = \frac{E}{B}$$

Ésta es la velocidad requerida (crítica) para equilibrar las dos partes de la fuerza de Lorentz. A esta velocidad, las partículas no son desviadas por los campos, sino "filtradas" a través de la abertura. A una velocidad distinta, las partículas se desvían hacia abajo o hacia arriba, dependiendo de si su velocidad es mayor o menor que la velocidad crítica.

Ejercicio 8.3

Campos uniformes **E** y **B** se orientan en ángulos rectos entre sí. Un electrón se mueve a una velocidad de 8×10^6 m/s en ángulos rectos respecto de ambos campos y pasa por ellos sin desviarse.

a) Si la magnitud de **B** es de 0.5 mWb/m², halle el valor de **E**.

b) ¿Este filtro será eficaz para cargas positivas y negativas y masa de cualquier valor?

Respuestas: *a)* 4 kV/m y *b)* sí.

Ejemplo 8.4

Una espira rectangular portadora de corriente I_2 se coloca en paralelo a un alambre filamentoso de longitud infinita portador de corriente I_1, como se indica en la figura 8.4(a). Demuestre que la fuerza que experimenta la espira está dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho_o + a}\right]\mathbf{a}_\rho \text{ N}$$

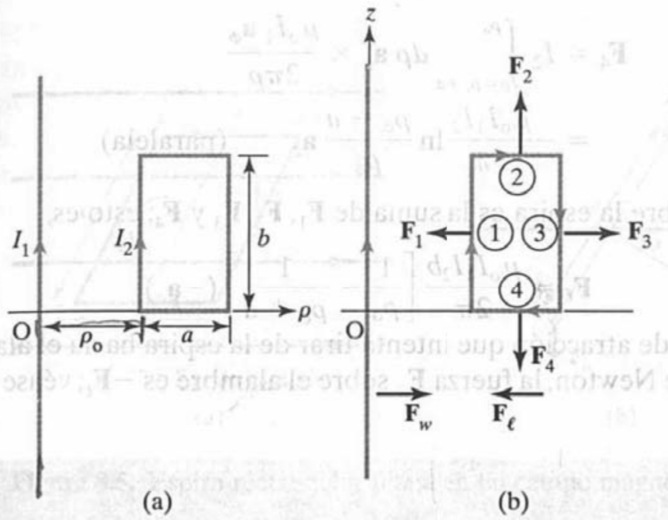


Figura 8.4. Para el ejemplo 8.4: **(a)** espira rectangular dentro del campo producido por un alambre de longitud infinita; **(b)** fuerzas que actúan sobre la espira y el alambre.

Solución:

Sea la fuerza sobre la espira

$$\mathbf{F}_\ell = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = I_2 \oint d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1$$

donde $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_4$ son las fuerzas ejercidas sobre los lados de la espira marcados en la figura 8.4*(b)* con los números 1, 2, 3 y 4, respectivamente. En virtud de la longitud infinita del alambre,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi\rho_o}\,\mathbf{a}_\phi$$

De ahí que,

$$\mathbf{F}_1 = I_2 \int d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 \int_{z=0}^{b} dz\,\mathbf{a}_z \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi\rho_o}\,\mathbf{a}_\phi$$

$$= -\frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi\rho_o}\,\mathbf{a}_\rho \quad \text{(de atracción)}$$

$\mathbf{F}_1$ es una fuerza de atracción porque se dirige al alambre; esto es, $\mathbf{F}_1$ corre a lo largo de $-\mathbf{a}_\rho$ en vista de que el lado 1 de la espira y el alambre portan corrientes de igual dirección. En forma similar,

$$\mathbf{F}_3 = I_2 \int d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 \int_{z=b}^{0} dz\,\mathbf{a}_z \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi(\rho_o + a)}\,\mathbf{a}_\phi$$

$$= \frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi(\rho_o + a)}\,\mathbf{a}_\rho \quad \text{(de repulsión)}$$

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \int_{\rho=\rho_o}^{\rho_o+a} d\rho\,\mathbf{a}_\rho \times \frac{\mu_o I_1 \mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho}$$

$$= \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \ln\frac{\rho_o + a}{\rho_o}\,\mathbf{a}_z \quad \text{(paralela)}$$

$$\mathbf{F}_4 = I_2 \int_{\rho=\rho_o+a}^{\rho_o} d\rho\, \mathbf{a}_\rho \times \frac{\mu_o I_1\, \mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho}$$

$$= -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{\rho_o + a}{\rho_o}\, \mathbf{a}_z \quad \text{(paralela)}$$

La fuerza total $\mathbf{F}_\ell$ sobre la espira es la suma de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_4$; esto es,

$$\mathbf{F}_\ell = \frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho_o + a}\right](-\mathbf{a}_\rho)$$

la cual es una fuerza de atracción que intenta tirar de la espira hacia el alambre. Por efecto de la tercera ley de Newton, la fuerza $\mathbf{F}_w$ sobre el alambre es $-\mathbf{F}_\ell$; véase la figura 8.4*(b)*.

Ejercicio 8.4

Con referencia al ejemplo 8.4, determine la fuerza experimentada por el alambre de longitud infinita si $I_1 = 10$ A, $I_2 = 5$ A, $\rho_o = 20$ cm, $a = 10$ cm y $b = 30$ cm.

Respuesta: $5\mathbf{a}_\rho$ μN.

8.3. Torque y momento magnético

Tras haber considerado la fuerza sobre una espira de corriente en un campo magnético, podemos determinar el torque sobre ella. El concepto de una espira de corriente que experimenta un torque en un campo magnético es de primera importancia para comprender el comportamiento de partículas cargadas orbitantes, motores de corriente directa y generadores. Si la espira se coloca en paralelo a un campo magnético, experimentará una fuerza que tenderá a hacerla girar.

El **torque T** (o momento mecánico de fuerza) sobre una espira es el producto vectorial de la fuerza **F** y el brazo del momento **r**.

Es decir,

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{8.14}$$

y sus unidades son newton-metros (N · m).

Apliquemos esta noción a una espira rectangular de longitud ℓ y ancho w situada en un campo magnético uniforme **B**, como se muestra en la figura 8.5*(a)*. En esta figura se advierte que $d\mathbf{l}$ es paralelo a **B** a lo largo de los lados 12 y 34 de la espira y que sobre esos lados no se ejerce fuerza alguna. Así,

$$\mathbf{F} = I\int_2^3 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} + I\int_4^1 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$= I\int_0^\ell dz\, \mathbf{a}_z \times \mathbf{B} + I\int_\ell^0 dz\, \mathbf{a}_z \times \mathbf{B}$$

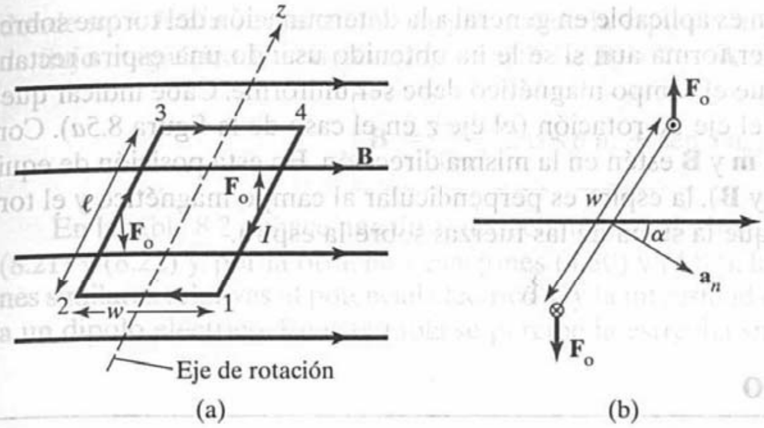


Figura 8.5. Espira rectangular plana en un campo magnético uniforme.

o

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_o - \mathbf{F}_o = 0 \tag{8.15}$$

donde $|\mathbf{F}_o| = IB\ell$, ya que $\mathbf{B}$ es uniforme. De este modo, sobre la espira en su totalidad no se ejerce ninguna fuerza. Sin embargo, $\mathbf{F}_o$ y $-\mathbf{F}_o$ actúan en diferentes puntos de la espira, por lo cual generan un par de fuerzas. Si la normal al plano de la espira forma un ángulo α con $\mathbf{B}$, como se muestra en la sección transversal de la figura 8.5*(b)*, el torque sobre la espira es

$$|\mathbf{T}| = |\mathbf{F}_o|\, w \text{ sen } \alpha$$

o

$$T = BI\ell w \text{ sen } \alpha \tag{8.16}$$

Pero $\ell w = S$, el área de la espira. Así,

$$T = BIS \text{ sen } \alpha \tag{8.17}$$

Definimos la cantidad

$$\boxed{\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n} \tag{8.18}$$

como el *momento magnético dipolar* (en A/m^2) de la espira. En la ecuación (8.18), $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal al plano de la espira y su dirección se determina con la regla de la mano derecha: los dedos en la dirección de la corriente y el pulgar a lo largo de $\mathbf{a}_n$.

El **momento magnético dipolar** es el producto de la corriente y el área de la espira; su dirección es normal a ésta.

Al introducir la ecuación (8.18) en la ecuación (8.17) se obtiene

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}} \tag{8.19}$$

Esta expresión es aplicable en general a la determinación del torque sobre una espira plana de cualquier forma aun si se le ha obtenido usando una espira rectangular. La única limitante es que el campo magnético debe ser uniforme. Cabe indicar que el torque sigue la dirección del eje de rotación (el eje z en el caso de la figura 8.5a). Con ello se reduce α a fin de que $\mathbf{m}$ y $\mathbf{B}$ estén en la misma dirección. En esta posición de equilibrio (igual dirección de $\mathbf{m}$ y $\mathbf{B}$), la espira es perpendicular al campo magnético y el torque será de cero, lo mismo que la suma de las fuerzas sobre la espira.

8.4. Dipolo magnético

A una barra imantada o a una pequeña espira filamentosa de corriente suele denominárseles *dipolo magnético*. La razón de ello y lo que se entiende por "pequeña" serán evidentes más adelante. Determinemos el campo magnético $\mathbf{B}$ en un punto de observación $P(r, \theta, \phi)$ debido a una espira circular portadora de corriente I, como se advierte en la figura 8.6. El potencial magnético vectorial en P es

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r} \tag{8.20}$$

Es posible demostrar que, en un campo lejano ($r >> a$, de modo que la espira parece pequeña en el punto de observación), $\mathbf{A}$ sólo cuenta con la componente ϕ y está dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o I \pi a^2 \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{a}_\phi}{4\pi r^2} \tag{8.21a}$$

o

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_o \, \mathbf{m} \times \mathbf{a}_r}{4\pi r^2}} \tag{8.21b}$$

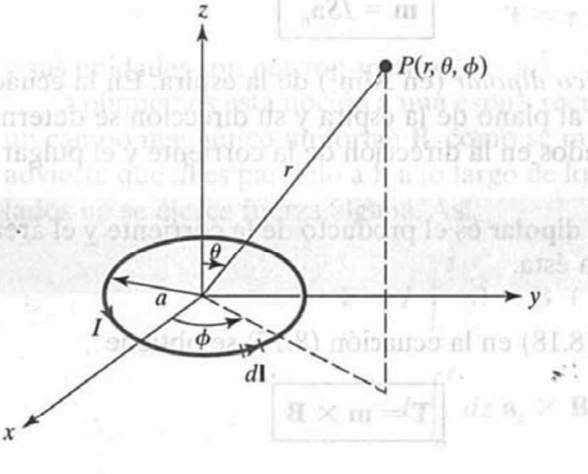


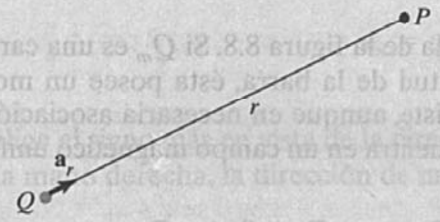
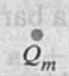
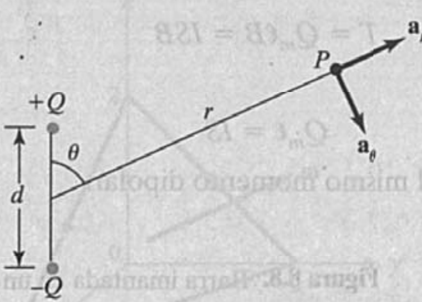
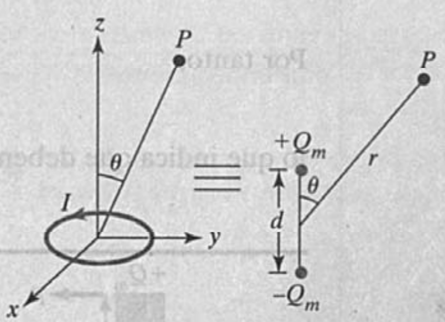
Figura 8.6. Campo magnético en P debido a una espira de corriente.

donde $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{a}_z$, el momento magnético de la espira, y $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\phi$. La densidad de flujo magnético $\mathbf{B}$ se determina a partir de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, de esta manera:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_o m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\, \mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta)} \tag{8.22}$$

En la tabla 8.2 se hace una ilustrativa comparación entre, por una parte, las ecuaciones (8.21) y (8.22) y, por la otra, las ecuaciones (4.80) y (4.82), las cuales contienen expresiones similares relativas al potencial eléctrico V y la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ debidos a un dipolo eléctrico. En esta tabla se percibe la estrecha similitud entre $\mathbf{B}$ como campo

Tabla 8.2. Comparación entre monopolos y dipolos eléctricos y magnéticos.

Eléctrico	*Magnético*
$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}$ $\mathbf{E} = \dfrac{Q\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_o r^2}$  Monopolo (carga puntual)	No existe  Monopolo (carga puntual)
$V = \dfrac{Q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ $\mathbf{E} = \dfrac{Qd}{4\pi\varepsilon_o r^3}(2\cos\theta\, \mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta)$  Dipolo (dos cargas puntuales)	$\mathbf{A} = \dfrac{\mu_o m \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\phi}{4\pi r^2}$ $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_o m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta)$  Dipolo (pequeña espira de corriente o barra imantada)

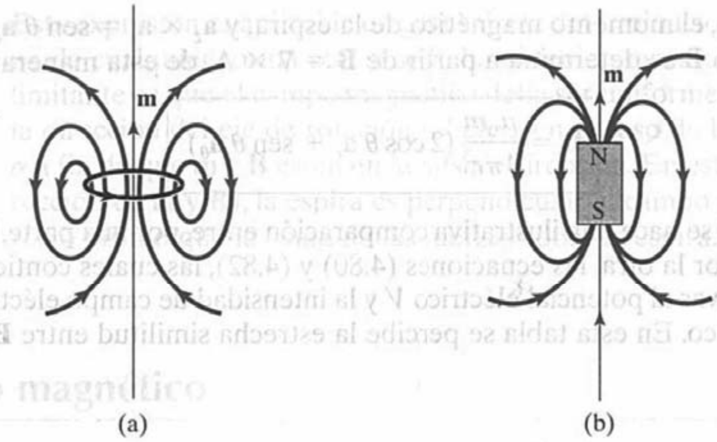


Figura 8.7. Líneas de **B** debidas a dipolos magnéticos: **(a)** pequeña espira de corriente con **m** = *I***S**, **(b)** barra imantada con **m** = $Q_m\boldsymbol{\ell}$.

lejano debido a una pequeña espira de corriente y **E** como campo lejano debido a un dipolo eléctrico. Así, es razonable concebir a una pequeña espira de corriente como un dipolo magnético. Las líneas de **B** debidas a un dipolo magnético son semejantes a las líneas de **E** debidas a un dipolo eléctrico. En la figura 8.7(*a*) se presentan las líneas de **B** alrededor del dipolo magnético **m** = *I***S**.

Una pequeña barra permanentemente imantada, como la que aparece en la figura 8.7(*b*), también puede considerarse un dipolo magnético. Obsérvese que las líneas de **B** debidas a la barra son similares a las debidas a la pequeña espira de corriente de la figura 8.7(*a*).

Considérese la barra imantada de la figura 8.8. Si Q_m es una carga magnética aislada (intensidad de polo) y ℓ la longitud de la barra, ésta posee un momento dipolar $Q_m\ell$. (Conviene destacar que Q_m sí existe, aunque en necesaria asociación con $-Q_m$; véase la tabla 8.2.) Cuando la barra se encuentra en un campo magnético uniforme **B**, experimenta un torque

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = Q_m\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \tag{8.23}$$

donde $\boldsymbol{\ell}$ apunta en dirección sur a norte. El torque tiende a alinear la barra con el campo magnético externo. La fuerza que actúa sobre la carga magnética está dada por

$$\mathbf{F} = Q_m\mathbf{B} \tag{8.24}$$

Puesto que tanto la pequeña espira de corriente como la barra imantada producen dipolos magnéticos, son equivalentes si producen el mismo torque en un campo **B** dado; es decir, cuando

$$T = Q_m\ell B = ISB \tag{8.25}$$

Por tanto,

$$Q_m\ell = IS \tag{8.26}$$

lo que indica que deben tener el mismo momento dipolar.

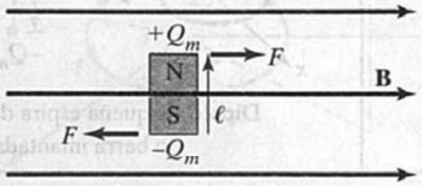


Figura 8.8. Barra imantada en un campo magnético externo.

Ejemplo 8.5

Determine el momento magnético del circuito eléctrico formado por la espira triangular de la figura 8.9.

Solución:

Con base en el problema 1.18(*c*), la ecuación de un plano está dada por $Ax + By + Cz + D = 0$, donde $D = -(A^2 + B^2 + C^2)$. Puesto que los puntos (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2) se sitúan en el plano, deben satisfacer la ecuación del plano, con lo cual será posible determinar las constantes A, B, C y D. De esto resulta $x + y + z = 2$ como el plano en el que se ubica la espira. Así, puede usarse

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n$$

donde

$$S = \text{área de la espira} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) \text{ sen } 60°$$
$$= 4 \text{ sen } 60°$$

Si la superficie del plano se define por medio de una función,

$$f(x, y, z) = x + y + z - 2 = 0,$$

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \pm \frac{(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{3}}$$

Se elige el signo más en vista de la dirección de la corriente en la espira (aplicando la regla de la mano derecha, la dirección de **m** es la que se indica en la figura 8.9). Por tanto,

$$\mathbf{m} = 5\,(4 \text{ sen } 60°)\,\frac{(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{3}}$$
$$= 10(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

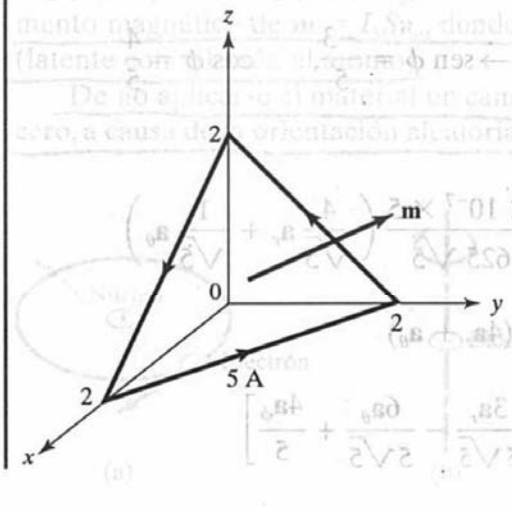


Figura 8.9. Espira triangular para el ejemplo 8.5.

Ejercicio 8.5

Una bobina rectangular de 10 cm² de área y que porta una corriente de 50 A se ubica en el plano $2x + 6y - 3z = 7$, de manera que su momento magnético se aleja del origen. Calcule su momento magnético.

Respuesta: $(1.429\mathbf{a}_x + 4.286\mathbf{a}_y - 2.143\mathbf{a}_z) \times 10^{-2}$ A · m²

Ejemplo 8.6

Una pequeña espira de corriente L_1 con momento magnético $5\mathbf{a}_z$ A·m² se localiza en el origen, mientras que otra, L_2, con momento magnético $3\mathbf{a}_y$ A·m² se localiza en $(4, -3, 10)$. Determine el torque sobre L_2.

Solución:

El torque $\mathbf{T}_2$ sobre la espira L_2 se debe al campo $\mathbf{B}_1$ producido por la espira L_1. Así,

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}_1$$

Puesto que $\mathbf{m}_1$ respecto de la espira L_1 se halla a lo largo de $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{B}_1$ se calcula mediante la ecuación (8.22):

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o m_1}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta)$$

Para transformar $\mathbf{m}_2$ de coordenadas cartesianas en esféricas, se recurre a la ecuación (2.23):

$$\mathbf{m}_2 = 3\mathbf{a}_y = 3\,(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi)$$

En $(4, -3, 10)$,

$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\rho}{z} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{-3}{4} \rightarrow \operatorname{sen}\phi = \frac{-3}{5}, \qquad \cos\phi = \frac{4}{5}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{4\pi\, 625\sqrt{5}}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_r + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_\theta\right)$$

$$= \frac{10^{-7}}{625}(4\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta)$$

$$\mathbf{m}_2 = 3\left[-\frac{3\mathbf{a}_r}{5\sqrt{5}} - \frac{6\mathbf{a}_\theta}{5\sqrt{5}} + \frac{4\mathbf{a}_\phi}{5}\right]$$

y

$$\mathbf{T} = \frac{10^{-7}(3)}{625\,(5\sqrt{5})}(-3\mathbf{a}_r - 6\mathbf{a}_\theta + 4\sqrt{5}\mathbf{a}_\phi) \times (4\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\phi)$$
$$= 4.293 \times 10^{-11}(-6\mathbf{a}_r + 38.78\mathbf{a}_\theta + 24\mathbf{a}_\phi)$$
$$= -0.258\mathbf{a}_r + 1.665\mathbf{a}_\theta + 1.03\mathbf{a}_\phi \text{ nN}\cdot\text{m}$$

Ejercicio 8.6

Si la bobina del ejercicio 8.5 está rodeada por un campo uniforme de $0.6\mathbf{a}_x + 0.4\mathbf{a}_y + 0.5\mathbf{a}_z$ Wb/m^2,

a) Halle el torque sobre la bobina.

b) Demuestre que el torque sobre la bobina alcanza su máximo valor si la bobina se sitúa en el plano $2x - 8y + 4_z = \sqrt{84}$. Calcule el valor del torque máximo.

Respuestas: *a)* $0.03\mathbf{a}_x - 0.02\mathbf{a}_y - 0.02\mathbf{a}_z$ N · m y *b)* 0.04387 N · m.

8.5. Magnetización en materiales

Seguiremos aquí un esquema semejante al de la polarización de materiales en un campo eléctrico. Nuestro modelo atómico será el de un electrón en órbita alrededor de un núcleo positivo.

Sabemos que cualquier material se compone de átomos. Cada átomo consta a su vez de electrones que describen órbitas alrededor de un núcleo positivo central, al mismo tiempo que rotan (o giran) en torno a su propio eje. Al girar, así, alrededor del núcleo —como se ilustra en la figura 8.10*(a)*— y de su propio eje —como en la figura 8.10*(b)*—, los electrones producen un campo magnético interno. Estos dos movimientos de los electrones producen campos magnéticos internos $\mathbf{B}_i$ similares al producido por la espira de corriente que aparece en la figura 8.11. La espira de corriente equivalente tiene un momento magnético de $\mathbf{m} = I_b S \mathbf{a}_n$, donde S es el área de la espira e I_b la corriente latente (latente con relación al átomo).

De no aplicarse al material un campo **B** externo, la suma de las diversas **m** es igual a cero, a causa de la orientación aleatoria, como se observa en la figura 8.12*(a)*. En cambio,

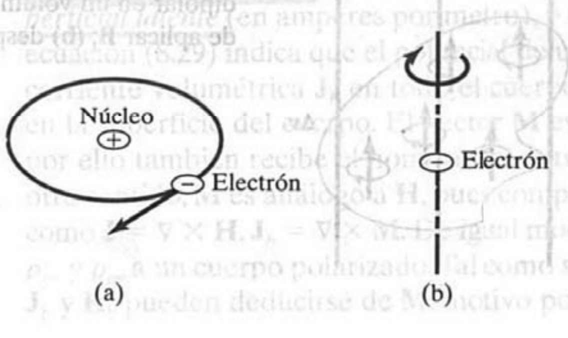


Figura 8.10. **(a)** Electrón en órbita alrededor del núcleo; **(b)** giro de un electrón.

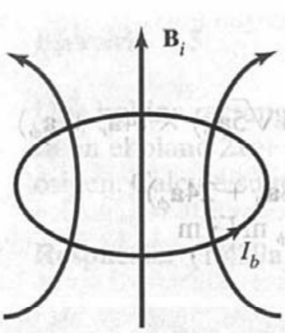


Figura 8.11. Espira circular de corriente equivalente al movimiento del electrón de la figura 8.10.

cuando se aplica un campo **B** externo, los momentos de los electrones se alinean en mayor o menor medida con **B**, de modo que el momento magnético neto no es de cero, como se ilustra en la figura 8.12*(b)*.

La **magnetización M** (en amperes/metro) es el momento magnético dipolar por unidad de volumen.

Si hay N átomos en un volumen dado Δv y el átomo de orden k posee un momento magnético $\mathbf{m}_k$,

$$\boxed{\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{m}_k}{\Delta v}} \tag{8.27}$$

Se dice que un medio está magnetizado cuando en cualquiera de sus puntos **M** no es igual a cero. En el caso de un volumen diferencial dv', el momento magnético es $d\mathbf{m} = \mathbf{M}\,dv'$. Con base en la ecuación (8.21*b*), el potencial magnético vectorial debido a $d\mathbf{m}$ es

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_o \mathbf{M} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}\,dv' = \frac{\mu_o \mathbf{M} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}\,dv'$$

De acuerdo con la ecuación (7.46),

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = \nabla' \frac{1}{R}$$

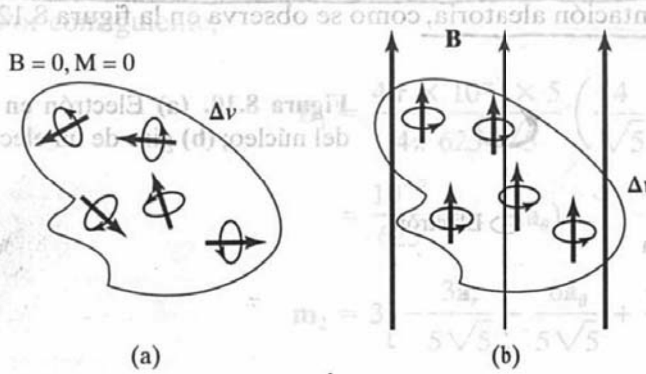


Figura 8.12. Momento magnético dipolar en un volumen Δv: **(a)** antes de aplicar **B**; **(b)** después de aplicar **B**.

Por tanto,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R}\, dv' \tag{8.28}$$

Del empleo de la ecuación (7.48) resulta

$$\mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R} = \frac{1}{R}\nabla' \times \mathbf{M} - \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R}$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (8.28) se obtiene

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R}\, dv' - \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R}\, dv'$$

La aplicación de la identidad vectorial

$$\int_{v'} \nabla' \times \mathbf{F}\, dv' = -\oint_{S'} \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$$

a la segunda integral produce

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R}\, dv' + \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n}{R}\, dS' \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \frac{\mathbf{J}_b\, dv'}{R} + \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_b\, dS'}{R}\end{aligned} \tag{8.29}$$

De la comparación de la ecuación (8.29) con las ecuaciones (7.42) y (7.43) (tras eliminar los signos de prima) se desprende que

$$\boxed{\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}} \tag{8.30}$$

y

$$\boxed{\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n} \tag{8.31}$$

donde $\mathbf{J}_b$ es la *densidad de corriente volumétrica latente* o *densidad de corriente volumétrica de magnetización* (en amperes por metro cuadrado); $\mathbf{K}_b$, la *densidad de corriente superficial latente* (en amperes por metro), y $\mathbf{a}_n$ un vector unitario normal a la superficie. La ecuación (8.29) indica que el potencial de un cuerpo magnético se debe a una densidad de corriente volumétrica $\mathbf{J}_b$ en todo el cuerpo y a una densidad de corriente superficial $\mathbf{K}_b$ en la superficie del cuerpo. El vector $\mathbf{M}$ es análogo a la polarización $\mathbf{P}$ en dieléctricos y por ello también recibe el nombre de *densidad de polarización magnética* del medio. En otro sentido, $\mathbf{M}$ es análogo a $\mathbf{H}$, pues comparten las mismas unidades. A este respecto, así como $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$, $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$. De igual modo, $\mathbf{J}_b$ y $\mathbf{K}_b$ son a un cuerpo magnetizado lo que ρ_{pv} y ρ_{ps} a un cuerpo polarizado. Tal como salta a la vista en las ecuaciones (8.29) a (8.31), $\mathbf{J}_b$ y $\mathbf{K}_b$ pueden deducirse de $\mathbf{M}$, motivo por el cual no se les emplea con frecuencia.

En el vacío, $\mathbf{M} = 0$, de lo que se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{o} \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o}\right) = \mathbf{J}_f \tag{8.32}$$

donde $\mathbf{J}_f$ es la densidad de corriente volumétrica libre. En un medio material, $\mathbf{M} \neq 0$, como resultado de lo cual $\mathbf{B}$ cambia; así,

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o}\right) = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b = \mathbf{J}$$

$$= \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}$$

o

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})} \tag{8.33}$$

La relación expresada en la ecuación (8.33) es válida para todos los materiales, sean lineales o no. Los conceptos de linealidad, isotropía y homogeneidad que se presentaron en la sección 5.7 con referencia a los medios dieléctricos también son aplicables a los medios magnéticos. En los materiales lineales, $\mathbf{M}$ (en A/m) depende linealmente de $\mathbf{H}$, de modo que

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}} \tag{8.34}$$

donde χ_m es una cantidad adimensional (la razón de M a H) llamada *susceptibilidad magnética* del medio. En mayor o menor medida, ésta es un valor del grado de susceptibilidad (o sensibilidad) del material a un campo magnético. La sustitución de la ecuación (8.34) en la ecuación (8.33) produce

$$\mathbf{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \tag{8.35}$$

o

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_o \mu_r \mathbf{H}} \tag{8.36}$$

donde

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_o}} \tag{8.37}$$

La cantidad $\mu = \mu_o \mu_r$ se llama *permeabilidad* del material y se mide en henrys/metro; el henry es la unidad de inductancia y se definirá más adelante. La cantidad adimensional μ_r es la razón de la permeabilidad de un material dado a la del vacío y se llama *permeabilidad relativa* del material.

Téngase presente que las relaciones expresadas en las ecuaciones (8.34) a (8.37) sólo rigen sobre materiales lineales e isotrópicos. Si son anisotrópicos (como los cristales), la ecuación (8.33) se mantiene, pero las ecuaciones (8.34) a (8.37) pierden validez. En este caso, μ tiene nueve términos (a la manera de ε en la ecuación 5.37) y, por tanto, los campos $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{M}$ dejan de ser paralelos.

†8.6. Clasificación de los materiales magnéticos

La susceptibilidad magnética χ_m o la permeabilidad relativa μ_r permiten clasificar a los materiales de acuerdo con sus propiedades o comportamiento magnéticos. Un material es *no magnético* si $\chi_m = 0$ (o $\mu_r = 1$); de lo contrario, es magnético. El vacío, el aire y los materiales con $\chi_m = 0$ (o $\mu_r \approx 1$) son no magnéticos.

Los materiales magnéticos se agrupan en tres grandes clases: diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. Esta clasificación general se describe en la figura 8.13. Un material es *diamagnético* si $\mu_r \lesssim 1$ (es decir, si su χ_m negativa es muy reducida), *paramagnético* si $\mu_r \gtrsim 1$ (su χ_m positiva es muy reducida) y *ferromagnético* si $\mu_r >> 1$ (su χ_m positiva es muy alta). En la tabla B.3 del apéndice *B* se presentan los valores de μ_r de algunos materiales. De ella se desprende que, para efectos prácticos, en los materiales diamagnéticos y paramagnéticos $\mu_r \simeq 1$, de modo que se les puede considerar lineales y no magnéticos. Los materiales ferromagnéticos siempre son no lineales y magnéticos, excepto cuando su temperatura excede de la temperatura curie (la cual se explicará más adelante). La razón de esto se volverá evidente si examinamos más de cerca estos tres tipos de materiales magnéticos.

El *diamagnetismo* ocurre en los materiales cuyos campos magnéticos debidos a los movimientos electrónicos de orbitación y rotación se anulan totalmente entre sí. En consecuencia, el momento magnético permanente (o intrínseco) de cada átomo es de cero, de manera que un campo magnético ejerce débil influencia sobre el material de que se trate. En la mayoría de los materiales diamagnéticos (bismuto, plomo, cobre, silicio, diamante y cloruro de sodio, por ejemplo), χ_m es del orden de -10^{-5}. A temperaturas cercanas al cero absoluto, en ciertos tipos de materiales —llamados *superconductores*— ocurre el "diamagnetismo perfecto": $\chi_m = -1$ o $\mu_r = 0$ y $B = 0$. Así, los superconductores no pueden contener campos magnéticos.[2] Con excepción de los superconductores, los materiales diamagnéticos tienen escaso uso práctico. Aunque en algunos el efecto diamagnético es eclipsado por otros efectos mayores, todos ellos exhiben diamagnetismo.

Los materiales cuyos átomos presentan un momento magnético permanente no equivalente a cero pueden ser paramagnéticos o ferromagnéticos. El *paramagnetismo* ocurre

$\chi_m = -1$

$\Rightarrow 1 + \chi_m = \mu_r$

$= 0$

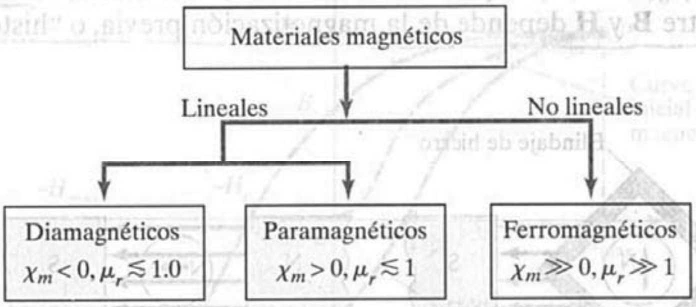


Figura 8.13. Clasificación de los materiales magnéticos.

[2] Un excelente tratamiento de los superconductores se encuentra en M. A. Plonus, *Applied Electromagnetics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1978, pp. 375-388. Asimismo, la edición de agosto de 1989 de *Proceedings of IEEE* se dedicó a la superconductividad.

en los materiales cuyos campos magnéticos producidos por la orbitación o rotación de los electrones no se anulan por completo. A diferencia del diamagnetismo, el paramagnetismo depende de la temperatura. En la mayor parte de los materiales paramagnéticos (como aire, platino, tungsteno y potasio), χ_m es el orden de $+10^{-5}$ a $+10^{-3}$ y depende de la temperatura. Tales materiales hallan aplicación en maseres.

El *ferromagnetismo* ocurre en los materiales cuyos átomos poseen un momento magnético permanente relativamente alto. Se llaman ferromagnéticos porque el hierro es el más conocido de ellos, aunque en este grupo también se cuentan el cobalto, el níquel y sus aleaciones, todos ellos muy útiles en la práctica. Los materiales ferromagnéticos poseen las propiedades siguientes:

1. Pueden ser magnetizados en muy alto grado por un campo magnético.
2. Preservan un considerable nivel de magnetización cuando se les aparta del campo magnético.
3. Pierden sus propiedades y se convierten en materiales paramagnéticos lineales cuando la temperatura aumenta por encima de la *temperatura curie*. Así, si un imán permanente se calienta más allá de su temperatura curie (de 770 °C en el hierro), pierde por completo su magnetización.
4. Son no lineales; es decir, en ellos no rige la relación constitutiva $\mathbf{B} = \mu_o\mu_r\mathbf{H}$, porque en su caso μ_r depende de $\mathbf{B}$ y no puede representarse con un solo valor.

De este modo, los valores de μ_r de materiales ferromagnéticos referidos en la tabla B3 son meramente simbólicos. La μ_r del níquel, por ejemplo, varía de 50 a 600 en algunas condiciones.

A semejanza de los conductores, como se mencionó en la sección 5.9, materiales ferromagnéticos como el hierro y el acero se usan para proteger delicados dispositivos eléctricos contra perturbaciones de campos magnéticos intensos. En la figura 8.14*(a)* se ilustra la protección de una brújula con hierro, uno de los blindajes o empantallamientos más comunes en los que se emplea este material. Sin tal protección, la brújula proporcionaría una lectura incorrecta por efecto del campo magnético externo, como se observa en la figura 8.14*(b)*. Un blindaje perfecto implicaría un material de permeabilidad infinita.

Aunque $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ impera sobre todos los materiales, en los ferromagnéticos la relación entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ depende de la magnetización previa, o "historia magnética",

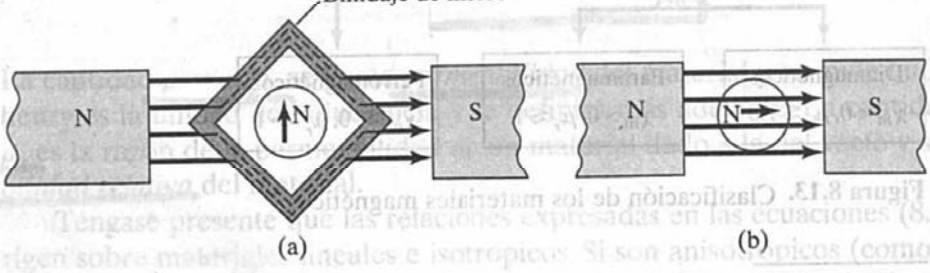


Figura 8.14. Blindaje o apantallamiento magnético: **(a)** protección de una brújula con un blindaje de hierro; **(b)** lectura incorrecta de la brújula en ausencia del blindaje.

del material. En estas condiciones, la relación entre **B** y **H** dista de ser lineal (caso en el que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) y sólo es posible representarla con una *curva de magnetización*, o curva *B-H*.

En la figura 8.15 aparece una curva *B-H* común. Adviértase, ante todo, la relación no lineal entre B y H. En cualquier punto de la curva, además, μ está dada por la razón B/H y no por dB/dH, la pendiente de la curva.

Suponiendo un estado preliminar no magnetizado del material ferromagnético asociado con la curva *B-H* de la figura 8.15, el desplazamiento de H (a causa de un incremento de corriente) de O a la aplicación de la intensidad máxima de campo $H_{\text{máx}}$ produce la curva OP. Esta curva se llama curva *virgen* o *curva inicial de magnetización*. Si H decreciera tras alcanzar la saturación en P, B no seguiría la curva inicial, sino que se rezagaría de H. Este fenómeno del rezago de B respecto de H se conoce como *histéresis* (término de raíz griega que significa "retraso").

Si H disminuye a cero, B no se reducirá a cero sino a B_r, la *densidad de flujo permanente*. El valor de B_r depende de $H_{\text{máx}}$, la intensidad de campo máxima aplicada. B_r es la causa de que existan imanes permanentes. Si H aumenta en sentido negativo (por invertir la dirección de la corriente), B adoptará el valor de cero cuando H adopte el de H_c, la *intensidad coercitiva de campo*. De los materiales con H_c reducida se dice que son magnéticamente resistentes. También el valor de H_c depende de $H_{\text{máx}}$.

Un aumento adicional de H en sentido negativo hasta llegar a Q y la posterior inversión de su dirección hasta arribar a P produce una curva cerrada llamada *espira de histéresis*. La forma de esta espira varía de un material a otro. La de algunos ferritos, por ejemplo, es casi rectangular, de modo que se les utiliza como dispositivos magnéticos de almacenamiento de información de computadoras digitales. El área de la espira de histéresis determina la pérdida de energía (pérdida por histéresis) por unidad de volumen durante un ciclo de magnetización periódica de los materiales ferromagnéticos. Tal pérdida ocurre en forma de calor. Así, es deseable que los materiales de generadores, motores y transformadores eléctricos registren una espira de histéresis espigada y esbelta, a fin de asegurar pérdidas mínimas de energía.

$\mu = \frac{B}{H}$

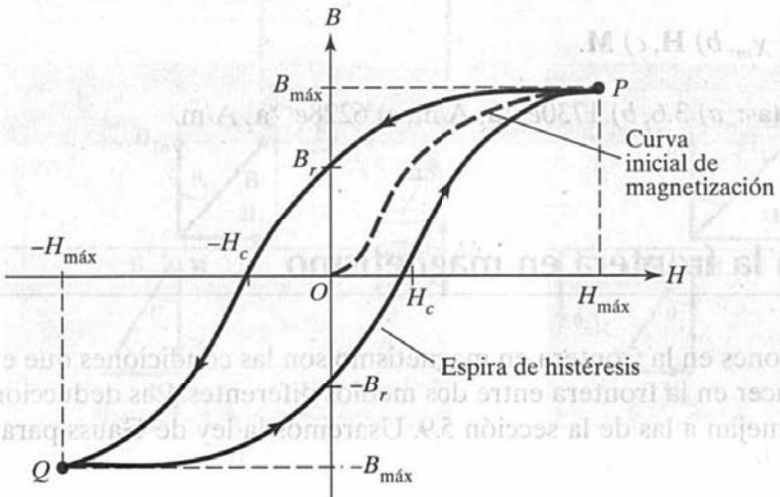


Figura 8.15. Curva de magnetización (*B-H*) común.

Ejemplo 8.7 La región $0 \leq z \leq 2$ m está ocupada por una lámina infinita de material permeable ($\mu_r = 2.5$). Si $\mathbf{B} = 10y\mathbf{a}_x - 5x\mathbf{a}_y$ mWb/m² dentro de la lámina, determine: *a)* $\mathbf{J}$, *b)* $\mathbf{J}_b$, *c)* $\mathbf{M}$, *d)* $\mathbf{K}_b$ en $z = 0$.

Solución:

a) Por definición,

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_o \mu_r} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}(2.5)}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{10^6}{\pi}(-5 - 10)10^{-3}\mathbf{a}_z = -4.775\mathbf{a}_z \text{ kA/m}^2$$

b) $\mathbf{J}_b = \chi_m \mathbf{J} = (\mu_r - 1)\mathbf{J} = 1.5(-4.775\mathbf{a}_z) \cdot 10^3$
$= -7.163\mathbf{a}_z$ kA/m²

c) $$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_o \mu_r} = \frac{1.5(10y\mathbf{a}_x - 5x\mathbf{a}_y) \cdot 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}(2.5)}$$
$= 4.775y\mathbf{a}_x - 2.387x\mathbf{a}_y$ kA/m

d) $\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$. Puesto que $z = 0$ es el lado inferior de la lámina que ocupa $0 \leq z \leq 2$, $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_z$. Por tanto,

$$\mathbf{K}_b = (4.775y\mathbf{a}_x - 2.387x\mathbf{a}_y) \times (-\mathbf{a}_z)$$
$$= 2.387x\mathbf{a}_x + 4.775y\mathbf{a}_y \text{ kA/m}$$

Ejercicio 8.7

En cierta región ($\mu = 4.6\mu_o$),

$$\mathbf{B} = 10e^{-y}\mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$$

Halle: *a)* χ_m, *b)* $\mathbf{H}$, *c)* $\mathbf{M}$.

Respuestas: *a)* 3.6, *b)* $1730e^{-y}\mathbf{a}_z$ A/m, *c)* $6228e^{-y}\mathbf{a}_z$ A/m.

8.7. Condiciones en la frontera en magnetismo

Las condiciones en la frontera en magnetismo son las condiciones que el campo $\mathbf{H}$ (o $\mathbf{B}$) debe satisfacer en la frontera entre dos medios diferentes. Las deducciones que se harán aquí se asemejan a las de la sección 5.9. Usaremos la ley de Gauss para campos magnéticos

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{8.38}$$

y la ley de los circuitos de Ampère

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \tag{8.39}$$

Considérese la frontera entre los medios magnéticos 1 y 2, caracterizados respectivamente por μ_1 y μ_2, que aparecen en la figura 8.16. Tras aplicar la ecuación (8.38) al cilindro (superficie gaussiana) de la figura 8.16*(a)* y conceder que $\Delta h \to 0$ se obtiene

$$B_{1n}\,\Delta S - B_{2n}\,\Delta S = 0 \tag{8.40}$$

Así,

$$\boxed{\boxed{\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}} \qquad \text{o} \qquad \mu_1\mathbf{H}_{1n} = \mu_2\mathbf{H}_{2n}} \tag{8.41}$$

puesto que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. La ecuación (8.41) indica que la componente normal de $\mathbf{B}$ es continua y la componente normal de $\mathbf{H}$ es discontinua en la frontera; $\mathbf{H}$ sufre cierto cambio en la interfaz.

De igual manera, al aplicar la ecuación (8.39) a la trayectoria cerrada *abcda* de la figura 8.16*(b)*, donde se supone que la corriente superficial K en la frontera es normal a esa trayectoria, se obtiene

$$\begin{aligned} K \cdot \Delta w = H_{1t} \cdot \Delta w + H_{1n} \cdot \frac{\Delta h}{2} + H_{2n} \cdot \frac{\Delta h}{2} \\ - H_{2t} \cdot \Delta w - H_{2n} \cdot \frac{\Delta h}{2} - H_{1n} \cdot \frac{\Delta h}{2} \end{aligned} \tag{8.42}$$

Conforme $\Delta h \to 0$, la ecuación (8.42) conduce a

$$H_{1t} - H_{2t} = K \tag{8.43}$$

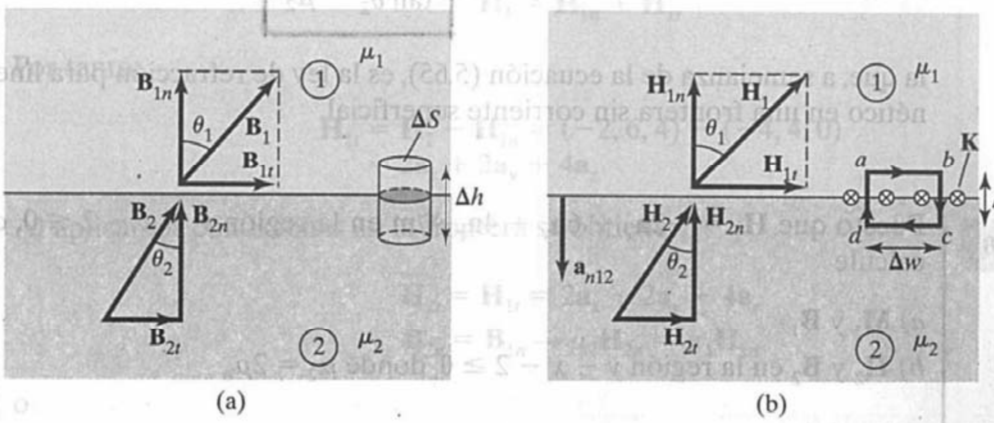


Figura 8.16. Condiciones en la frontera entre dos medios magnéticos: **(a)** con relación a **B**; **(b)** con relación a **H**.

Esto indica que la componente tangencial de **H** también es discontinua. La ecuación (8.43) puede expresarse en términos de B, de esta forma

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = K \tag{8.44}$$

En la generalidad de los casos, la ecuación (8.43) se convierte en

$$\boxed{(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}} \tag{8.45}$$

donde $\mathbf{a}_{n12}$ es un vector unitario normal a la interfaz y se dirige del medio 1 al 2. Si la frontera está libre de corriente o los medios no son conductores (puesto que K es la densidad de corriente libre), $K = 0$ y la ecuación (8.43) se convierte en

$$\boxed{\boxed{\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}} \quad \text{o} \quad \frac{\mathbf{B}_{1t}}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B}_{2t}}{\mu_2}} \tag{8.46}$$

Así, la componente tangencial de **H** es continua, mientras que la de **B** es discontinua en la frontera.

Si estos campos forman un ángulo θ con la normal a la interfaz, la ecuación (8.41) resulta en

$$B_1 \cos\theta_1 = B_{1n} = B_{2n} = B_2 \cos\theta_2 \tag{8.47}$$

en tanto que la ecuación (8.46) produce

$$\frac{B_1}{\mu_1} \operatorname{sen}\theta_1 = H_{1t} = H_{2t} = \frac{B_2}{\mu_2} \operatorname{sen}\theta_2 \tag{8.48}$$

La división de la ecuación (8.48) entre la ecuación (8.47) da como resultado

$$\boxed{\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \tag{8.49}$$

la que, a semejanza de la ecuación (5.65), es la ley de refracción para líneas de flujo magnético en una frontera sin corriente superficial.

Ejemplo 8.8

Puesto que $\mathbf{H}_1 = -2\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ A/m en la región $y - x - 2 \le 0$, donde $\mu_1 = 5\mu_o$, calcule

a) $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{B}_1$
b) $\mathbf{H}_2$ y $\mathbf{B}_2$ en la región $y - x - 2 \ge 0$, donde $\mu_2 = 2\mu_o$

Solución:
En virtud de que $y - x - 2 = 0$ es un plano, $y - x \le 2$ o $y \le x + 2$ es la región 1 en la figura 8.17. Esto puede confirmarse con un punto en tal región. Por ejemplo, el origen (0, 0)

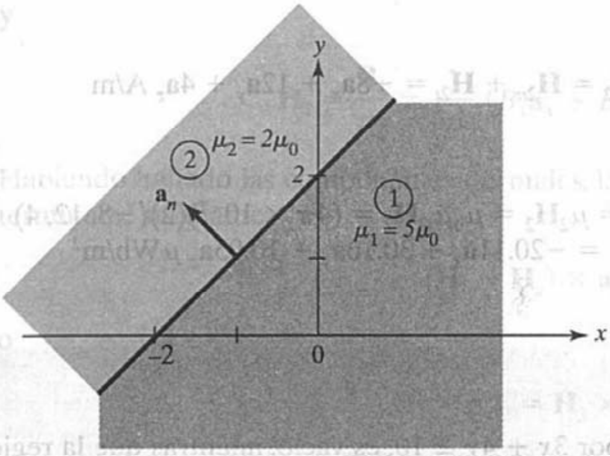


Figura 8.17. Para el ejemplo 8.8.

se sitúa en ella, ya que $0 - 0 - 2 < 0$. Si concedemos que la superficie del plano está descrita por $f(x, y) = y - x - 2$, un vector unitario normal al plano está dado por

$$\mathbf{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_x}{\sqrt{2}}$$

a)
$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 = \chi_{m1}\mathbf{H}_1 &= (\mu_{r1} - 1)\,\mathbf{H}_1 = (5 - 1)(-2, 6, 4)\\ &= -8\mathbf{a}_x + 24\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z \text{ A/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 = \mu_1\mathbf{H}_1 &= \mu_o\mu_{r1}\mathbf{H}_1 = 4\pi \times 10^{-7}(5)(-2, 6, 4)\\ &= -12.57\mathbf{a}_x + 37.7\mathbf{a}_y + 25.13\mathbf{a}_z\ \mu\text{Wb/m}^2\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{1n} = (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_n)\mathbf{a}_n &= \left[(-2, 6, 4) \cdot \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}\right]\frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}\\ &= -4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y\end{aligned}$$

Pero

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{1n} + \mathbf{H}_{1t}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{1n} &= (-2, 6, 4) - (-4, 4, 0)\\ &= 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Al aplicar las condiciones en la frontera se obtiene

$$\mathbf{H}_{2t} = \mathbf{H}_{1t} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n} \rightarrow \mu_2\mathbf{H}_{2n} = \mu_1\mathbf{H}_{1n}$$

o

$$\mathbf{H}_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\mathbf{H}_{1n} = \frac{5}{2}(-4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y) = -10\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y$$

Así,

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2n} + \mathbf{H}_{2t} = -8\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2 = \mu_2\mathbf{H}_2 = \mu_o\mu_{r2}\mathbf{H}_2 &= (4\pi \times 10^{-7})(2)(-8, 12, 4)\\ &= -20.11\mathbf{a}_x + 30.16\mathbf{a}_y + 10.05\mathbf{a}_z \ \mu\text{Wb/m}^2\end{aligned}$$

Ejercicio 8.8

La región 1, descrita por $3x + 4y \geq 10$, es vacío, mientras que la región 2, descrita por $3x + 4y \leq 10$, es un material magnético para el cual $\mu \simeq 10\mu_0$. Suponiendo que la frontera entre el material y el vacío está libre de corriente, halle $\mathbf{B}_2$ si $\mathbf{B}_1 = 0.1\mathbf{a}_x + 0.4\mathbf{a}_y + 0.2\mathbf{a}_z$ Wb/m².

Respuesta: $-1.052\mathbf{a}_x + 1.264\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ Wb/m².

Ejemplo 8.9

El plano xy funge como interfaz entre dos medios diferentes. El medio 1 ($z < 0$) está ocupado por un material con $\mu_r = 6$, y el medio 2 ($z > 0$) por otro con $\mu_r = 4$. Si la interfaz porta corriente $(1/\mu_0)\ \mathbf{a}_y$ mA/m y $\mathbf{B}_2 = 5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z$ mWb/m², halle $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{B}_1$.

Solución:

En el ejemplo anterior, como $\mathbf{K} = 0$ procedía emplear la ecuación (8.46). En este ejemplo, en cambio, $\mathbf{K} \neq 0$, así que debe recurrirse a la ecuación (8.45) además de la (8.41). Considérese que en la figura 8.18 se ilustra este problema. Sea $\mathbf{B}_1 = (B_x, B_y, B_z)$ en mWb/m².

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n} = 8\mathbf{a}_z \rightarrow B_z = 8 \tag{8.8.1}$$

Pero

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} = \frac{1}{4\mu_o}(5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z) \text{ mA/m} \tag{8.8.2}$$

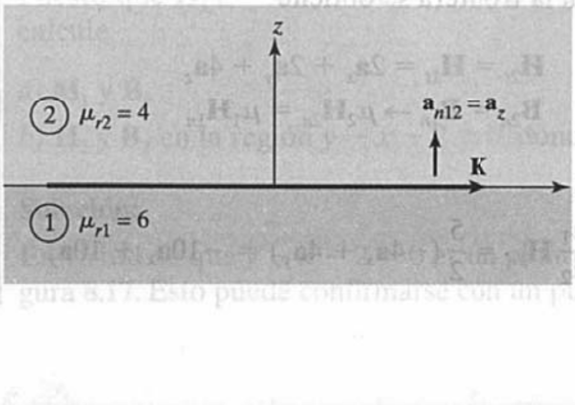


Figura 8.18. Para el ejemplo 8.9.

y

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{1}{6\mu_o}(B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z)\ \text{mA/m} \tag{8.8.3}$$

Habiendo hallado las componentes normales, las componentes tangenciales pueden determinarse mediante

Eslabonamiento de flujo

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$

o

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{a}_{n12} + \mathbf{K} \tag{8.8.4}$$

Al sustituir las ecuaciones (8.8.2) y (8.8.3) en la ecuación (8.8.4) se obtiene

Medio lineal

$$\frac{1}{6\mu_o}(B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z = \frac{1}{4\mu_o}(5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z + \frac{1}{\mu_o}\mathbf{a}_y$$

La igualación de las componentes produce

$$B_y = 0, \qquad \frac{-B_x}{6} = \frac{-5}{4} + 1 \qquad \text{o} \qquad B_x = \frac{6}{4} = 1.5 \tag{8.8.5}$$

Con base en las ecuaciones (8.8.1) y (8.8.5),

Inductancia

$$\mathbf{B}_1 = 1.5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z\ \text{mWb/m}^2$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_o}(0.25\mathbf{a}_x + 1.33\mathbf{a}_z)\ \text{mA/m}$$

y

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_o}(1.25\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z)\ \text{mA/m}$$

Nótese que H_{1x} es $(1/\mu_o)$ mA/m menor que H_{2x}, a causa de la lámina de corriente, y también que $B_{1n} = B_{2n}$.

Energía magnética almacenada en el inductor

Ejercicio 8.9

Un vector unitario normal de la región 2 ($\mu = 2\mu_o$) a la región 1 ($\mu = \mu_o$) es $\mathbf{a}_{n21} = (6\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z)/7$. Si $\mathbf{H}_1 = 10\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$ A/m y $\mathbf{H}_2 = H_{2x}\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ A/m, determine

a) $\mathbf{H}_{2x}$

b) La densidad de corriente superficial $\mathbf{K}$ en la interfaz

c) Los ángulos que $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ forman con la normal a la interfaz.

Respuestas: *a)* 5.833, *b)* $4.86\mathbf{a}_x - 8.64\mathbf{a}_y + 3.95\mathbf{a}_z$ A/m y *c)* 76.27°, 77.62°.

8.8. Inductores e inductancias

Un circuito (o trayectoria conductora cerrada) portador de corriente I produce un campo magnético $\mathbf{B}$, el cual genera un flujo $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ que pasa por cada vuelta del circuito, como se muestra en la figura 8.19. Si el circuito posee N vueltas idénticas, definimos el *eslabonamiento de flujo* λ como

$$\boxed{\lambda = N\Psi} \tag{8.50}$$

Eslabonamiento de flujo

Asimismo, si el medio que circunda al circuito es lineal, el eslabonamiento de flujo λ es proporcional a la corriente I que lo produce; es decir,

$$\lambda \propto I$$

$$\lambda = LI \tag{8.51}$$

Medio lineal

donde L es una constante de proporcionalidad llamada *inductancia* del circuito. La inductancia L es una propiedad de la disposición física del circuito. Un circuito o parte de un circuito con inductancia se denomina *inductor*. A partir de las ecuaciones (8.50) y (8.51), la inductancia L de un inductor puede definirse como la razón del eslabonamiento de flujo magnético λ a la corriente I a través del inductor; esto es,

$$[L] = H = \frac{Wb}{A} \qquad \boxed{L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}} \tag{8.52}$$

Inductancia

La unidad de inductancia es el henry (H), equivalente a webers/ampere. Puesto que es una unidad muy grande, la inductancia suele expresarse en milihenrys (mH).

La inductancia definida por la ecuación (8.52) se llama *autoinductancia*, ya que es el propio inductor el que produce los eslabonamientos. En forma similar a la capacitancia, la inductancia puede considerarse una medida de la cantidad de energía magnética almacenada en un inductor. En la teoría de circuitos, la energía magnética (en joules) almacenada en un inductor se expresa como

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{8.53}$$

Energía Magnética almacenada en un inductor

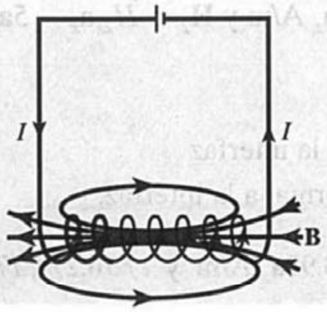


Figura 8.19. Campo magnético **B** producido por un circuito.

o

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2}} \tag{8.54}$$

Así, la autoinductancia de un circuito puede definirse o calcularse con base en consideraciones de energía.

Si en lugar de uno se tienen dos circuitos portadores de corriente I_1 e I_2, como se ilustra en la figura 8.20, entre ellos se da una interacción magnética. Se producen así cuatro flujos componentes: Ψ_{11}, Ψ_{12}, Ψ_{21} y Ψ_{22}. El flujo Ψ_{12}, por ejemplo, es el flujo que pasa por el circuito 1 debido a la corriente I_2 en el circuito 2. Si $\mathbf{B}_2$ es el campo debido a I_2 y S_1 en el área del circuito 1, entonces

$$\Psi_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} \tag{8.55}$$

La *inductancia mutua* M_{12} es la razón del eslabonamiento de flujo $\lambda_{12} = N_1\Psi_{12}$ en el circuito 1 a la corriente I_2; es decir,

$$\boxed{M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_2} = \frac{N_1\Psi_{12}}{I_2}} \tag{8.56}$$

De igual modo, la inductancia mutua M_{21} se define como los eslabonamientos de flujo del circuito 2 por unidad de corriente I_1; es decir,

$$M_{21} = \frac{\lambda_{21}}{I_1} = \frac{N_2\Psi_{21}}{I_1} \tag{8.57a}$$

Medio lineal

Con sustento en conceptos de energía es posible demostrar que si el medio que rodea los circuitos es lineal (esto es, en ausencia de material ferromagnético),

$$M_{12} = M_{21} \tag{8.57b}$$

Medio lineal

La inductancia mutua M_{12} o M_{21} se expresa en henrys y no debe confundirse con el vector de magnetización $\mathbf{M}$, el cual se expresa en amperes/metro.

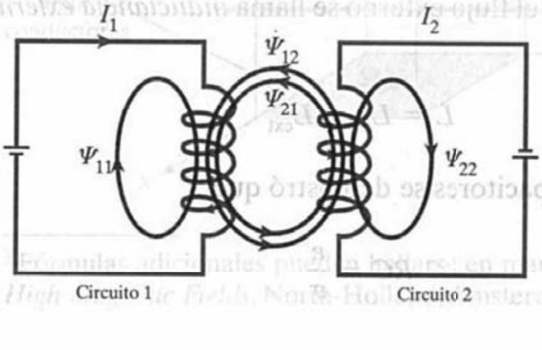


Figura 8.20. Interacción magnética entre dos circuitos.

La autoinductancia de los circuitos 1 y 2 se define respectivamente como

$$L_1 = \frac{\lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \Psi_1}{I_1} \tag{8.58}$$

y

$$L_2 = \frac{\lambda_{22}}{I_2} = \frac{N_2 \Psi_2}{I_2} \tag{8.59}$$

donde $\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}$ y $\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22}$. La energía total en el campo magnético es la suma de las energías debidas a L_1, L_2 y M_{12} (o M_{21}); es decir,

+ I_1, I_2 ref. $\vec{B}$
− contrario

$$\begin{aligned} W_m &= W_1 + W_2 + W_{12} \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M_{12} I_1 I_2 \end{aligned} \tag{8.60}$$

Se adopta el signo positivo si las corrientes I_1 y I_2 fluyen de manera que los campos magnéticos de los dos circuitos se refuerzan entre sí. Si las corrientes fluyen de manera que los campos magnéticos se oponen, se adopta el signo negativo.

Como ya se mencionó, un inductor es un conductor dispuesto en forma adecuada para almacenar energía magnética. Toroides, solenoides, líneas de transmisión coaxiales y líneas de transmisión de alambres paralelos son ejemplos comunes de inductores. Su inductancia puede determinarse con un procedimiento similar al que se emplea respecto de la capacitancia de un capacitor (o condensador). La autoinductancia L de un inductor dado se halla siguiendo estos pasos:

1. Se elige el sistema de coordenadas conveniente.
2. Se presupone que el inductor porta corriente I.
3. Se determina **B** con base en la ley de Biot-Savart (o de Ampère si hay simetría) y se calcula Ψ a partir de $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.
4. Por último, se halla L a partir de $L = \dfrac{\lambda}{I} = \dfrac{N\Psi}{I}$.

La inductancia mutua entre dos circuitos se calcula mediante un procedimiento similar.

En un inductor como una línea de transmisión coaxial o de alambres paralelos, la inductancia producida por el flujo interno del conductor se llama *inductancia interna* L_{in}, mientras que la producida por el flujo externo se llama *inductancia externa* L_{ext}. La inductancia total L es

$$L = L_{in} + L_{ext} \tag{8.61}$$

Así como en el caso de los capacitores se demostró que

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{6.35}$$

es posible demostrar que

$$\boxed{L_{ext}C = \mu\varepsilon} \tag{8.62}$$

En consecuencia, L_{ext} puede calcularse con la ecuación (8.62) si se conoce C.

En la tabla 8.3 se presenta un conjunto de fórmulas para calcular la inductancia de algunos elementos fundamentales de circuitos. Todas ellas pueden deducirse siguiendo los pasos descritos anteriormente.[3]

8.9. Energía magnética

Tras haber deducido la energía potencial en un campo electrostático como

$$W_E = \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{2}\int \varepsilon_o E^2\,dv \tag{4.96}$$

sería deseable deducir una expresión similar para la energía en un campo magnetostático. Un método simple para ello consiste en recurrir a la energía magnética en el campo de un inductor. De acuerdo con la ecuación (8.53),

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{8.53}$$

La energía se almacena en el campo magnético **B** del inductor. Ahora sería deseable expresar la ecuación (8.53) en términos de **B** o **H**.

Considérese el volumen diferencial en un campo magnético que se presenta en la figura 8.21. Concedamos que las superficies superior e inferior de tal volumen están recubiertas con láminas conductoras con corriente ΔI.

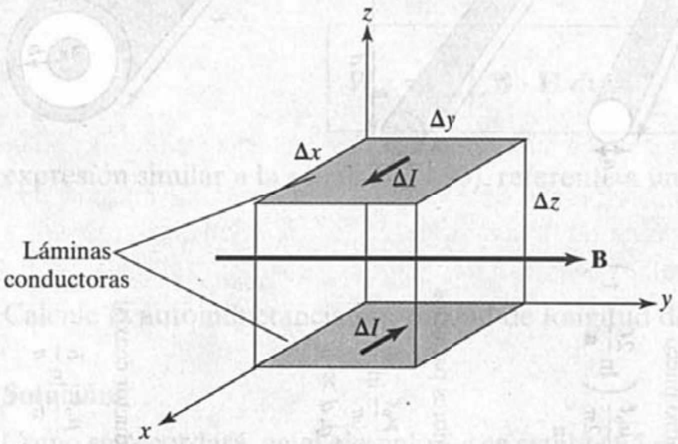


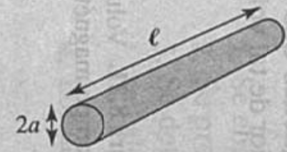
Figura 8.21. Volumen diferencial en un campo magnético.

[3] Fórmulas adicionales pueden hallarse en manuales eléctricos estándar o en H. Knoepfel, *Pulsed High Magnetic Fields*, North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 312-324.

Tabla 8.3. Conjunto de fórmulas de inductancia de elementos comunes.

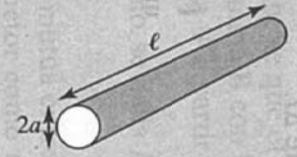
1. Alambre

$$L = \frac{\mu_o \ell}{8\pi}$$



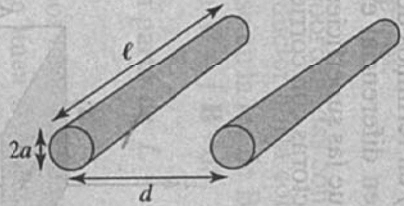
2. Cilindro hueco

$$L = \frac{\mu_o \ell}{2\pi}\left(\ln\frac{2\ell}{\mathbf{a}} - 1\right)$$
$$\ell \gg \mathbf{a}$$



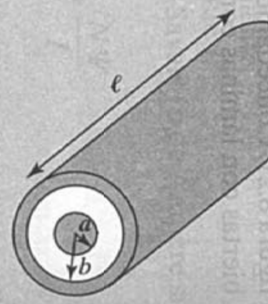
3. Alambres paralelos

$$L = \frac{\mu_o \ell}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$
$$\ell \gg d, d \gg a$$



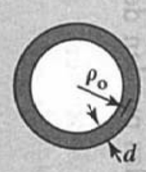
4. Conductor coaxial

$$L = \frac{\mu_o \ell}{\pi}\ln\frac{b}{a}$$



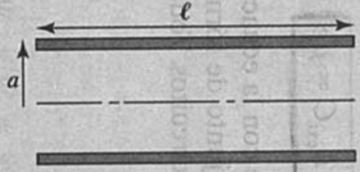
5. Espira circular

$$L = \frac{\mu_o \ell}{2\pi}\left(\ln\frac{4\ell}{d} - 2.45\right)$$
$$\ell = 2\pi\rho_o, \rho_o \gg d$$



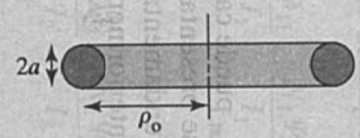
6. Solenoide

$$L = \frac{\mu_o N^2 S}{\ell}$$
$$\ell \gg a$$



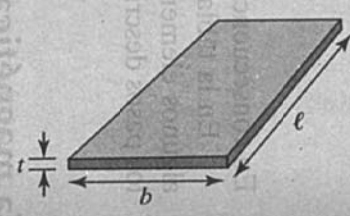
7. Toro (de sección transversal circular)

$$L = \mu_o N^2\left[\rho_o - \sqrt{\rho_o^2 - a^2}\right]$$



8. Lámina

$$L = \mu_o\, 2\ell\left(\ln\frac{2\ell}{b + t} + 0.5\right)$$



Supongamos asimismo que toda la región está ocupada por tales volúmenes diferenciales. A partir de la ecuación (8.52), cada volumen posee una inductancia

$$\Delta L = \frac{\Delta \Psi}{\Delta I} = \frac{\mu H \, \Delta x \, \Delta z}{\Delta I} \tag{8.63}$$

donde $\Delta I = H \, \Delta y$. La sustitución de la ecuación (8.63) en la ecuación (8.53) produce

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \Delta L \, \Delta I^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \tag{8.64}$$

o

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \, \Delta v$$

La densidad de energía magnetostática w_m (en J/m^3) se define como

$$w_m = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta v} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

De ahí que,

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{B^2}{2\mu} \tag{8.65}$$

Así, la energía en un campo magnetostático en un medio lineal es

$$W_m = \int w_m \, dv$$

o

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv = \frac{1}{2} \int \mu H^2 \, dv} \tag{8.66}$$

expresión similar a la ecuación (4.96), referente a un campo electrostático.

Ejemplo 8.10

Calcule la autoinductancia por unidad de longitud de un solenoide de longitud infinita.

Solución:

Como se recordará, en el ejemplo 7.4 se estableció que en el caso de un solenoide de longitud infinita, el flujo magnético dentro del solenoide por unidad de longitud es

$$B = \mu H = \mu I n$$

donde $n = N/\ell$ = número de vueltas por unidad de longitud. Si S es el área de la sección transversal del solenoide, el flujo total a través de la sección transversal es

$$\Psi = BS = \mu InS$$

Puesto que este flujo corresponde sólo a una unidad de longitud del solenoide, el eslabonamiento por unidad de longitud es

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\ell} = n\Psi = \mu n^2 IS$$

y, en consecuencia, la inductancia por unidad de longitud es

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\lambda'}{I} = \mu n^2 S$$

$$\boxed{L' = \mu n^2 S} \qquad \text{H/m}$$

Ejercicio 8.10

Un solenoide muy largo con sección transversal de 2 × 2 cm tiene un núcleo de hierro ($\mu_r = 1000$) y 4000 vueltas/metro. Si porta una corriente de 500 mA, encuentre

a) Su autoinductancia por metro.

b) La energía por metro almacenada en su campo.

Respuestas: *a)* 8.042 H/m y *b)* 1.005 J/m.

Ejemplo 8.11

Determine la autoinductancia de un cable coaxial de radio interno a y radio externo b.

Solución:

La autoinductancia del inductor puede hallarse de dos maneras: siguiendo los cuatro pasos descritos en la sección 8.8 o mediante las ecuaciones (8.54) y (8.66).

Método 1. Considérese la sección transversal del cable que aparece en la figura 8.22. De acuerdo con la ecuación (7.29), la aplicación de la ley de los circuitos de Ampère produce respecto de la región 1 ($0 \le \rho \le a$)

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2}\,\mathbf{a}_\phi$$

y respecto de la región 2 ($a \le \rho \le b$)

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\phi$$

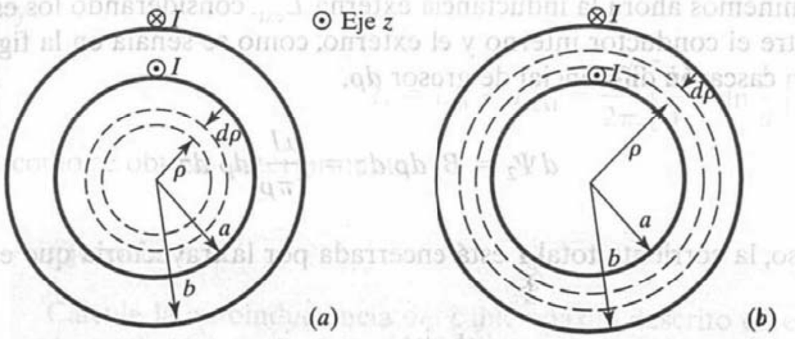


Figura 8.22. Sección transversal del cable coaxial del ejemplo 8.11: **(a)** respecto de la región 1, $0 < \rho < a$; **(b)** respecto de la región 2, $a < \rho < b$.

Determinemos primero la inductancia interna L_{in}, considerando los eslabonamientos de flujo debidos al conductor interno. A partir de la figura 8.22*(a)*, el flujo que sale de un cascarón diferencial de grosor $d\rho$ es

$$d\Psi_1 = B_1\, d\rho\, dz = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2}\, d\rho\, dz$$

El eslabonamiento de flujo es $d\Psi_1$ multiplicado por la razón que hay entre el área dentro de la trayectoria en la que el flujo está encerrado y el área total; es decir,

$$d\lambda_1 = d\Psi_1 \cdot \frac{I_{\text{enc}}}{I} = d\Psi_1 \cdot \frac{\pi \rho^2}{\pi a^2}$$

ya que I está uniformemente distribuida en la sección transversal para efectos de excitación de corriente directa. Así, los eslabonamientos de flujo totales dentro del elemento de flujo diferencial son

$$d\lambda_1 = \frac{\mu I \rho\, d\rho\, dz}{2\pi a^2} \cdot \frac{\rho^2}{a^2}$$

En cuanto a la longitud ℓ del cable,

$$\lambda_1 = \int_{\rho=0}^{a} \int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I \rho^3\, d\rho\, dz}{2\pi a^4} = \frac{\mu I \ell}{8\pi}$$

$$L_{\text{in}} = \frac{\lambda_1}{I} = \frac{\mu \ell}{8\pi} \tag{8.11.1}$$

La inductancia interna por unidad de longitud, dada por

$$\boxed{L'_{\text{in}} = \frac{L_{\text{in}}}{\ell} = \frac{\mu}{8\pi}} \quad \text{H/m} \tag{8.11.2}$$

es independiente del radio del conductor o alambre. De este modo, las ecuaciones (8.11.1) y (8.11.2) también son aplicables a la determinación de la inductancia de un conductor recto de longitud infinita y radio finito.

Determinemos ahora la inductancia externa L_{ext}, considerando los eslabonamientos de flujo entre el conductor interno y el externo, como se señala en la figura 8.22(*b*). En cuanto a un cascarón diferencial de grosor $d\rho$,

$$d\Psi_2 = B_2\, d\rho\, dz = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\, d\rho\, dz$$

En este caso, la corriente total I está encerrada por la trayectoria que encierra al flujo. Por tanto,

$$\lambda_2 = \Psi_2 = \int_{\rho=a}^{b}\int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I\, d\rho\, dz}{2\pi\rho} = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

$$L_{\text{ext}} = \frac{\lambda_2}{I} = \frac{\mu\ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Así,

$$L = L_{\text{in}} + L_{\text{ext}} = \frac{\mu\ell}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right]$$

o la inductancia por unidad de longitud es

$$\boxed{L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right]} \qquad \text{H/m}$$

Método 2. L puede determinarse más fácilmente mediante las ecuaciones (8.54) y (8.66); esto es,

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad \text{o} \quad L = \frac{2W_m}{I^2}$$

donde

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\, dv = \int \frac{B^2}{2\mu}\, dv$$

En consecuencia,

$$L_{\text{in}} = \frac{2}{I^2}\int \frac{B_1^2}{2\mu}\, dv = \frac{1}{I^2\mu}\iiint \frac{\mu^2 I^2 \rho^2}{4\pi^2 a^4}\,\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= \frac{\mu}{4\pi^2 a^4}\int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a} \rho^3\, d\rho = \frac{\mu\ell}{8\pi}$$

$$L_{\text{ext}} = \frac{2}{I^2}\int \frac{B_2^2}{2\mu}\, dv = \frac{1}{I^2\mu}\iiint \frac{\mu^2 I^2}{4\pi^2\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= \frac{\mu}{4\pi^2}\int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^{b} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu\ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

y

$$L = L_{in} + L_{ext} = \frac{\mu \ell}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right]$$

como se obtuvo anteriormente.

Ejercicio 8.11

Calcule la autoinductancia del cable coaxial descrito en el ejemplo 8.11 si el conductor interno es de un material no homogéneo con $\mu = 2\mu_o/(1 + \rho)$.

Respuesta: $\frac{\mu_o \ell}{8\pi} + \frac{\mu_o \ell}{\pi}\left[\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{(1+b)}{(1+a)}\right]$

Ejemplo 8.12

Determine la inductancia por unidad de longitud de una línea de transmisión de dos alambres con una distancia de separación d. Cada alambre posee un radio a, como se mostró en la figura 6.37.

Solución:

Sigamos los dos métodos utilizados en el ejemplo anterior.

Método 1. Determinemos L_{in} tal como lo hicimos en el ejemplo anterior. Así, respecto de la región $0 \leq \rho \leq a$, obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{\mu I \ell}{8\pi}$$

como en el ejemplo anterior. Respecto de la región $a \leq \rho \leq d - a$, los eslabonamientos de flujo entre los alambres son

$$\lambda_2 = \Psi_2 = \int_{\rho=a}^{d-a}\int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I}{2\pi\rho}\, d\rho\, dz = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln\frac{d-a}{a}$$

Los eslabonamientos de flujo producidos por el alambre 1 son

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\mu I \ell}{8\pi} + \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln\frac{d-a}{a}$$

Por simetría, la corriente $-I$ en el alambre 2 produce igual cantidad de flujo. De ahí que el total de eslabonamientos sea

$$\lambda = 2(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\mu I \ell}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{d-a}{a}\right] = LI$$

Si $d \gg a$, la autoinductancia por unidad de longitud es

$$\boxed{L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{a}\right]} \quad \text{H/m}$$

Método 2. Con base en el ejemplo anterior,

$$L_{\text{in}} = \frac{\mu \ell}{8\pi}$$

Ahora

$$\begin{aligned} L_{\text{ext}} &= \frac{2}{I^2}\int \frac{B^2\,dv}{2\mu} = \frac{1}{I^2\mu}\iiint \frac{\mu^2 I^2}{4\pi^2\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\phi\,dz \\ &= \frac{\mu}{4\pi^2}\int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^{d-a}\frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{\mu\ell}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a} \end{aligned}$$

Puesto que los dos alambres son simétricos,

$$\begin{aligned} L &= 2\,(L_{\text{in}} + L_{\text{ext}}) \\ &= \frac{\mu\ell}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{d-a}{a}\right]\text{ H} \end{aligned}$$

como se obtuvo anteriormente.

Ejercicio 8.12

Dos alambres de cobre del número 10 (con diámetro de 2.588 mm) se colocan en paralelo en el aire con una distancia de separación d. Si la inductancia de cada uno de ellos es de 1.2 μH/m, calcule

a) L_{in} y L_{ext} por metro de cada alambre.

b) La distancia de separación d.

Respuestas: *a)* 0.05, 1.15 μH/m y *b)* 40.79 cm.

Ejemplo 8.13

Dos alambres circulares coaxiales de radios a y b ($b > a$) están separados por una distancia h ($h \gg a, b$), como se muestra en la figura 8.23. Halle la inductancia mutua entre ellos.

Solución:

Concedamos que la corriente I_1 fluye en el alambre 1. En un punto arbitrario P en el alambre 2, el potencial magnético vectorial debido al alambre 1 está dado por la ecuación (8.21*a*):

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu I_1 a^2 \operatorname{sen}\theta}{4r^2}\,\mathbf{a}_\phi = \frac{\mu I_1 a^2 b\,\mathbf{a}_\phi}{4[h^2+b^2]^{3/2}}$$

Si $h \gg b$,

$$\mathbf{A}_1 \simeq \frac{\mu I_1 a^2 b}{4h^3}\,\mathbf{a}_\phi$$

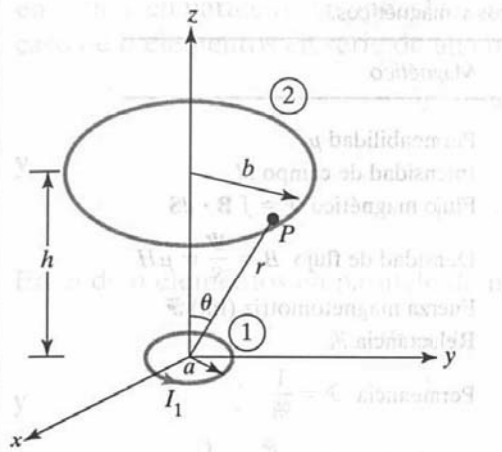


Figura 8.23. Dos alambres circulares coaxiales; para el ejemplo 8.13.

Por tanto,

$$\Psi_{12} = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu I_1 a^2 b}{4h^3} 2\pi b = \frac{\mu \pi I_1 a^2 b^2}{2h^3}$$

y

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu \pi a^2 b^2}{2h^3}.$$

Ejercicio 8.13

Halle la inductancia mutua de dos espiras circulares concéntricas coplanares de radios 2 m y 3 m.

Respuesta: 2.632 μH.

[†]8.10. Circuitos magnéticos

El concepto de circuitos magnéticos se basa en la resolución de ciertos problemas de campo magnético mediante el método de circuitos. Los dispositivos magnéticos como toroides, transformadores, motores, generadores y relevadores pueden considerarse circuitos magnéticos. Su análisis se simplifica si se explota una analogía entre circuitos magnéticos y eléctricos. Una vez hecho esto, es posible aplicar directamente conceptos de circuitos eléctricos a la resolución de circuitos magnéticos análogos.

La analogía entre circuitos magnéticos y eléctricos se resume en la tabla 8.4 y se describe gráficamente en la figura 8.24, las que conviene examinar detenidamente. Para comenzar, en la tabla aparecen dos términos nuevos. La *fuerza magnetomotriz* (fm) $\mathcal{F}$ (en ampere-vueltas) se define como

$$\boxed{\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}} \tag{8.67}$$

Tabla 8.4. Analogía entre circuitos eléctricos y magnéticos.

Eléctrico	*Magnético*
Conductividad σ	Permeabilidad μ
Intensidad de campo E	Intensidad de campo H
Corriente $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Flujo magnético $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Densidad de corriente $J = \dfrac{I}{S} = \sigma E$	Densidad de flujo $B = \dfrac{\Psi}{S} = \mu H$
Fuerza electromotriz (fe) V	Fuerza magnetomotriz (fm) $\mathcal{F}$
Resistencia R	Reluctancia $\mathcal{R}$
Conductancia $G = \dfrac{1}{R}$	Permeancia $\mathcal{P} = \dfrac{1}{\mathcal{R}}$
Ley de Ohm $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{\ell}{\sigma S}$	Ley de Ohm $\mathcal{R} = \dfrac{\mathcal{F}}{\Psi} = \dfrac{\ell}{\mu S}$
o $V = E\ell = IR$	o $\mathcal{F} = H\ell = \Psi\mathcal{R} = NI$
Leyes de Kirchhoff	Leyes de Kirchhoff
$\Sigma I = 0$	$\Sigma \Psi = 0$
$\Sigma V - \Sigma RI = 0$	$\Sigma \mathcal{F} - \Sigma \mathcal{R}\,\Psi = 0$

El origen de la fuerza magnetomotriz en circuitos magnéticos suele ser una bobina portadora de corriente como la que aparece en la figura 8.24. Por su parte, la *reluctancia* $\mathcal{R}$ (en ampere-vueltas/weber) se define como

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}} \tag{8.68}$$

donde ℓ y S son la longitud media y el área de la sección transversal del núcleo magnético, respectivamente. El recíproco de la reluctancia es la *permeancia* $\mathcal{P}$. La relación básica para elementos de circuitos es la ley de Ohm ($V = IR$):

$$\boxed{\mathcal{F} = \Psi\mathcal{R}} \tag{8.69}$$

Con base en esto es posible aplicar las leyes de la corriente y el voltaje de Kirchhoff a nodos y espiras de un circuito magnético dado, tal como se hace respecto de un circuito eléctrico. También las reglas de la adición de voltajes y para la combinación de resistencias

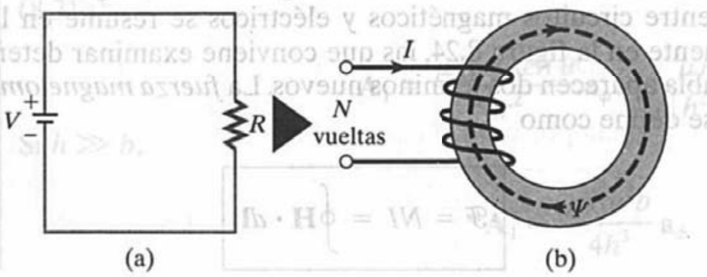


Figura 8.24. Analogía entre **(a)** un circuito eléctrico y **(b)** un circuito magnético.

en serie y en paralelo son aplicables a la fuerza magnetomotriz y la reluctancia. Así, en el caso de n elementos en serie de un circuito magnético,

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \cdots = \Psi_n \tag{8.70}$$

y

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 + \cdots + \mathscr{F}_n \tag{8.71}$$

En el de n elementos en paralelo de un circuito magnético,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \cdots + \Psi_n \tag{8.72}$$

y

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_3 = \cdots = \mathscr{F}_n \tag{8.73}$$

Señalemos algunas diferencias entre circuitos eléctricos y magnéticos. En contraste con la corriente I en un circuito eléctrico, el flujo magnético no fluye. Asimismo, en un circuito eléctrico la conductividad σ es independiente de la densidad de corriente J, mientras que en un circuito magnético la permeabilidad μ varía con la densidad de flujo B. Ésta es la causa de que en la mayor parte de los dispositivos magnéticos de uso práctico se empleen materiales ferromagnéticos (no lineales). Pese a estas diferencias, el concepto de circuito magnético sirve como un análisis aproximado de dispositivos magnéticos.

†8.11. Fuerza sobre materiales magnéticos

Es de interés práctico determinar la fuerza que un campo magnético ejerce sobre una pieza de material magnético situada en ese campo. Esto es útil en sistemas electromecánicos como electroimanes, relevadores, máquinas giratorias y suspensión magnética. Considérese, por ejemplo, un electroimán de hierro de permeabilidad relativa constante como el que se muestra en la figura 8.25. La bobina tiene N vueltas y porta una corriente I. Si se ignora el efecto de borde, el campo magnético en el entrehierro es el mismo que en el hierro ($B_{1n} = B_{2n}$). Para hallar la fuerza entre las dos piezas de hierro, se calcula el cambio que resultaría en la energía total si ambas piezas del circuito magnético estuvieran separadas por un desplazamiento diferencial $d\mathbf{l}$. El trabajo requerido para efectuar

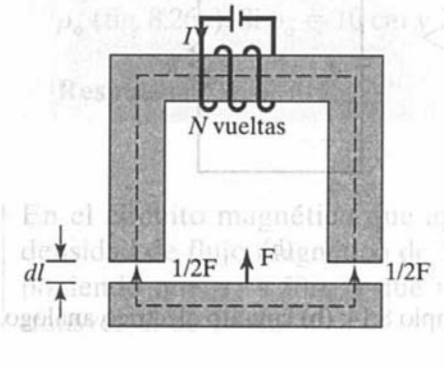


Figura 8.25. Electroimán.

tal desplazamiento es igual al cambio en la energía almacenada en el entrehierro (suponiendo una corriente constante); es decir,

$$-F\,dl = dW_m = 2\left[\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o}S\,dl\right] \tag{8.74}$$

donde S es el área de la sección transversal del entrehierro, el factor 2 da cuenta de los dos entrehierros y el signo negativo indica que la fuerza actúa para reducir el entrehierro (o que se trata de una fuerza de atracción). Así,

$$F = -2\left(\frac{B^2S}{2\mu_o}\right) \tag{8.75}$$

Cabe señalar que en este caso se ejerce fuerza sobre la pieza inferior, no sobre la pieza superior portadora de corriente que da origen al campo. La fuerza de tracción a través de un entrehierro simple puede obtenerse de la ecuación (8.75), de esta manera:

$$\boxed{F = -\frac{B^2S}{2\mu_o}} \tag{8.76}$$

Adviértase la semejanza entre la ecuación (8.76) y la deducida en el ejemplo 5.8 para el caso electrostático. La ecuación (8.76) puede usarse para calcular la fuerza en muchos tipos de dispositivos, entre ellos relevadores, máquinas giratorias y suspensión magnética. La presión de tracción (en N/m^2) en una superficie magnetizada es

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{1}{2}BH \tag{8.77}$$

equivalente a la densidad de energía w_m en el entrehierro.

Ejemplo 8.14

El núcleo toroidal que se presenta en la figura 8.26*(a)* tiene ρ_o = 10 cm y sección transversal circular con a = 1 cm. Si el núcleo es de acero ($\mu = 1000\,\mu_o$) y cuenta con una bobina con 200 vueltas, calcule el monto de corriente que un flujo de 0.5 mWb producirá en el núcleo.

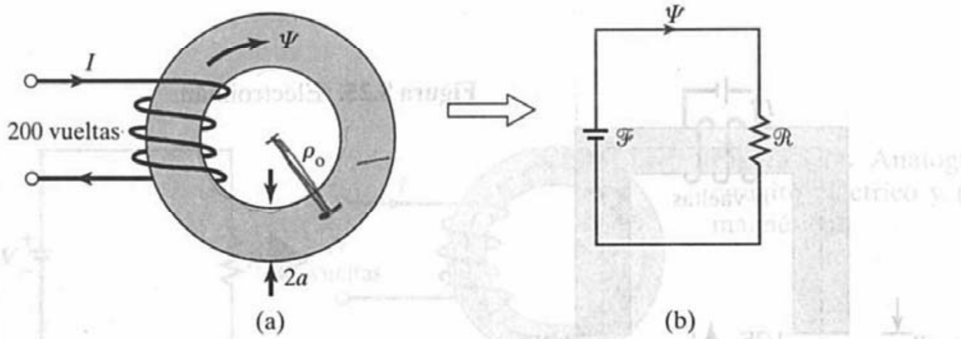


Figura 8.26. **(a)** Núcleo toroidal para el ejemplo 8.14; **(b)** circuito eléctrico análogo.

Solución:

Este problema puede resolverse de dos formas: con el método de campo magnético (procedimiento directo) o mediante analogía con un circuito eléctrico (procedimiento indirecto).

Método 1. Puesto que el valor de ρ_o es elevado en comparación con el de a, a partir del ejemplo 7.6,

$$B = \frac{\mu NI}{\ell} = \frac{\mu_o \mu_r NI}{2\pi\rho_o}$$

Por tanto,

$$\Psi = BS = \frac{\mu_o \mu_r NI \ \pi a^2}{2\pi\rho_o}$$

o

$$I = \frac{2\rho_o \Psi}{\mu_o \mu_r N a^2} = \frac{2(10 \times 10^{-2})(0.5 \times 10^{-3})}{4\pi \times 10^{-7}(1000)(200)(1 \times 10^{-4})}$$

$$= \frac{100}{8\pi} \quad = 3.979 \text{ A}$$

Método 2. El núcleo toroidal de la figura 8.26*(a)* es análogo al circuito eléctrico de la figura 8.26*(b)*. Con base en el circuito y la tabla 8.4,

$$\mathscr{F} = NI = \Psi\mathscr{R} = \Psi\frac{\ell}{\mu S} = \Psi\frac{2\pi\rho_o}{\mu_o \mu_r \pi a^2}$$

o

$$I = \frac{2\rho_o \Psi}{\mu_o \mu_r N a^2} = 3.979 \ A$$

como se obtuvo anteriormente.

Ejercicio 8.14

Un conductor de radio a se dobla para formar una espira circular de radio medio ρ_o (fig. 8.26a). Si $\rho_o = 10$ cm y $2a = 1$ cm, calcule la inductancia interna de la espira.

Respuesta: 31.42 nH.

Ejemplo 8.15 En el circuito magnético que aparece en la figura 8.27, calcule la corriente que una densidad de flujo magnético de 1.5 Wb/m² en el entrehierro producirá en la bobina, suponiendo que $\mu = 50\mu_o$ y que todas las ramas comparten una misma área de sección transversal de 10 cm².

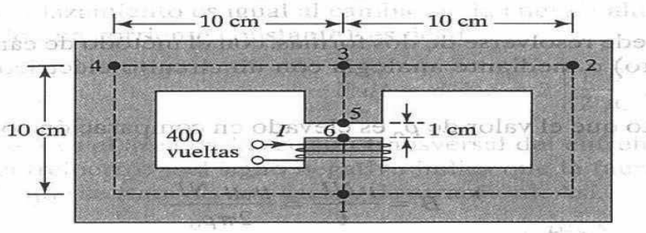


Figura 8.27. Circuito magnético para el ejemplo 8.15.

Solución:

El circuito magnético de la figura 8.27 es análogo al circuito eléctrico de la figura 8.28. En la figura 8.27, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ y $\mathcal{R}_a$ son las reluctancias en las trayectorias 143, 123, 35 y 16 y 56 (entrehierro), respectivamente. Así,

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{\ell}{\mu_o \mu_r S} = \frac{30 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})}$$

$$= \frac{3 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{9 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})} = \frac{0.9 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_a = \frac{1 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(1)(10 \times 10^{-4})} = \frac{5 \times 10^8}{20\pi}$$

Al combinar $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ como resistores en paralelo,

$$\mathcal{R}_1 \| \mathcal{R}_2 = \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{R}_1}{2} = \frac{1.5 \times 10^8}{20\pi}$$

La reluctancia total es

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_a + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_1 \| \mathcal{R}_2 = \frac{7.4 \times 10^8}{20\pi}$$

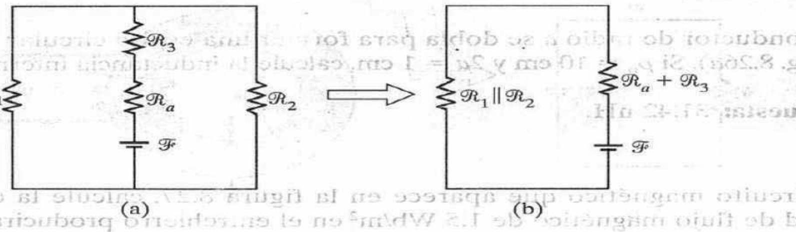


Figura 8.28. Circuito eléctrico análogo al circuito magnético de la figura 8.27.

La fuerza magnetomotriz es

$$\mathscr{F} = NI = \Psi_a \mathcal{R}_T$$

Pero $\Psi_a = \Psi = B_a S$. Por consiguiente

$$I = \frac{B_a S \mathcal{R}_T}{N} = \frac{1.5 \times 10 \times 10^{-4} \times 7.4 \times 10^8}{400 \times 20\pi}$$
$$= 44.16 \text{ A}$$

Ejercicio 8.15

El toroide de la figura 8.26*(a)* tiene una bobina de 1000 vueltas en torno a su núcleo. Si $\rho_o = 10$ cm y $a = 1$ cm, ¿qué corriente se requiere para establecer un flujo magnético de 0.5 mWb

a) si el núcleo es no magnético?

b) si el núcleo es de $\mu_r = 500$?

Respuestas: *a)* 795.8 A y *b)* 1.592 A.

Ejemplo 8.16

Un electroimán en forma de U como el que se muestra en la figura 8.29 está diseñado para levantar una masa de 400 kg (incluida la del contacto). La horquilla de hierro ($\mu_r = 3000$) tiene una sección transversal de 40 cm^2 y longitud media de 50 cm, y los entrehierros 0.1 mm de largo cada uno. Ignore la reluctancia del contacto y calcule el número de vueltas en la bobina cuando la corriente de excitación es de 1 A.

Solución:

La fuerza de tracción en uno y otro de los dos entrehierros debe equilibrar el peso. Por tanto,

$$F = 2\,\frac{(B_a^2 S)}{2\mu_o} = mg$$

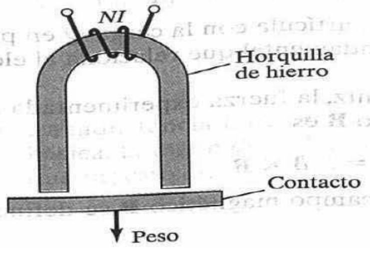


Figura 8.29. Electroimán en forma de U; para el ejemplo 8.16.

o

$$B_a^2 = \frac{mg\mu_o}{S} = \frac{400 \times 9.8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{40 \times 10^{-4}}$$

$$B_a = 1.11 \text{ Wb/m}^2$$

Pero

$$\mathcal{F} = NI = \Psi(\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i)$$

$$\mathcal{R}_a = \frac{\ell_a}{\mu S} = \frac{2 \times 0.1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{6 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{\ell_i}{\mu_o \mu_r S} = \frac{50 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 3000 \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{5 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{F}_a = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i}\mathcal{F} = \frac{6}{6+5}NI = \frac{6}{11}NI$$

Puesto que

$$\mathcal{F}_a = H_a \ell_a = \frac{B_a \ell_a}{\mu_o}$$

$$N = \frac{11}{6}\frac{B_a \ell_a}{\mu_o I} = \frac{11 \times 1.11 \times 0.1 \times 10^{-3}}{6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}$$

$$N = 162$$

Ejercicio 8.16

Halle la fuerza sobre el entrehierro del circuito magnético descrito en el ejemplo 8.15.

Respuesta: 895.2 N.

Resumen

1. La ecuación de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = m\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

relaciona la fuerza que actúa sobre una partícula con la carga Q en presencia de campos electromagnéticos. Expresa la ley fundamental que relaciona al electromagnetismo con la mecánica.

2. Con base en la ley de la fuerza de Lorentz, la fuerza experimentada por un elemento de corriente $I\,d\mathbf{l}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$ es

$$d\mathbf{F} = I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Con fundamento en esta expresión, el campo magnético $\mathbf{B}$ se define como la fuerza por unidad de elemento de corriente.

3. El torque sobre una espira de corriente con momento magnético **m** en un campo magnético uniforme **B** es

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = IS\mathbf{a}_n \times \mathbf{B}$$

4. Un dipolo magnético es una barra imantada o una pequeña espira filamentosa de corriente; debe su nombre al hecho de que las líneas de su campo **B** son similares a las líneas del campo **E** de un dipolo eléctrico.
5. Un material se magnetiza al ser sometido a un campo magnético. La magnetización **M** es el momento magnético dipolar por unidad de volumen del material. En el caso de materiales lineales,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

donde χ_m es la susceptibilidad magnética del material.

6. De acuerdo con sus propiedades magnéticas, los materiales son lineales (diamagnéticos o paramagnéticos) o no lineales (ferromagnéticos). En cuanto a los materiales lineales,

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_o\mu_r\mathbf{H} = \mu_o(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

donde μ = permeabilidad y $\mu_r = \mu/\mu_o$ = permeabilidad relativa del material. En cuanto a los materiales no lineales, $B = \mu(H)\,H$, lo cual significa que μ no tiene un valor fijo; la relación entre B y H suele representarse mediante una curva de magnetización.

7. Las condiciones en la frontera que **H** o **B** deben satisfacer en la interfaz entre dos medios diferentes son

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K} \quad \text{o} \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad \text{si } \mathbf{K} = 0$$

donde $\mathbf{a}_{n12}$ es un vector unitario dirigido del medio 1 al medio 2.

8. La energía en un campo magnetostático está dada por

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv$$

En el caso de un inductor portador de corriente I

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Así, la inductancia L puede hallarse mediante

$$L = \frac{\displaystyle\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv}{I^2}$$

9. La inductancia L de un inductor también puede determinarse a partir de su definición básica: la razón del eslabonamiento de flujo magnético a la corriente a través del inductor; esto es,

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}$$

Así, suponiendo una corriente I, se determinan $\mathbf{B}$ y $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ y se halla finalmente $L = N\Psi/I$.

10. Un circuito magnético puede analizarse de la misma manera que un circuito eléctrico. Sencillamente, téngase en cuenta la semejanza entre

$$\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Psi\mathcal{R} \quad \text{y} \quad V = IR$$

es decir,

$$\mathcal{F} \leftrightarrow V, \ \Psi \leftrightarrow I, \mathcal{R} \leftrightarrow R$$

Por tanto, las leyes de Ohm y Kirchhoff se aplican a circuitos magnéticos tanto como a eléctricos.

11. La presión magnética (o fuerza por unidad de área de una superficie) sobre una pieza de material magnético es

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{2} BH = \frac{B^2}{2\mu_o}$$

donde B es el campo magnético en la superficie del material.

Preguntas de repaso

8.1. ¿Cuáles de los enunciados siguientes acerca de la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ y la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ sobre una partícula cargada no son ciertos?

a) $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}_e$ son paralelas entre sí, mientras que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{F}_m$ son perpendiculares entre sí.
b) Tanto $\mathbf{F}_e$ como $\mathbf{F}_m$ dependen de la velocidad de la partícula cargada.
c) Tanto $\mathbf{F}_e$ como $\mathbf{F}_m$ pueden realizar trabajo.
d) Tanto $\mathbf{F}_e$ como $\mathbf{F}_m$ son producidas cuando una partícula cargada se mueve a una velocidad constante.
e) La magnitud de $\mathbf{F}_m$ suele ser reducida en comparación con la de $\mathbf{F}_e$.
f) $\mathbf{F}_e$ es una fuerza de aceleración, en tanto que $\mathbf{F}_m$ es exclusivamente una fuerza de desviación.

8.2. Dos alambres paralelos angostos portan corrientes en la misma dirección. La fuerza experimentada por uno debida al otro es

a) Paralela a las líneas.
b) Perpendicular a las líneas y de atracción.
c) Perpendicular a las líneas y de repulsión.
d) Cero.

8.3. La fuerza sobre la longitud diferencial $d\mathbf{l}$ en el punto P en la espira conductora circular que aparece en la figura 8.30 es

a) De dirección hacia fuera a lo largo de OP.
b) De dirección hacia dentro a lo largo de OP.

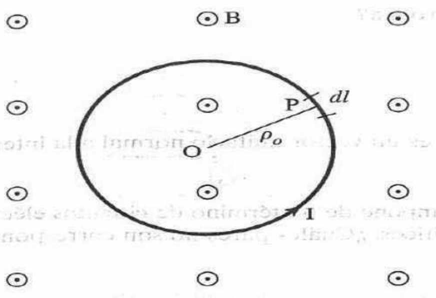


Figura 8.30. Para las preguntas de repaso 8.3 y 8.4.

c) En la dirección del campo magnético.
d) Tangencial a la espira en *P*.

8.4. La fuerza resultante sobre la espira circular de la figura 8.30 tiene una magnitud de

a) $2\pi\rho_o IB$
b) $\pi\rho_o^2 IB$
c) $2\rho_o IB$
d) Cero

8.5. ¿Cuál es la unidad de la carga magnética?

a) Ampere-metro cuadrado.
b) Coulomb.
c) Ampere.
d) Ampere-metro.

8.6. ¿Cuál de los materiales siguientes requiere el menor valor de intensidad de campo magnético para magnetizarse?

a) Níquel.
b) Plata.
c) Tungsteno.
d) Cloruro de sodio.

8.7. Identifique el enunciado que no es cierto con relación a materiales ferromagnéticos.

a) Su valor de χ_m es alto.
b) Tienen un valor fijo de μ_r.
c) La pérdida de energía es proporcional en ellos al área de la espira de histéresis.
d) Pierden su propiedad de no linealidad por encima de la temperatura curie.

8.8. ¿Cuál de las fórmulas siguientes es errónea?

a) $B_{1n} = B_{2n}$

b) $B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2t}^2}$

c) $H_1 = H_{1n} + H_{1t}$

d) $\mathbf{a}_{n21} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$, donde $\mathbf{a}_{n21}$ es un vector unitario normal a la interfaz y dirigido de la región 2 a la región 1.

8.9. Cada uno de los pares siguientes se compone de un término de circuitos eléctricos y el correspondiente término de circuitos magnéticos. ¿Cuáles pares no son correspondientes?

a) V y $\mathcal{F}$

b) G y $\mathcal{P}$

c) ε y μ

d) IR y $H\mathcal{R}$

e) $\Sigma I = 0$ y $\Sigma \Psi = 0$

8.10. Una bobina de varias capas con 2000 vueltas de alambre muy delgado tiene 20 mm de largo y un grosor de devanado de 5 mm. Si porta una corriente de 5 mA, genera una fuerza magnetomotriz de

a) 10 A-t

b) 500 A-t

c) 2 000 A-t

d) Ninguna de las anteriores

Respuestas: 8.1*b*, *c*, 8.2*b*, 8.3*a*, 8.4*d*, 8.5*d*, 8.6*a*, 8.7*b*, 8.8*c*, 8.9*c*, *d*, 8.10*a*.

Problemas

8.1. Un electrón con velocidad $\mathbf{u} = (3\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z) \times 10^5$ m/s no experimenta ninguna fuerza neta en cierto punto de un campo magnético $\mathbf{B} = 10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 30\mathbf{a}_z$ mWb/m². Halle $\mathbf{E}$ en ese punto.

8.2. Una partícula cargada de 1 kg de masa y carga de 2 C se pone en movimiento en el origen a una velocidad de $10\mathbf{a}_z$ m/s en un campo magnético $\mathbf{B} = 1\mathbf{a}_x$ Wb/m². Encuentre su ubicación y energía cinética en $t = 2$ s.

***8.3.** Una partícula con 1 kg de masa y carga de 2 C se pone en movimiento, a partir de un estado de reposo, en el punto (2, 3, –4) en una región en la que $\mathbf{E} = -4\mathbf{a}_y$ V/m y $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x$ Wb/m². Calcule

a) La ubicación de la partícula en $t = 1$ s.

b) Su velocidad y energía cinética en esa ubicación.

8.4. Una carga de –2 mC se pone en movimiento en el punto (0, 1, 2) a una velocidad de $5\mathbf{a}_x$ m/s en un campo magnético $\mathbf{B} = 6\mathbf{a}_y$ Wb/m². Determine la posición y velocidad de la partícula 10 s después suponiendo que la masa de la carga es de 1 gramo. Describa el movimiento de la carga.

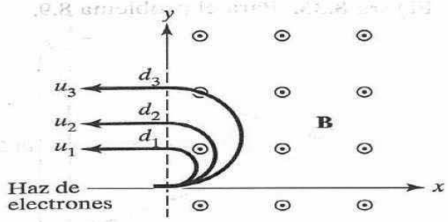


Figura 8.31. Para el problema 8.5.

***8.5.** Tras inyectar un haz de electrones en forma normal al contorno del plano de un campo uniforme $B_o\mathbf{a}_z$, es posible dispersarlos según su velocidad, como se observa en la figura 8.31.

a) Demuestre que los electrones serían expulsados del campo en trayectorias paralelas al haz de entrada, como se muestra en la figura.

b) Deduzca una expresión para la distancia de salida *d* sobre el punto de entrada.

8.6. Dado que $\mathbf{B} = 6x\mathbf{a}_x - 9y\mathbf{a}_y + 3z\mathbf{a}_z$ Wb/m², halle la fuerza total experimentada por la espira rectangular (en el plano $z = 0$) que aparece en la figura 8.32.

8.7. Un elemento de corriente de 2 cm de longitud se localiza en el origen en el vacío y porta una corriente de 12 mA a lo largo de $\mathbf{a}_x$. Una corriente filamentosa de $15\mathbf{a}_z$ A se localiza a su vez a lo largo de $x = 3, y = 4$. Halle la fuerza sobre el filamento de corriente.

***8.8.** Tres líneas infinitas L_1, L_2 y L_3 definidas por $x = 0, y = 0; x = 0, y = 4$, y $x = 3, y = 4$, respectivamente, portan corrientes filamentosas de –100 A, 200 A y 300 A a lo largo de $\mathbf{a}_z$. Halle la fuerza por unidad de longitud sobre

a) L_2 debida a L_1.

b) L_1 debida a L_2.

c) L_3 debida a L_1.

d) L_3 debida a L_1 y L_2. Indique en cada caso si se trata de una fuerza de repulsión o atracción.

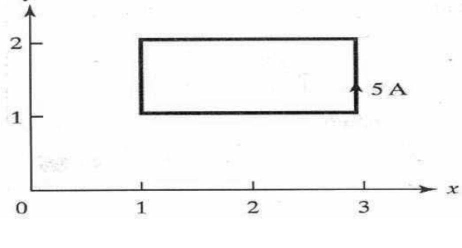


Figura 8.32. Para el problema 8.6.

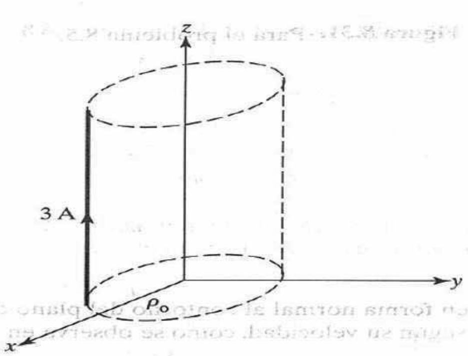


Figura 8.33. Para el problema 8.9.

• 8.9. Un conductor de 2 m de largo que porta 3 A se coloca en paralelo al eje z a una distancia de $\rho_o = 10$ cm, como se muestra en la figura 8.33. Si el campo en la región es $(\phi/3)\ \mathbf{a}_\rho$ Wb/m², ¿cuánto trabajo se requiere para que el conductor dé una vuelta alrededor del eje z?

***8.10.** Una espira conductora triangular portadora de una corriente de 2 A se sitúa cerca de un conductor recto de longitud infinita con una corriente de 5 A, como se ilustra en la figura 8.34. Calcule *a)* la fuerza sobre el lado 1 de la espira triangular y *b)* la fuerza total sobre la espira.

***8.11.** Una línea de transmisión trifásica se compone de tres conductores sostenidos en los puntos A, B y C para formar un triángulo equilátero como el que aparece en la figura 8.35. En cierto instante, tanto el conductor A como el conductor B portan una corriente de 75 A, mientras que el conductor C porta una corriente de retorno de 150 A. Halle la fuerza por metro sobre el conductor C en ese instante.

***8.12.** Un tubo de longitud infinita de radio interno a y radio externo b es de un material conductor magnético, porta una corriente total I y está colocado a lo largo del eje z. Si se halla expuesto a un campo magnético constante $B_o\mathbf{a}_\rho$, determine la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre él.

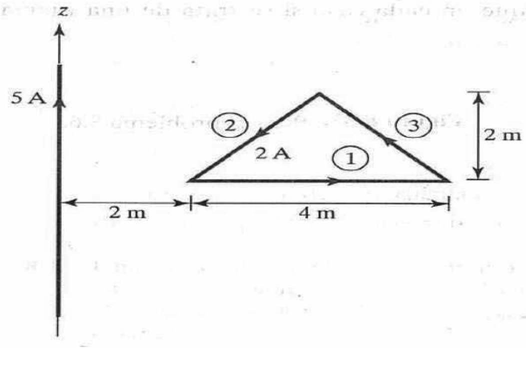


Figura 8.34. Para el problema 8.10.

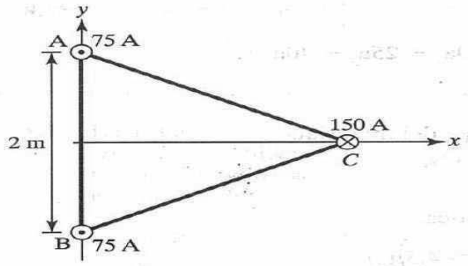


Figura 8.35. Para el problema 8.11.

***8.13.** Un conductor de longitud infinita está incrustado en una masa de hierro ($\mu = 2000\mu_o$), de la que está aislado, como se muestra en la figura 8.36. Con base en la teoría de las imágenes, estime la densidad de flujo magnético en el punto P.

8.14. Un galvanómetro dispone de una bobina rectangular de 10 por 30 mm por lado que gira en torno al centro del lado más corto. Montada en un campo magnético radial, en su plano actúa un campo magnético constante de 0.4 Wb/m². Si cuenta con 1000 vueltas y porta una corriente de 2 mA, halle el torque que experimenta.

• 8.15. Un pequeño imán ubicado en el origen produce $\mathbf{B} = -0.5\mathbf{a}_z$ mWb/m² en (10, 0, 0). Halle **B** en

a) (0, 3, 0)
b) (3, 4, 0)
c) (1, 1, −1)

8.16. Un bloque de hierro ($\mu = 5000\mu_o$) se coloca en un campo magnético uniforme con 1.5 Wb/m². Si el hierro se compone de 8.5×10^{28} átomos/m³, calcule: *a)* la magnetización **M**, *b)* la corriente magnética promedio.

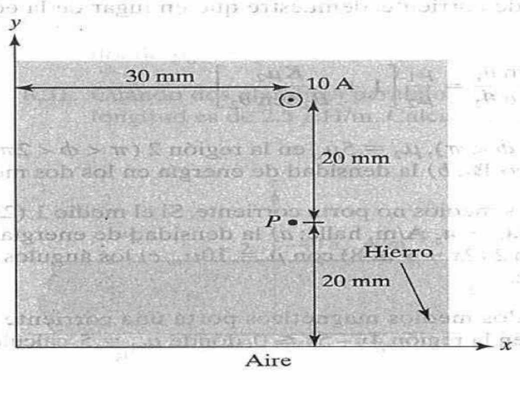


Figura 8.36. Para el problema 8.13.

•**8.17.** En cierto material con $\mu = 6.5\mu_o$,

$$\mathbf{H} = 10\mathbf{a}_x + 25\mathbf{a}_y - 40\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

halle

a) La susceptibilidad magnética χ_m del material.
b) La densidad de flujo magnético **B**.
c) La magnetización **M**.
d) La densidad de energía magnética.

8.18. En un material ferromagnético ($\mu = 4.5\mu_o$),

$$\mathbf{B} = 4y\mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$$

calcule: *a)* χ_m, *b)* **H**, *c)* **M**, *d)* $\mathbf{J}_b$.

•**8.19.** Cierto material registra una intensidad de campo magnético $H = 1200$ A/m cuando $B = 2$ Wb/m². Si H se reduce a 400 A/m, $B = 1.4$ Wb/m². Calcule el cambio en la magnetización **M**.

8.20. Un conductor cilíndrico de longitud infinita de radio a y permeabilidad $\mu_o\mu_r$ se sitúa a lo largo del eje z. Si porta una corriente I uniformemente distribuida a lo largo de $\mathbf{a}_z$, halle **M** y $\mathbf{J}_b$ respecto de $0 < \rho < a$.

•**8.21.** Si $\mathbf{M} = \dfrac{k_o}{a}(-y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y)$ en un cubo de tamaño a, halle $\mathbf{J}_b$. Suponga que k_o es una constante.

*__8.22.__ *a)* Con relación a la frontera entre dos medios magnéticos que aparece en la figura 8.16, demuestre que las condiciones en la frontera sobre el vector de magnetización son

$$\frac{M_{1t}}{\chi_{m1}} - \frac{M_{2t}}{\chi_{m2}} = K \qquad \text{y} \qquad \frac{\mu_1}{\chi_{m1}} m_{1n} = \frac{\mu_2}{\chi_{m2}} M_{2n}$$

b) Si la frontera no está libre de corriente, demuestre que en lugar de la ecuación (8.49) se obtiene

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\left[1 + \frac{K\mu_2}{B_2 \operatorname{sen}\theta_2}\right]$$

8.23. Si $\mu_1 = 2\mu_o$ en la región 1 ($0 < \phi < \pi$), $\mu_2 = 5\mu_o$ en la región 2 ($\pi < \phi < 2\pi$) y $\mathbf{B}_2 = 10\mathbf{a}_\rho + 15\mathbf{a}_\phi - 20\mathbf{a}_z$ mWb/m², calcule: *a)* $\mathbf{B}_1$, *b)* la densidad de energía en los dos medios.

8.24. La interfaz $2x + y = 8$ entre dos medios no porta corriente. Si el medio 1 ($2x + y \geq 8$) es no magnético con $\mathbf{H}_1 = -4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ A/m, halle: *a)* la densidad de energía magnética en el medio 1, *b)* $\mathbf{M}_2$ y $\mathbf{B}_2$ en el medio 2 ($2x + y \leq 8$) con $\mu = 10\mu_o$, *c)* los ángulos que $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{H}_2$ forman con la normal a la interfaz.

8.25. La interfaz $4x - 5z = 0$ entre dos medios magnéticos porta una corriente de $35\mathbf{a}_y$ A/m. Si $\mathbf{H}_1 = 25\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_y + 45\mathbf{a}_z$ A/m en la región $4x - 5z \leq 0$, donde $\mu_{r1} = 5$, calcule $\mathbf{H}_2$ en la región $4x - 5z \geq 0$, donde $\mu_{r2} = 10$.

8.26. El plano $z = 0$ separa aire ($z \geq 0, \mu = \mu_o$) de hierro ($z \leq 0, \mu = 200\mu_o$). Puesto que

$$\mathbf{H} = 10\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

en el aire, halle **B** en el hierro y el ángulo que éste forma con la interfaz.

8.27. La región $0 \leq z \leq 2$ m está ocupada por una lámina infinita de material magnético ($\mu = 2.5\mu_o$). Si las superficies de la lámina en $z = 0$ y $z = 2$ portan respectivamente corrientes superficiales de $30\mathbf{a}_x$ A/m y $-40\mathbf{a}_x$ A/m, como se indica en la figura 8.37, calcule **H** y **B** respecto de

a) $z < 0$
b) $0 < z < 2$
c) $z > 2$

8.28. En cierta región en la que $\chi_m = 19$,

$$\mathbf{H} = 5x^2yz\mathbf{a}_x + 10xy^2z\mathbf{a}_y - 15xyz^2\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

¿Cuánta energía está almacenada en $0 < x < 1, 0 < y < 2, -1 < z < 2$?

8.29. La curva de magnetización de una aleación de hierro está dada aproximadamente por $B = \frac{1}{3}H + H^2\mu$ Wb/m². Halle: *a)* μ_r cuando $H = 210$ A/m, *b)* la energía almacenada por unidad de volumen en la aleación cuando H aumenta de 0 a 210 A/m.

***8.30.** *a)* Si la sección transversal del toroide que se presentó en la figura 7.15 es un cuadrado de lado a, demuestre que la autoinductancia del toroide es

$$L = \frac{\mu_o N^2 a}{2\pi} \ln \left[\frac{2\rho_o + a}{2\rho_o - a}\right]$$

b) Si el toroide posee una sección transversal circular como en la figura 7.15, demuestre que

$$L = \frac{\mu_o N^2 a^2}{2\rho_o}$$

donde $\rho_o \gg a$.

8.31. Cuando dos alambres paralelos idénticos están separados 3 m, la inductancia por unidad de longitud es de 2.5 μH/m. Calcule el diámetro de cada alambre.

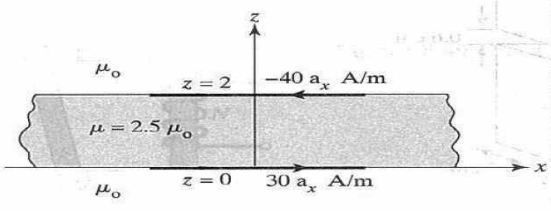


Figura 8.37. Para el problema 8.27.

8.32. Un solenoide de 10 cm de longitud y 1 cm de radio cuenta con 450 vueltas. Calcule su inductancia.

8.33. El núcleo de un toroide es de 12 cm^2 y el material con el que está hecho tiene $\mu_r = 200$. Si su radio medio es de 50 cm, calcule el número de vueltas necesarias para obtener una inductancia de 2.5 H.

8.34. Demuestre que la inductancia mutua entre la espira rectangular y la corriente lineal infinita que se presentaron en la figura 8.4 es

$$M_{12} = \frac{\mu b}{2\pi} \ln \left[\frac{a + \rho_o}{\rho_o} \right]$$

Calcule M_{12} cuando $a = b = \rho_o = 1$ m.

***8.35.** Compruebe que la inductancia mutua entre los solenoides coaxiales devanados cerrados de longitud ℓ_1 y ℓ_2 ($\ell_1 \gg \ell_2$), vueltas N_1 y N_2 y radios r_1 y r_2 con $r_1 = r_2$ es

$$M_{12} = \frac{\mu N_1 N_2}{\ell_1} \pi r_1^2$$

8.36. Un anillo de cobalto ($\mu_r = 600$) tiene un radio medio de 30 cm. Si una bobina enrollada en el anillo porta 12 A, calcule el número de vueltas requeridas para establecer una densidad de flujo magnético promedio de 1.5 Wb/m en el anillo.

8.37. Remítase a la figura 8.27. Si la corriente en la bobina es de 0.5 A, halle la fuerza magnetomotriz y la intensidad de campo magnético en el entrehierro. Suponga que $\mu = 500\mu_o$ y que todas las ramas comparten un área de sección transversal de 10 cm^2.

8.38. La bobina de 2000 vueltas del circuito magnético que aparece en la figura 8.38 tiene una corriente de 10 A. Suponga que todas las ramas tienen una sección transversal de 2 cm^2 y que el material del núcleo es hierro con $\mu_r = 1500$. Calcule R, $\mathcal{F}$ y Ψ respecto de

a) El núcleo.
b) El entrehierro.

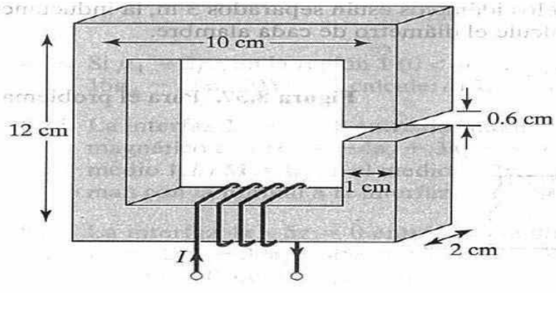


Figura 8.38. Para el problema 8.38.

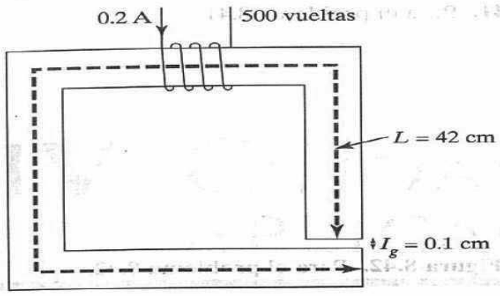


Figura 8.39. Para el problema 8.39.

8.39. Considere el circuito magnético que se presenta en la figura 8.39. Suponiendo que el núcleo ($\mu = 1000\mu_o$) posee una sección tranversal uniforme de 4 cm², determine la densidad de flujo en el entrehierro.

8.40. Considere el relevador electromagnético que se muestra en la figura 8.40. ¿Qué fuerza actúa sobre su armadura (parte móvil) si el flujo en el entrehierro es de 2 mWb? El área de éste es de 0.3 cm² y su longitud de 1.5 mm.

8.41. Un toroide con entrehierro como el que aparece en la figura 8.41 posee una sección transversal cuadrada. Un conductor largo portador de corriente I_2 está insertado en el entrehierro. Si $I_1 = 200$ mA, $N = 750$, $\rho_o = 10$ cm, $a = 5$ mm y $\ell_a = 1$ mm, calcule

a) La fuerza sobre el entrehierro cuando $I_2 = 0$ y la permeabilidad relativa del toroide es de 300.

b) La fuerza sobre el conductor cuando $I_2 = 2$ mA y la permeabilidad del toroide es infinita. Ignore en ambos casos el efecto de borde en el entrehierro.

8.42. En la figura 8.42 se muestra una sección de un electroimán bajo el cual se halla una placa que soporta una carga. El electroimán posee un área de contacto de 200 cm² por polo, en tanto que el polo intermedio cuenta con una bobina con 1000 vueltas e $I = 3$ A. Calcule la masa máxima que el electroimán podría levantar. Suponga que la reluctancia del electroimán y la placa es despreciable.

8.43. En la figura 8.43 se presenta la sección transversal de un sistema electromecánico cuyo émbolo se mueve libremente entre dos casquillos no magnéticos. Suponiendo que todos los tramos comparten la misma área de sección transversal S, demuestre que

$$\mathbf{F} = -\frac{2\,N^2 I^2 \mu_o S}{(a + 2x)}\,\mathbf{a}_x$$

Figura 8.40. Para el problema 8.40.

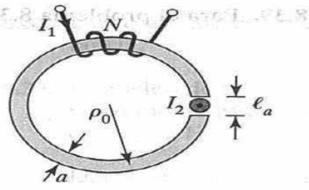


Figura 8.41. Para el problema 8.41.

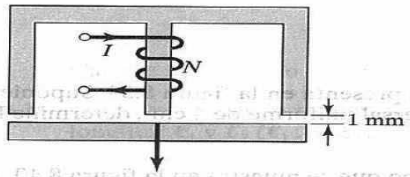


Figura 8.42. Para el problema 8.42.

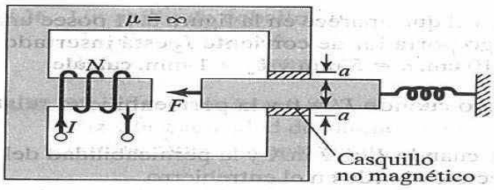


Figura 8.43. Para el problema 8.43.

IV ONDAS Y APLICACIONES

9 Ecuaciones de Maxwell

¿Quieres ser un héroe? No te contentes con ver hacer proezas a los demás o ignorar lo que ocurre a tu alrededor. Actúa. Quienes actúan desean ardientemente cumplir sus propósitos, avanzar, servir a sus semejantes, ser los mejores y cambiar su mundo.

GLENN VAN EKEREN

9.1. Introducción

En la parte II (capítulos 4 a 6) de este libro nos ocupamos de los campos electrostáticos, denotados con $\mathbf{E}(x, y, z)$, mientras que en la parte III (capítulos 7 y 8) estudiamos los campos magnetostáticos, representados con $\mathbf{H}(x, y, z)$. Esto significa que hasta aquí hemos restringido nuestro análisis a los campos electromagnéticos estáticos, o invariables en el tiempo. En lo sucesivo examinaremos situaciones con campos eléctricos y magnéticos dinámicos, o variables en el tiempo. 1 Señalemos en primer término que los campos eléctrico y magnético estáticos son independientes entre sí, en tanto que los dinámicos son interdependientes. En otras palabras, un campo eléctrico variable en el tiempo implica necesariamente un campo magnético correspondiente variable en el tiempo. 2 En segundo término, los campos electromagnéticos variables en el tiempo, representados con $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{H}(x, y, z, t)$, poseen mayor valor práctico que los estáticos. No obstante, el conocimiento de los campos estáticos proporciona sólidas bases para comprender los dinámicos. En tercer lugar, 3 recuérdese que los campos electrostáticos suelen ser producidos por cargas eléctricas estáticas y que los campos magnetostáticos se deben al movimiento de cargas eléctricas a una velocidad uniforme (corriente directa) o de cargas magnéticas estáticas (polos magnéticos); en cambio, los campos variables en el tiempo u ondas suelen deberse a cargas aceleradas o corrientes variables en el tiempo como las que se muestran en la figura 9.1. Una corriente pulsatoria producirá radiación (campos variables en el tiempo). El tipo de corriente pulsatoria que aparece en la figura 9.1(b) es la causa de la emisión radiada en tarjetas lógicas digitales. En suma:

cargas estacionarias	$\rightarrow$ campos electrostáticos
corrientes estacionarias	$\rightarrow$ campos magnetostáticos
corrientes variables en el tiempo	$\rightarrow$ campos (u ondas) electromagnéticos

El propósito de este capítulo es sentar las bases para el estudio subsecuente. Esto supone la presentación de dos importantes conceptos: 1) la fuerza electromotriz, basada en experimentos de Faraday, y 2) la corriente de desplazamiento, producto de hipótesis de Maxwell. Como resultado de estos conceptos, las ecuaciones de Maxwell —tal como se les formuló en la sección 7.6— y las condiciones en la frontera para campos electromagnéticos

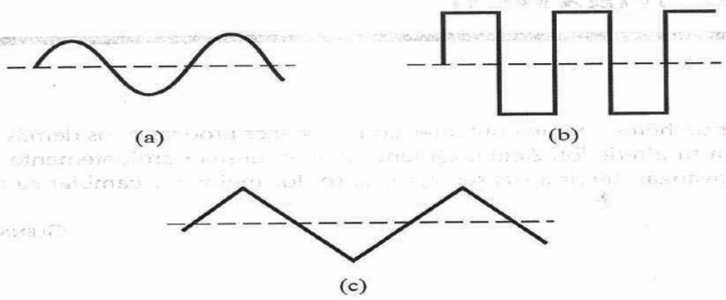


Figura 9.1. Diversos tipos de corriente variable en el tiempo: **(a)** sinusoidal, **(b)** rectangular, **(c)** triangular.

estáticos se modificarán para dar cuenta de la variación temporal de los campos. Conviene destacar que las ecuaciones de Maxwell resumen las leyes del electromagnetismo y servirán de fundamento a nuestros análisis en lo que resta del libro. Por tal motivo, la sección 9.5 debe considerarse el núcleo de este texto.

9.2. Ley de Faraday

Tras el descubrimiento experimental de Oersted (en el que Biot, Savart y Ampère basaron sus leyes) de que una corriente estacionaria produce un campo magnético, pareció lógico indagar si el magnetismo producía electricidad. Once años después del hallazgo de Oersted, en 1831, Michael Faraday en Londres y Joseph Henry en Nueva York descubrieron que un campo magnético variable en el tiempo producía una corriente eléctrica.[1]

De acuerdo con los experimentos de Faraday, un campo magnético estático no produce flujo de corriente, pero un campo variable en el tiempo produce un voltaje inducido (llamado *fuerza electromotriz [fe]*) en un circuito cerrado, el cual provoca un flujo de corriente.

Faraday descubrió que la **fuerza electromotriz inducida**, V_{fe} (en volts), en un circuito cerrado es igual a la rapidez de cambio del eslabonamiento de flujo magnético por el circuito.

Ésta es la *ley de Faraday*, la cual puede expresarse como

$$V_{fe} = -\frac{d\lambda}{dt} = -N\frac{d\Psi}{dt} \tag{9.1}$$

donde N es el número de vueltas en el circuito y Ψ el flujo a través de cada una de ellas. El signo negativo indica que el voltaje inducido es contrario al flujo que lo produce. Ésta

[1] Para detalles sobre los experimentos de Michael Faraday (1791-1867) y Joseph Henry (1797-1878), véase W. F. Magie, *A Source Book in Physics*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1963, pp. 472-519.

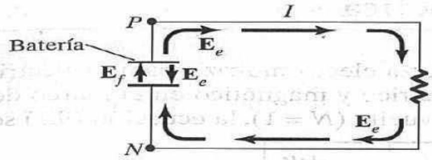


Figura 9.2. Circuito en el que se muestra un campo generador de fuerza electromotriz $\mathbf{E}_f$ y un campo electrostático $\mathbf{E}_e$.

es a su vez la *ley de Lenz*,[2] según la cual la dirección del flujo de corriente en el circuito es tal que el campo magnético inducido resultante de la corriente inducida se opondrá al campo magnético original.

Recuérdese que un campo eléctrico se describió como aquel en el que cargas eléctricas experimentan fuerza. Los campos eléctricos considerados hasta este punto son causados por cargas eléctricas; en ellos, las líneas de flujo comienzan y terminan en las cargas. No obstante, existen otros tipos de campos eléctricos, no directamente causados por cargas eléctricas. Estos son los campos producidos por fuerza electromotriz. Los generadores eléctricos, las baterías, pilas termoeléctricas, pilas de Grove y pilas fotovoltaicas son fuentes de fuerza electromotriz; todos ellos convierten energía no eléctrica en eléctrica.

Considérese el circuito eléctrico que aparece en la figura 9.2, en el que una batería es fuente de fuerza electromotriz. La acción electroquímica de la batería da como resultado un campo producido por fuerza electromotriz $\mathbf{E}_f$. La acumulación de carga en las terminales de la batería causa asimismo un campo electrostático $\mathbf{E}_e$ $(= -\nabla V)$. El campo eléctrico total en cualquier punto es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_e \tag{9.2}$$

Cabe hacer notar que $\mathbf{E}_f$ es de cero fuera de la batería, $\mathbf{E}_f$ y $\mathbf{E}_e$ siguen direcciones opuestas dentro de ésta y la dirección de $\mathbf{E}_e$ en la batería es la contraria a la que sigue fuera de ella. Si se integra la ecuación (9.2) sobre el circuito cerrado,

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} + 0 = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(a través de la batería)} \tag{9.3a}$$

donde $\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = 0$, porque $\mathbf{E}_e$ es conservativo. La fuerza electromotriz de la batería es la integral de línea del campo producido por esa fuerza; es decir,

$$V_{\text{fe}} = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} = -\int_N^P \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = IR \tag{9.3b}$$

puesto que $\mathbf{E}_f$ y $\mathbf{E}_e$ son iguales pero contrarios dentro de la batería (fig. 9.2). Esto también podría interpretarse como la diferencia de potencial $(V_P - V_N)$ entre las terminales de la batería en circuito abierto. Es importante señalar que:

1. Un campo electrostático $\mathbf{E}_e$ no puede mantener una corriente estacionaria en un circuito cerrado, ya que $\oint_L \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = 0 = IR$.
2. Un campo producido por fuerza electromotriz $\mathbf{E}_f$ no es conservativo.
3. Excepto en electrostática, voltaje y diferencia de potencial por lo general no son equivalentes.

---

[2] Así llamada en honor a Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865), profesor de física de nacionalidad rusa.

9.3. Fuerza electromotriz estática y cinética

Una vez analizada la relación entre fuerza electromotriz y campo eléctrico, examinemos ahora la relación entre los campos eléctrico y magnético en el marco de la ley de Faraday. En el caso de un circuito con una vuelta ($N = 1$), la ecuación (9.1) se convierte en

$$\boxed{V_{\text{fe}} = -\frac{d\Psi}{dt}} \tag{9.4}$$

En términos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, la ecuación (9.4) puede expresarse como

$$V_{\text{fe}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{9.5}$$

donde Ψ ha sido reemplazada por $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ y S es el área de la superficie del circuito delimitado por la trayectoria cerrada L. De la ecuación (9.5) se deduce claramente que los campos tanto eléctrico como magnético están presentes y se interrelacionan en una situación de variación en el tiempo. Adviértase en la ecuación (9.5) que $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$ son acordes con la regla de la mano derecha y el teorema de Stokes, lo que puede observarse en la figura 9.3. La variación del flujo con el tiempo, como en las ecuaciones (9.1) o (9.5), puede deberse a tres causas:

1. Una espira estacionaria en un campo $\mathbf{B}$ variable en el tiempo.
2. Una espira de área variable en el tiempo en un campo $\mathbf{B}$ estático.
3. Una espira de área variable en el tiempo en un campo $\mathbf{B}$ variable en el tiempo.

Consideremos por separado cada una de estas posibilidades.

A. Espira estacionaria en un campo B variable en el tiempo (fuerza electromotriz estática)

Este caso se representa en la figura 9.3, en la que una espira conductora estacionaria se ubica en un campo magnético $\mathbf{B}$ variable en el tiempo. En estas condiciones la ecuación (9.5) se convierte en

$$\boxed{V_{\text{fe}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}} \tag{9.6}$$

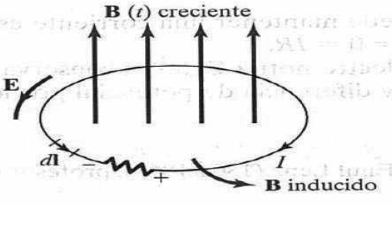


Figura 9.3. Fuerza electromotriz inducida debida a una espira estacionaria en un campo **B** variable en el tiempo.

A esta fuerza electromotriz inducida por una corriente variable en el tiempo (causa también del campo **B** variable en el tiempo) en una espira estacionaria se le llama *fuerza electromotriz estática*, o de transformador en análisis de potencia, ya que se debe a la acción de un transformador. De la aplicación del teorema de Stokes al término intermedio de la ecuación (9.6) se obtiene

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{9.7}$$

Para igualar estas dos integrales, sus integrandos deben ser iguales; es decir,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \tag{9.8}$$

Ésta es una de las ecuaciones de Maxwell para campos variables en el tiempo. Indica que el campo **E** variable en el tiempo no es conservativo ($\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$). Esto no quiere decir que se infrinjan los principios de la conservación de la energía. El trabajo realizado para incorporar una carga alrededor de una trayectoria cerrada en un campo eléctrico variable en el tiempo, por ejemplo, se debe a la energía procedente del campo magnético variable en el tiempo. Obsérvese que la figura 9.3 obedece la ley de Lenz; el flujo de la corriente inducida I produce un campo magnético que se opone a $\mathbf{B}(t)$.

B. Espira móvil en un campo B estático (fuerza electromotriz cinética)

Cuando una espira conductora se halla en movimiento en un campo **B** estático, en ella se induce una fuerza electromotriz. Recuérdese que, de acuerdo con la ecuación (8.2), la fuerza sobre una carga en movimiento a una velocidad uniforme **u** en un campo magnético **B** es

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{8.2}$$

Así, el *campo eléctrico cinético* $\mathbf{E}_m$ se define como

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{Q} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{9.9}$$

Si se parte del supuesto de que una espira conductora en movimiento a una velocidad uniforme **u** se compone de gran número de electrones libres, la fuerza electromotriz inducida en ella es

$$\boxed{V_{\text{fe}} = \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}} \tag{9.10}$$

Esta fuerza se llama *fuerza electromotriz cinética* o *por corte de flujo* porque se debe a una acción de movimiento. Se trata del tipo de fuerza electromotriz presente en máquinas eléctricas como motores, generadores y alternadores. En la figura 9.4 se ilustra una máquina de corriente directa de dos polos con bobina de armadura y un conmutador de dos barras. Aunque el análisis de máquinas de corriente directa rebasa el alcance de este libro, cabe señalar que, en su caso, la generación de voltaje es producto de la rotación de la bobina dentro del campo magnético. En la figura 9.5 se ofrece un ejemplo adicional

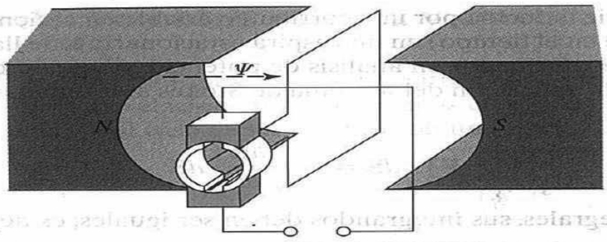


Figura 9.4. Máquina de corriente directa.

de fuerza electromotriz cinética, consistente esta vez en una varilla que se mueve entre un par de rieles. En esta circunstancia, **B** y **u** son perpendiculares, de modo que, en combinación con la ecuación (8.2), la ecuación (9.9) se convierte en

$$\mathbf{F}_m = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \tag{9.11}$$

o

$$F_m = I\ell B \tag{9.12}$$

y la ecuación (9.10) en

$$V_{\text{fe}} = uB\ell \tag{9.13}$$

Tras aplicar el teorema de Stokes a la ecuación (9.10),

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

o

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}_m = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})} \tag{9.14}$$

Nótese que, a diferencia de la ecuación (9.6), en la ecuación (9.10) no hay necesidad de un signo negativo, puesto que ya se ha tenido en cuenta la ley de Lenz.

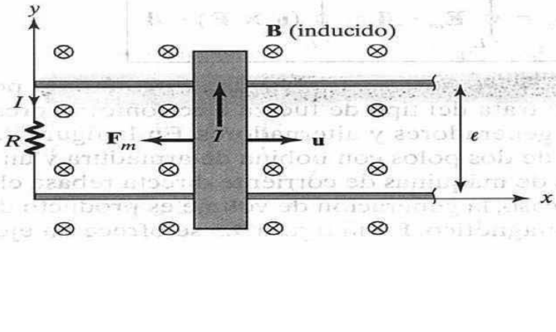


Figura 9.5. Fuerza electromotriz inducida debida a una espira móvil en un campo **B** estático.

No siempre es fácil aplicar la ecuación (9.10). En su uso deben tomarse las precauciones siguientes:

1. La integral de esta ecuación es igual a cero a lo largo de la porción de la espira en la que $\mathbf{u} = 0$. Así, $d\mathbf{l}$ debe considerarse a lo largo de la porción de la espira que cruza el campo (la varilla en el caso de la figura 9.5), donde el valor de $\mathbf{u}$ es diferente de cero.
2. La dirección de la corriente inducida es la misma que la de $\mathbf{E}_m$ o $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Los límites de la integral de esta ecuación se seleccionan en la dirección opuesta a la de la corriente inducida, lo que satisface la ley de Lenz. En la ecuación (9.13), por ejemplo, la integración sobre L es a lo largo de $-\mathbf{a}_y$, mientras que la corriente inducida fluye en la varilla a lo largo de $\mathbf{a}_y$.

C. Espira móvil en un campo B variable en el tiempo

Esta situación general corresponde a la de una espira conductora en movimiento situada en un campo magnético variable en el tiempo. En este caso están presentes tanto la fuerza electromotriz estática como la cinética. La combinación de las ecuaciones (9.6) y (9.10) da como resultado la fuerza electromotriz total, de esta manera

$$\boxed{V_{\text{fe}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}} \tag{9.15}$$

o, a partir de las ecuaciones (9.8) y (9.14),

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})} \tag{9.16}$$

Adviértase que la ecuación (9.15) es equivalente a la ecuación (9.4), de manera que V_{fe} puede hallarse mediante cualquiera de ambas. Más aún, la ecuación (9.4) puede suplir siempre a las ecuaciones (9.6), (9.10) y (9.15).

Ejemplo 9.1

Una barra conductora puede deslizarse libremente sobre dos rieles conductores, como se muestra en la figura 9.6. Calcule el voltaje inducido en ella

a) Si se estaciona en $y = 8$ cm y $\mathbf{B} = 4 \cos 10^6 t\, \mathbf{a}_z$ mWb/m^2

b) Si se desliza a una velocidad de $\mathbf{u} = 20\mathbf{a}_y$ m/s y $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_z$ mWb/m^2

c) Si se desliza a una velocidad de $\mathbf{u} = 20\mathbf{a}_y$ m/s y $\mathbf{B} = 4 \cos (10^6 t - y)\, \mathbf{a}_z$ mWb/m^2

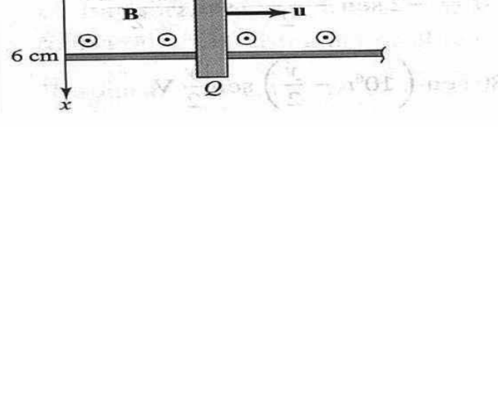


Figura 9.6. Para el ejemplo 9.1.

Solución:

a) Este caso corresponde al de fuerza electromotriz estática, la cual está dada por

$$V_{\text{fe}} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_{y=0}^{0.08}\int_{x=0}^{0.06} 4(10^{-3})(10^{6}) \text{ sen } 10^{6}t \; dx\, dy$$

$$= 4(10^{3})(0.08)(0.06) \text{ sen } 10^{6}t$$
$$= 19.2 \text{ sen } 10^{6}t \text{ V}$$

De acuerdo con la ley de Lenz, la polaridad del voltaje inducido es tal que el potencial del punto P en la barra es menor que el de Q cuando $\mathbf{B}$ se incrementa.

b) Este caso corresponde al de fuerza electromotriz cinética:

$$V_{\text{fe}} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{x=\ell}^{0} (u\mathbf{a}_y \times B\mathbf{a}_z) \cdot dx\mathbf{a}_x$$
$$= -uB\ell = -20(4.10^{-3})(0.06)$$
$$= -4.8 \text{ mV}$$

c) En este caso están presentes tanto la fuerza electromotriz estática como la cinética. Este problema puede resolverse de dos maneras.

Método 1. Mediante la ecuación (9.15)

$$V_{\text{fe}} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{9.1.1}$$

$$= \int_{x=0}^{0.06}\int_{0}^{y} 4.10^{-3}\,(10)^{6} \text{ sen}(10^{6}t - y')\,dy'\,dx$$
$$+ \int_{0.06}^{0} [20\mathbf{a}_y \times 4.10^{-3} \cos(10^{6}t - y)\mathbf{a}_z] \cdot dx\,\mathbf{a}_x$$
$$= 240 \cos(10^{6}t - y')\Big|_{0}^{y} - 80(10^{-3})(0.06) \cos(10^{6}t - y)$$
$$= 240 \cos(10^{6}t - y) - 240 \cos 10^{6}t - 4.8(10^{-3}) \cos(10^{6}t - y)$$
$$\simeq 240 \cos(10^{6}t - y) - 240 \cos 10^{6}t \tag{9.1.2}$$

ya que la fuerza electromotriz cinética es despreciable en comparación con la estática. Si se emplea la identidad trigonométrica

$$\cos A - \cos B = -2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \text{ sen } \frac{A-B}{2}$$

$$V_{\text{fe}} = 480 \text{ sen}\left(10^{6}t - \frac{y}{2}\right) \text{ sen } \frac{y}{2} \text{ V} \tag{9.1.3}$$

Método 2. Opcionalmente, es posible aplicar la ecuación (9.4),

$$V_{\text{fe}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{9.1.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Psi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{y=0}^{y} \int_{x=0}^{0.06} 4\cos(10^6 t - y)\,dx\,dy \\
&= -4(0.06)\,\text{sen}(10^6 t - y)\Big|_{y=0}^{y} \\
&= -0.24\,\text{sen}(10^6 t - y) + 0.24\,\text{sen}\,10^6 t \text{ mWb}
\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{dy}{dt} = u \rightarrow y = ut = 20t$$

Por tanto,

$$\Psi = -0.24\,\text{sen}(10^6 t - 20t) + 0.24\,\text{sen}\,10^6 t \text{ mWb}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{fe}} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.24(10^6 - 20)\cos(10^6 t - 20t) - 0.24(10^6)\cos 10^6 t \text{ mV} \\
&\simeq 240\cos(10^6 t - y) - 240\cos 10^6 t \text{ V}
\end{aligned} \tag{9.1.5}$$

igual resultado que en la ecuación (9.1.2). En la ecuación (9.1.1), la dependencia de y respecto del tiempo se considera en $\int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$, lo que en cambio ya no preocupa en $\partial \mathbf{B}/\partial t$. ¿Por qué? Porque al calcular la fuerza electromotriz estática se da por supuesto que la espira es estacionaria. Por el contrario, esta sutileza debe tenerse en cuenta al aplicar la ecuación (9.1.1). Esto explica que el segundo método sea más sencillo.

Ejercicio 9.1

Considérese la espira que se presentó en la figura 9.5. Si $\mathbf{B} = 0.5\mathbf{a}_z$ Wb/m², $R = 20\ \Omega$, $\ell = 10$ cm y la varilla se mueve a una velocidad constante de $8\mathbf{a}_x$ m/s, halle

a) La fuerza electromotriz inducida en la varilla.

b) La corriente a través del resistor.

c) La fuerza cinética sobre la varilla.

d) La potencia disipada por el resistor.

Respuestas: *a)* 0.4 V, *b)* 20 mA, *c)* $-\mathbf{a}_x$ mN y *d)* 8 mW.

Ejemplo 9.2

La espira que aparece en la figura 9.7 se halla dentro de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 50\mathbf{a}_x$ mWb/m^2. Si el lado DC de la espira corta las líneas de flujo en la frecuencia de 50 Hz y la espira se encuentra en el plano yz en el instante $t = 0$, calcule

a) La fuerza electromotriz inducida en $t = 1$ ms.

b) La corriente inducida en $t = 3$ ms.

Solución:

a) Puesto que el campo **B** es invariable en el tiempo, la fuerza electromotriz inducida es cinética; es decir,

$$V_{\text{fe}} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

donde

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{l}_{DC} = dz\,\mathbf{a}_z, \qquad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \frac{\rho\, d\phi}{dt}\,\mathbf{a}_\phi = \rho\omega\mathbf{a}_\phi$$

$$\rho = AD = 4 \text{ cm}, \qquad \omega = 2\pi f = 100\pi$$

Como **u** y $d\mathbf{l}$ están en coordenadas cilíndricas, **B** se transforma en coordenadas cilíndricas mediante la ecuación (2.9):

$$\mathbf{B} = B_o\mathbf{a}_x = B_o\,(\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi)$$

donde $B_o = 0.05$. Por tanto,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ 0 & \rho\omega & 0 \\ B_o\cos\phi & -B_o\operatorname{sen}\phi & 0 \end{vmatrix} = -\rho\omega B_o\cos\phi\,\mathbf{a}_z$$

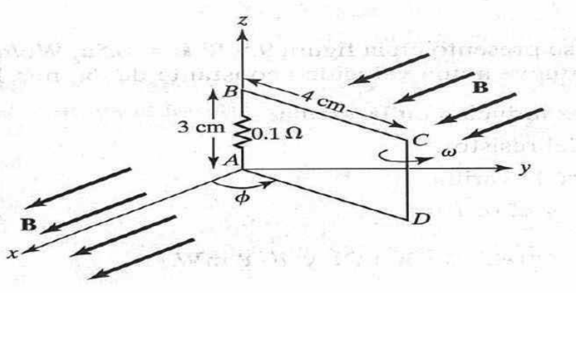


Figura 9.7. Para el ejemplo 9.2; la polaridad indica la fuerza electromotriz creciente.

y

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\rho\omega B_o \cos\phi \, dz = -0.04(100\pi)(0.05)\cos\phi \, dz$$
$$= -0.2\pi \cos\phi \, dz$$

$$V_{fe} = \int_{z=0}^{0.03} -0.2\pi \cos\phi \, dz = -6\pi \cos\phi \text{ mV}$$

Para determinar ϕ, recuérdese que

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \phi = \omega t + C_o$$

donde C_o es una constante de integración. En $t = 0$, $\phi = \pi/2$, ya que la espira se sitúa en el plano yz en ese instante, $C_o = \pi/2$. En consecuencia,

$$\phi = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

y

$$V_{fe} = -6\pi \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 6\pi \operatorname{sen}(100\pi t) \text{ mV}$$

En $t = 1$ ms,

$$V_{fe} = 6\pi \operatorname{sen}(0.1\pi) = 5.825 \text{ mV}$$

b) La corriente inducida es

$$i = \frac{V_{fe}}{R} = 60\pi \operatorname{sen}(100\pi t) \text{ mA}$$

En $t = 3$ ms,

$$i = 60\pi \operatorname{sen}(0.3\pi) \text{ mA} = 0.1525 \text{ A}$$

Ejercicio 9.2

Repita el ejemplo 9.2 con los mismos datos, excepto que el campo $\mathbf{B}$ cambia a:

a) $\mathbf{B} = 50\mathbf{a}_y$ mWb/m^2; esto es, el campo magnético se orienta a lo largo de la dirección de y.

b) $\mathbf{B} = 0.02t\,\mathbf{a}_x$ Wb/m^2; esto es, el campo magnético es variable en el tiempo.

Respuestas: *a)* -17.93 mV, -0.1108 A y *b)* 20.5 μV, -41.92 mA.

Ejemplo 9.3

El circuito magnético que se presenta en la figura 9.8 posee una sección transversal uniforme de 10^{-3} m^2. Si está energizado por una corriente de $i_1(t) = 3 \operatorname{sen} 100\pi t$ A en la bobina de $N_1 = 200$ vueltas, halle la fuerza electromotriz inducida en la bobina de $N_2 = 100$ vueltas. Suponga que $\mu = 500\,\mu_o$.

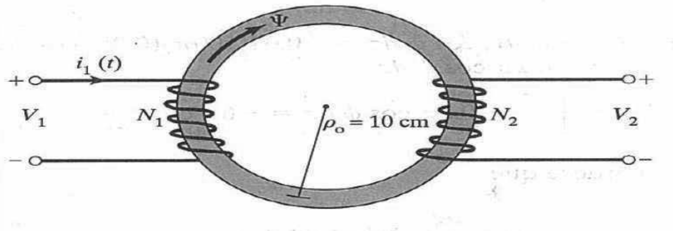


Figura 9.8. Circuito magnético para el ejemplo 9.3.

Solución:
El flujo en el circuito es

$$\Psi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{N_1 i_1}{\ell/\mu S} = \frac{N_1 i_1 \mu S}{2\pi\rho_o}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida en la segunda bobina es

$$\begin{aligned} V_2 &= -N_2 \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{N_1 N_2 \mu S}{2\pi\rho_o}\frac{di_1}{dt} \\ &= -\frac{100 \cdot (200) \cdot (500) \cdot (4\pi \times 10^{-7}) \cdot (10^{-3}) \cdot 300\pi \cos 100\pi t}{2\pi \cdot (10 \times 10^{-2})} \\ &= -6\pi \cos 100\pi t \text{ V} \end{aligned}$$

Ejercicio 9.3

Un núcleo magnético de sección transversal uniforme de 4 cm² está conectado a un generador de 120 V, 60 Hz, como se muestra en la figura 9.9. Calcule la fuerza electromotriz inducida V_2 en la bobina secundaria.

Respuesta: 72 V.

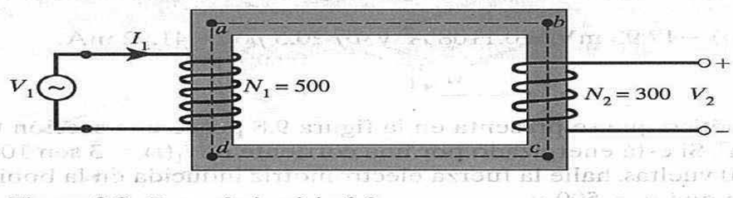


Figura 9.9. Para el ejercicio 9.3.

9.4. Corriente de desplazamiento

En la sección anterior reconsideramos en esencia la ecuación del rotacional de Maxwell para campos electrostáticos y la modificamos para situaciones de variación en el tiempo a fin de satisfacer la ley de Faraday. Reconsideremos ahora la ecuación del rotacional de Maxwell para campos magnéticos (ley de los circuitos de Ampère) en función de la variación en el tiempo.

Recuérdese que en el caso de campos electromagnéticos estáticos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{9.17}$$

Sin embargo, la divergencia del rotacional de un campo vectorial es idéntica a cero (véase el ejemplo 3.10). Por consiguiente,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} \tag{9.18}$$

No obstante, la continuidad de corriente en la ecuación (5.43) exige que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0 \tag{9.19}$$

Es evidente, así, que las ecuaciones (9.18) y (9.19) son incompatibles respecto de condiciones de variación en el tiempo. Debe modificarse entonces la ecuación (9.17), a fin de que sea acorde con la ecuación (9.19). Se añade para ello un término a la ecuación (9.17), la que se convierte en

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \tag{9.20}$$

donde $\mathbf{J}_d$ está por determinarse y definirse. De nueva cuenta, la divergencia del rotacional de un vector es igual a cero. Por tanto:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d \tag{9.21}$$

Para que la ecuación (9.21) sea acorde con la ecuación (9.19),

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.22a}$$

o

$$\boxed{\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{dt}} \tag{9.22b}$$

La sustitución de la ecuación (9.22b) en la ecuación (9.20) resulta en

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \tag{9.23}$$

Ésta es la ecuación de Maxwell (basada en la ley de los circuitos de Ampère) para un campo variable en el tiempo. El término $\mathbf{J}_d = \partial \mathbf{D}/\partial t$ se conoce como *densidad de corriente de desplazamiento*, en tanto que $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente de conducción

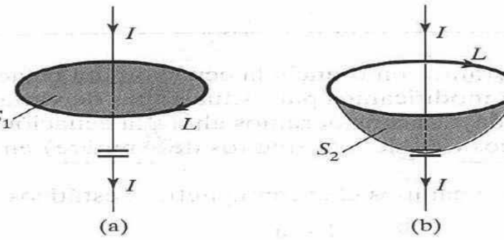


Figura 9.10. Dos superficies de integración que demuestran la necesidad de $\mathbf{J}_d$ en la ley de los circuitos de Ampère.

($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$).[3] La inserción de $\mathbf{J}_d$ en la ecuación (9.17) fue una de las mayores contribuciones de Maxwell. Sin ese término, la propagación de ondas electromagnéticas (ondas de radio o televisión, por ejemplo) sería imposible. A bajas frecuencias, $\mathbf{J}_d$ suele ser insignificante en comparación con $\mathbf{J}$, pero en radiofrecuencias son comparables. En la época de Maxwell no existían aún fuentes de alta frecuencia, de modo que la comprobación experimental de la ecuación (9.23) era irrealizable. Tuvieron que pasar varios años para que Hertz la consiguiera, tras generar y detectar ondas de radio. Éste es uno de los contados casos en que la argumentación matemática se ha adelantado a la investigación experimental.

Con base en la densidad de corriente de desplazamiento, la *corriente de desplazamiento* se define como

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{9.24}$$

Téngase presente que la corriente de desplazamiento es resultado de campos eléctricos variables en el tiempo. Un ejemplo común de tal corriente es la que pasa por un capacitor (o condensador) cuando se aplica a sus placas una fuente de voltaje alterno. Este ejemplo, representado en la figura 9.10, ilustra la necesidad de la corriente de desplazamiento. La aplicación de la versión estricta de la ley de los circuitos de Ampère a la trayectoria cerrada L que aparece en la figura 9.10*(a)* resulta en

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{\text{enc}} = I \tag{9.25}$$

donde I es la corriente a través del conductor y S_1 la superficie plana delimitada por L. En el caso, en cambio, de la superfice S_2 en forma de globo que pasa entre las placas del capacitor en la figura 9.10*(b)*,

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{\text{enc}} = 0 \tag{9.26}$$

porque por S_2 no fluye corriente de conducción ($\mathbf{J} = 0$). Esto es contradictorio, ya que en ambos casos se utiliza la misma trayectoria cerrada L. Para resolver esta contradicción,

[3] Recuérdese que $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$ es a su vez la densidad de corriente de convección.

es preciso incluir la corriente de desplazamiento en la ley de los circuitos de Ampère. La densidad de corriente total es $\mathbf{J} + \mathbf{J}_d$. En la ecuación (9.25) $\mathbf{J}_d = 0$, de manera que la ecuación no pierde validez. En la ecuación (9.26), $\mathbf{J} = 0$, de modo que

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ}{dt} = I \tag{9.27}$$

En ambas superficies se obtiene entonces la misma corriente, aunque en S_1 se trata de corriente de conducción y en S_2 de corriente de desplazamiento.

Ejemplo 9.4

Un voltaje de 50 sen $10^3\,t$ V se aplica a las placas paralelas de un capacitor, con área de 5 cm^2 y 3 mm de separación. Calcule la corriente de desplazamiento suponiendo que $\varepsilon = 2\varepsilon_o$.

Solución:

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V}{d}$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d}\frac{dV}{dt}$$

Por tanto,

$$I_d = J_d \cdot S = \frac{\varepsilon S}{d}\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

lo que equivale a la corriente de conducción, dada por

$$I_c = \frac{dQ}{dt} = S\frac{d\rho_s}{dt} = S\frac{dD}{dt} = \varepsilon S\frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon S}{d}\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

$$I_d = 2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{5 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}} \cdot 10^3 \times 50 \cos 10^3 t$$

$$= 147.4 \cos 10^3 t \text{ nA}$$

Ejercicio 9.4

En el vacío, $\mathbf{E} = 20 \cos(\omega t - 50x)\mathbf{a}_y$ V/m. Calcule

a) $\mathbf{J}_d$
b) $\mathbf{H}$
c) ω

Respuestas: *a)* $-20\omega\varepsilon_o \operatorname{sen}(\omega t - 50x)\mathbf{a}_y$ A/m^2, *b)* $0.4\,\omega\varepsilon_o \cos(\omega t - 50x)\mathbf{a}_z$ A/m y *c)* 1.5×10^{10} rad/s.

9.5. Versión definitiva de las ecuaciones de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879) es considerado el padre de la teoría electromagnética contemporánea. Sus célebres estudios condujeron al descubrimiento de las ondas electromagnéticas.[4] Luego de cinco años de indagación teórica (cuando tenía entre 35 y 40 años de edad), dio a conocer la primera teoría unificada de la electricidad y el magnetismo, en la que, además de reunir todos los resultados experimentales y teóricos obtenidos hasta entonces en esas materias, introdujo la corriente de desplazamiento y predijo la existencia de ondas electromagnéticas. Sus ecuaciones no fueron plenamente aceptadas por muchos científicos hasta ser confirmadas más tarde por Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), profesor de física de nacionalidad alemana que logró generar y detectar ondas de radio.

En la tabla 7.2, inserta en la sección 7.6, se presentaron las leyes del electromagnetismo para condiciones estáticas que Maxwell condensó en cuatro ecuaciones. Sin embargo, la versión de esas ecuaciones de más amplia aplicación es la referente a condiciones variables en el tiempo, la cual se presenta en la tabla 9.1. Como puede observarse en esa tabla, las ecuaciones de la divergencia permanecen inalterables, mientras que las del rotacional exhiben ciertas modificaciones. La forma integral de las ecuaciones de Maxwell describe las leyes físicas subyacentes, en tanto que la forma diferencial es la de uso común en la resolución de problemas. Para que un campo pueda "calificarse" como electromagnético debe satisfacer las cuatro ecuaciones de Maxwell. Es imposible exagerar la importancia de estas ecuaciones, puesto que resumen todas las leyes electromagnéticas conocidas hasta la fecha. En lo que resta de este libro se hará frecuente referencia a ellas.

Puesto que el propósito de esta sección es compendiar el contenido del libro, conviene citar ecuaciones que van de la mano de las de Maxwell. Se asocian con éstas tanto la ecuación de la fuerza, de Lorentz,

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{9.28}$$

Tabla 9.1. Versión de aplicación generalizada de las ecuaciones de Maxwell.

Forma diferencial	*Forma integral*	*Acotaciones*
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv$	Ley de Gauss
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Inexistencia de cargas magnéticas aisladas*
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	Ley de Faraday
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$	Ley de los circuitos de Ampère

*También conocida como *ley de Gauss para campos magnéticos.*

[4] James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocés, recogió sus estudios en el libro *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, Nueva York, 2 vols., 1954.

como la ecuación de la continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{9.29}$$

Los conceptos de linealidad, isotropía y homogeneidad de un medio material también son aplicables a los campos variables en el tiempo; en el caso de un medio lineal, homogéneo e isotrópico, caracterizado por σ, ε y μ, las relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_o\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{9.30a}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{9.30b}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \rho_v\mathbf{u} \tag{9.30c}$$

mantienen validez en campos variables en el tiempo, lo mismo que, en consecuencia, las condiciones en la frontera

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{o} \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = 0 \tag{9.31a}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K \quad \text{o} \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K} \tag{9.31b}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad \text{o} \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{a}_{n12} = \rho_s \tag{9.31c}$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad \text{o} \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{a}_{n12} = 0 \tag{9.31d}$$

Sin embargo, respecto de un conductor perfecto ($\sigma \simeq \infty$) en un campo variable en el tiempo,

$$\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{H} = 0, \qquad \mathbf{J} = 0 \tag{9.32}$$

y por tanto,

$$\mathbf{B}_n = 0, \qquad \mathbf{E}_t = 0 \tag{9.33}$$

La ecuación (9.31) también es aplicable a un dieléctrico perfecto ($\sigma \simeq 0$), salvo que en este caso $\mathbf{K} = 0$. Aunque las ecuaciones (9.28) a (9.33) no son ecuaciones de Maxwell, están vinculadas con ellas.

Para completar esta sección de resumen, en la figura 9.11 se ofrece una asociación estructurada de los potenciales y campos vectoriales de los campos eléctrico y magnético. Este diagrama de flujo electromagnético permite visualizar las relaciones básicas entre cantidades de esos campos. Indica asimismo la posibilidad de hallar fácilmente formulaciones opcionales para un problema dado. En las figuras 9.11*(b)* y *(c)* se introdujo ρ^m como densidad magnética libre (similar a ρ_v) —cuyo valor es de cero, desde luego— y $\mathbf{A}_e$ como densidad de corriente magnética (análoga a $\mathbf{J}$). Empleando términos del análisis de esfuerzos, la simbolización de las principales relaciones es la siguiente:

a) ecuaciones de compatibilidad

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho^m = 0 \tag{9.34}$$

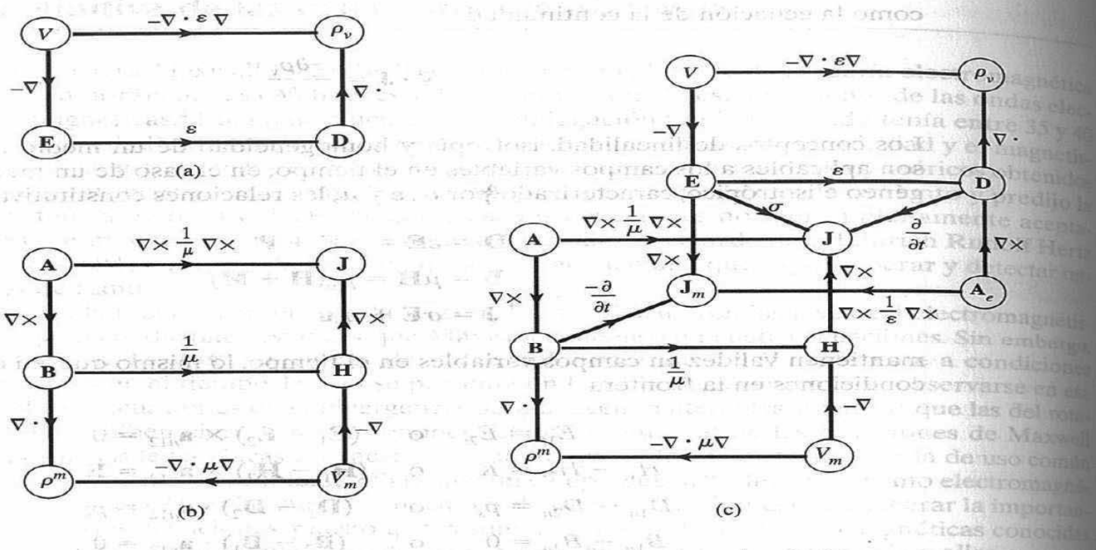


Figura 9.11. Diagrama de flujo electromagnético que muestra la relación entre potenciales y campos vectoriales: **(a)** sistema electrostático, **(b)** sistema magnetostático, **(c)** sistema electromagnético. (Adaptación autorizada por el IEEE Publishing Department.)

y

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{J}_m \tag{9.35}$$

b) ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{9.36}$$

y

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{9.37}$$

c) ecuaciones de equilibrio

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{9.38}$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.39}$$

†9.6. Potenciales variables en el tiempo

Al referirnos a los campos electromagnéticos estáticos, obtuvimos el potencial eléctrico escalar como

$$V = \int_v \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon R} \tag{9.40}$$

y el potencial magnético vectorial como

$$\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu J \, dv}{4\pi R} \tag{9.41}$$

Examinemos ahora qué ocurre con estos potenciales cuando los campos varían en el tiempo. Recuérdese que $\mathbf{A}$ se definió a partir del hecho de que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, lo que también rige en el caso de los campos variables en el tiempo. De ahí que la relación

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \tag{9.42}$$

sea válida en situaciones de variación en el tiempo. La combinación de la ley de Faraday expresada en la ecuación (9.8) con la ecuación (9.42) da como resultado

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \tag{9.43a}$$

o

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{9.43b}$$

En vista de que el rotacional del gradiente de un campo escalar es idéntico a cero (véase el ejercicio 3.10), la solución de la ecuación (9.43b) es

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \tag{9.44}$$

o

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \tag{9.45}$$

Con fundamento en las ecuaciones (9.42) y (9.45) es posible determinar los campos vectoriales $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$, siempre que se conozcan los potenciales $\mathbf{A}$ y V. Sin embargo, hemos de hallar expresiones de $\mathbf{A}$ y V similares a las formuladas en las ecuaciones (9.40) y (9.41) que se adecuen a campos variables en el tiempo.

La tabla 9.1 y la ecuación (9.38) revelan que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ es válida para condiciones de variación en el tiempo. De la adopción de la divergencia de la ecuación (9.45) y el uso de las ecuaciones (9.37) y (9.38) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

o

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{9.46}$$

La adopción del rotacional de la ecuación (9.42) y la incorporación de las ecuaciones (9.23) y (9.45) resulta en

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \\ &= \mu \mathbf{J} - \mu\varepsilon\, \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{9.47}$$

donde se han supuesto $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. La aplicación de la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{9.48}$$

a la ecuación (9.47) produce

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \tag{9.49}$$

Un campo vectorial se define inequívocamente cuando se especifican su rotacional y su divergencia. En la ecuación (9.42) ya se ha especificado el rotacional de $\mathbf{A}$; por razones que se aclararán más adelante, es posible expresar la divergencia de $\mathbf{A}$ como

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}} \tag{9.50}$$

Esta expresión, en la que se relacionan $\mathbf{A}$ y V, se llama *condición de Lorentz para potenciales*. Esta condición se tuvo en mente al optar por $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ para campos magnetostáticos en la ecuación (7.59). Al imponer la condición de Lorentz de la ecuación (9.50), las ecuaciones (9.46) y (9.49) se convierten respectivamente en

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}} \tag{9.51}$$

y

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}} \tag{9.52}$$

que son *ecuaciones de ondas* que se explicarán en el capítulo siguiente. La razón de haber optado por la condición de Lorentz salta a la vista al examinar las ecuaciones (9.51) y (9.52). Tal condición disocia las ecuaciones (9.46) y (9.49) y produce una simetría entre las ecuaciones (9.51) y (9.52). Es posible demostrar que la condición de Lorentz puede obtenerse de la ecuación de continuidad; así, la elección de la ecuación (9.50) no es arbitraria. Cabe destacar que las ecuaciones (6.4) y (7.60) son casos estáticos especiales de las ecuaciones (9.51) y (9.52), respectivamente. En otras palabras, los potenciales V y $\mathbf{A}$ sa-

tisfacen las ecuaciones de Poisson para condiciones de variación en el tiempo. Así como las ecuaciones (9.40) y (9.41) son las soluciones o formas integrales de las ecuaciones (6.4) y (7.60), puede demostrarse que las soluciones[5] de las ecuaciones (9.51) y (9.52) son

$$V = \int_v \frac{[\rho_v]\, dv}{4\pi\varepsilon R} \tag{9.53}$$

y

$$\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu[\mathbf{J}]\, dv}{4\pi R} \tag{9.54}$$

El término $[\rho_v]$ (o $[\mathbf{J}]$) significa que el instante t en $\rho_v(x, y, z, t)$ [o $\mathbf{J}(x, y, z, t)$] es reemplazado por el *momento retardado* t', dado por

$$t' = t - \frac{R}{u} \tag{9.55}$$

donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es la distancia entre el punto de origen $\mathbf{r}'$ y el punto de observación $\mathbf{r}$ y

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{9.56}$$

es la velocidad de propagación de la onda. En el vacío, $u = c \simeq 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz. Los potenciales V y $\mathbf{A}$ de las ecuaciones (9.53) y (9.54) se llaman *potencial eléctrico escalar retardado* y *potencial magnético vectorial retardado*, respectivamente. Dadas ρ_v y $\mathbf{J}$, V y $\mathbf{A}$ pueden determinarse mediante las ecuaciones (9.53) y (9.54); a partir de V y $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ pueden determinarse por medio de las ecuaciones (9.45) y (9.42), respectivamente.

9.7. Campos armónicos en el tiempo

Hasta aquí, la dependencia temporal de los campos electromagnéticos ha sido arbitraria. Para ser específicos, supondremos que los campos son *armónicos en el tiempo*.

> Un **campo armónico en el tiempo** es el que varía periódica o sinusoidalmente en el tiempo.

Además de ser de valor práctico, el análisis sinusoidal puede prolongarse a la mayoría de las formas de ondas por medio de técnicas de transformación de Fourier. Los sinusoides son de fácil expresión en fasores, con los cuales es muy sencillo trabajar. Sin embargo, antes de aplicar fasores a campos electromagnéticos precisemos el concepto de fasor.

Un *fasor* z es un número complejo que puede expresarse como

$$z = x + jy = r \underline{/\phi} \tag{9.57}$$

[5] Véase, por ejemplo, D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, pp. 291-292.

o

$$z = re^{j\phi} = r(\cos\phi + j \operatorname{sen}\phi) \tag{9.58}$$

donde $j = \sqrt{-1}$, x es la parte real de z; y es la parte imaginaria de z; r es la magnitud de z, dada por

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9.59}$$

y ϕ es la fase de z, dada por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{9.60}$$

No deben confundirse x, y, z, r y ϕ con las variables de coordenadas, pese a ser iguales (habrían podido usarse otras letras, pero es difícil hallar mejores). El fasor z puede representarse en *forma rectangular* como $z = x + jy$ y en *forma polar* como $z = r\,\underline{/\phi} = re^{j\phi}$. Estas dos formas de representación de z se refieren en las ecuaciones (9.57) a (9.60) y se ilustran en la figura 9.12. Es recomendable efectuar la adición y sustracción de fasores en forma rectangular, y la multiplicación y división en forma polar.

Dados los números complejos

$$z = x + jy = r\,\underline{/\phi}, \quad z_1 = x_1 + jy_1 = r_1\,\underline{/\phi_1} \quad \text{y} \quad z_2 = x_2 + jy_2 = r_2\,\underline{/\phi_2}$$

cabe poner de relieve las propiedades básicas siguientes.

Adición:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{9.61a}$$

Sustracción:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \tag{9.61b}$$

Multiplicación:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\underline{/\phi_1 + \phi_2} \tag{9.61c}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\underline{/\phi_1 - \phi_2} \tag{9.61d}$$

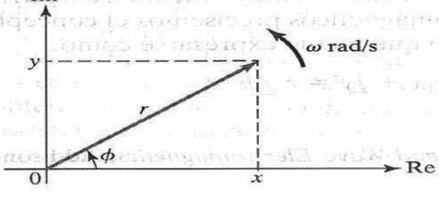


Figura 9.12. Representación de un fasor $z = x + jy = r\,\underline{/\phi}$

Raíz cuadrada:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\ \underline{/\phi/2} \tag{9.61e}$$

Conjugado complejo:

$$z^* = x - jy = r\underline{/-\phi} = re^{-j\phi} \tag{9.61f}$$

En el apéndice A.2 se detallan otras propiedades de los números complejos.

Para introducir el elemento tiempo, sea

$$\phi = \omega t + \theta \tag{9.62}$$

donde θ puede ser una función de coordenadas temporales o espaciales o una constante. Las partes real (Re) e imaginaria (Im) de

$$re^{j\phi} = re^{j\theta}re^{j\omega t} \tag{9.63}$$

están dadas respectivamente por

$$\text{Re}\ (re^{j\phi}) = r\cos\ (\omega t + \theta) \tag{9.64a}$$

e

$$\text{Im}\ (re^{j\phi}) = r\ \text{sen}\ (\omega t + \theta). \tag{9.64b}$$

Así, una corriente sinusoidal $I(t) = I_o \cos(\omega t + \theta)$, por ejemplo, equivale a la parte real de $I_o e^{j\theta}e^{j\omega t}$. La corriente $I'(t) = I_o\ \text{sen}(\omega t + \theta)$, la cual es la parte imaginaria de $I_o e^{j\theta}e^{j\omega t}$, también puede representarse como la parte real de $I_o e^{j\theta}e^{j\omega t}e^{-j90°}$, ya que sen $\alpha = \cos(\alpha - 90°)$. Al realizar operaciones matemáticas, sin embargo, se debe ser congruente en el empleo de la parte real o imaginaria de una cantidad; no es posible usar ambas al mismo tiempo.

El término complejo $I_o e^{j\theta}$, el cual resulta de la eliminación del factor de tiempo $e^{j\omega t}$ en $I(t)$, se llama *corriente de fasor* y es denotado con I_s; es decir,

$$I_s = I_o e^{j\theta} = I_o\ \underline{/\theta} \tag{9.65}$$

donde el subíndice s denota la forma de fasor de $I(t)$. Así, $I(t) = I_o \cos(\omega t + \theta)$, la *forma instantánea*, puede expresarse como

$$I(t) = \text{Re}\ (I_s e^{j\omega t}) \tag{9.66}$$

En general, un fasor puede ser un escalar o un vector. Si un vector $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ es un campo armónico en el tiempo, la *forma de fasor* de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{A}_s(x, y, z)$; la relación entre estas dos cantidades está dada por

$$\boxed{\mathbf{A} = \text{Re}\ (\mathbf{A}_s e^{j\omega t})} \tag{9.67}$$

Si, por ejemplo, $\mathbf{A} = A_o \cos(\omega t - \beta x)\ \mathbf{a}_y$, $\mathbf{A}$ puede expresarse como

$$\mathbf{A} = \text{Re}(A_o e^{-j\beta x}\ \mathbf{a}_y e^{j\omega t}) \tag{9.68}$$

La comparación de esta expresión con la ecuación (9.67) indica que la forma de fasor de $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{A}_s = A_o e^{-j\beta x}\ \mathbf{a}_y \tag{9.69}$$

Nótese que a partir de la ecuación (9.67)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Re}(\mathbf{A}_s e^{j\omega t}) \\ &= \mathrm{Re}(j\omega \mathbf{A}_s e^{j\omega t})\end{aligned} \tag{9.70}$$

lo que demuestra que tomar la derivada temporal de la cantidad instantánea equivale a multiplicar su forma de fasor por $j\omega$. Esto es,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \to j\omega \mathbf{A}_s \tag{9.71}$$

De igual modo,

$$\int \mathbf{A}\,\partial t \to \frac{\mathbf{A}_s}{j\omega} \tag{9.72}$$

En la ecuación (9.67) se optó por la parte real, al modo del análisis de circuitos, pero habría podido optarse por la parte imaginaria. Conviene destacar también la diferencia básica entre la forma instantánea $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ y su forma de fasor $\mathbf{A}_s(x, y, z)$; la primera depende del tiempo y es real, mientras que la segunda es invariable en el tiempo y generalmente compleja. Es más sencillo trabajar con $\mathbf{A}_s$ y obtener $\mathbf{A}$ a partir de ella mediante la ecuación (9.67) cuando sea necesario.

Apliquemos ahora el concepto de fasor a campos electromagnéticos variables en el tiempo. Las cantidades de los campos $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, $\mathbf{D}(x, y, z, t)$, $\mathbf{H}(x, y, z, t)$, $\mathbf{B}(x, y, z, t)$, $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ y $\rho_v(x, y, z, t)$ y sus derivadas pueden expresarse en forma de fasor mediante las ecuaciones (9.67) y (9.71). En la tabla 9.2 se presentan en forma de fasor las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos armónicos en el tiempo en un medio lineal, isotrópico y homogéneo. En ella se ha omitido el factor de tiempo $e^{j\omega t}$, puesto que está asociado con todos los términos y por tanto es redundante, lo que resulta en ecuaciones independientes del tiempo. En esto radica precisamente la justificación del empleo de fasores: el factor de tiempo puede excluirse del análisis de campos armónicos en el tiempo, e incluirse cuando sea necesario. En la tabla 9.2 se ha supuesto asimismo el factor de tiempo $e^{j\omega t}$. Habría sido igualmente posible suponer el factor de tiempo $e^{-j\omega t}$, para lo cual habría bastado con reemplazar cada j por $-j$.

Tabla 9.2. Ecuaciones de Maxwell para campos armónicos en el tiempo suponiendo el factor de tiempo $e^{j\omega t}$.

Forma puntual	*Forma integral*
$\nabla \cdot \mathbf{D}_s = \rho_{vs}$	$\oint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{vs}\, dv$
$\nabla \cdot \mathbf{B}_s = 0$	$\oint \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega \mathbf{B}_s$	$\oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s$	$\oint \mathbf{H}_s \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s) \cdot d\mathbf{S}$

Ejemplo 9.5

Evalúe los números complejos

a) $z_1 = \dfrac{j(3 - j4)^*}{(-1 + j6)(2 + j)^2}$

b) $z_2 = \left[\dfrac{1 + j}{4 - j8}\right]^{1/2}$

Solución:

a) Este problema puede resolverse de dos maneras: trabajando con z en forma rectangular o en forma polar.

Método 1 (forma rectangular).
Sea

$$z_1 = \frac{z_3 z_4}{z_5 z_6}$$

donde

$$\begin{aligned} z_3 &= j \\ z_4 &= (3 - j4)^* = \text{ el conjugado complejo de } (3 - j4) \\ &= 3 + j4 \end{aligned}$$

(Para hallar el conjugado complejo de un número complejo, sencillamente se reemplaza cada j por $-j$.)

$$z_5 = -1 + j6$$

y

$$z_6 = (2 + j)^2 = 4 - 1 + j4 = 3 + j4$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} z_3 z_4 &= j(3 + j4) = -4 + j3 \\ z_5 z_6 &= (-1 + j6)(3 + j4) = -3 - j4 + j18 - 24 \\ &= -27 + j14 \end{aligned}$$

y

$$z_1 = \frac{-4 + j3}{-27 + j14}$$

De la multiplicación y división de z_1 por y entre $-27 - j14$ (racionalización) se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(-4 + j3)(-27 - j14)}{(-27 + j14)(-27 - j14)} = \frac{150 - j25}{27^2 + 14^2} \\ &= 0.1622 - j0.027 = 0.1644 \underline{/-9.46^\circ} \end{aligned}$$

Método 2 (forma polar):

$$\begin{aligned} z_3 &= j = 1 \underline{/90^\circ} \\ z_4 &= (3 - j4)^* = 5(\underline{/-53.13^\circ})^* = 5\underline{/53.13^\circ} \end{aligned}$$

$$z_5 = (-1 + j6) = \sqrt{37}\ \underline{/99.46^\circ}$$
$$z_6 = (2 + j)^2 = (\sqrt{5}\ \underline{/26.56^\circ})^2 = 5\ \underline{/53.13^\circ}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1\ \underline{/90^\circ})(5\ \underline{/53.13^\circ})}{(\sqrt{37}\ \underline{/99.46^\circ})(5\ \underline{/53.13^\circ})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{37}}\ \underline{/90^\circ - 99.46^\circ} = 0.1644\ \underline{/-9.46^\circ} \\ &= 0.1622 - j0.027 \end{aligned}$$

como se obtuvo anteriormente.

b) Sea

$$z_2 = \left[\frac{z_7}{z_8}\right]^{1/2}$$

donde

$$z_7 = 1 + j = \sqrt{2}\ \underline{/45^\circ}$$

y

$$z_8 = 4 - j8 = 4\sqrt{5}\ \underline{/-63.4^\circ}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{z_7}{z_8} &= \frac{\sqrt{2}\ \underline{/45^\circ}}{4\sqrt{5}\ \underline{/-63.4^\circ}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\ \underline{/45^\circ - -63.4^\circ} \\ &= 0.1581\ \underline{/108.4^\circ} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{0.1581}\ \underline{/108.4^\circ/2} \\ &= 0.3976\ \underline{/54.2^\circ} \end{aligned}$$

Ejercicio 9.5

Evalúe los números complejos siguientes:

a) $j^3\left[\dfrac{1 + j}{2 - j}\right]^2$

b) $6\ \underline{/30^\circ} + j5 - 3 + e^{j45^\circ}$

Respuestas: *a)* $0.24 + j0.32$ y *b)* $2.903 + j8.707$.

Ejemplo 9.6

Puesto que $\mathbf{A} = 10 \cos (10^8 t - 10x + 60°)\, \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B}_s = (20/j)\, \mathbf{a}_x + 10e^{j2\pi x/3}\, \mathbf{a}_y$, exprese $\mathbf{A}$ en forma de fasor y $\mathbf{B}_s$ en forma instantánea.

Solución:

$$\mathbf{A} = \text{Re}\,[10e^{j(\omega t - 10x + 60°)}\, \mathbf{a}_z]$$

donde $\omega = 10^8$. Por tanto,

$$\mathbf{A} = \text{Re}\,[10e^{j(60° - 10x)}\, \mathbf{a}_z\, e^{j\omega t}] = \text{Re}\,(\mathbf{A}_s e^{j\omega t})$$

o

$$\mathbf{A}_s = 10e^{j(60° - 10x)}\, \mathbf{a}_z$$

Si

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_s &= \frac{20}{j}\, \mathbf{a}_x + 10e^{j2\pi x/3}\mathbf{a}_y = -j20\mathbf{a}_x + 10e^{j2\pi x/3}\, \mathbf{a}_y \\
&= 20e^{-j\pi/2}\mathbf{a}_x + 10e^{j2\pi x/3}\mathbf{a}_y \\
\mathbf{B} &= \text{Re}\,(\mathbf{B}_s e^{j\omega t}) \\
&= \text{Re}\,[20e^{j(\omega t - \pi/2)}\mathbf{a}_x + 10e^{j(\omega t + 2\pi x/3)}\mathbf{a}_y] \\
&= 20 \cos(\omega t - \pi/2)\mathbf{a}_x + 10 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{3}\right)\mathbf{a}_y \\
&= 20 \,\text{sen}\, \omega t\, \mathbf{a}_x + 10 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{3}\right)\mathbf{a}_y
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.6

Si $\mathbf{P} = 2 \,\text{sen}\, (10t + x - \pi/4)\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{Q}_s = e^{jx}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z)\, \text{sen}\, \pi y$, determine la forma de fasor de $\mathbf{P}$ y la forma instantánea de $\mathbf{Q}_s$.

Respuesta: $2e^{j(x - 3\pi/4)}\mathbf{a}_y$, $\text{sen}\, \pi y \cos(\omega t + x)(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z)$.

Ejemplo 9.7

El campo eléctrico y el campo magnético en el vacío están dados por

$$\mathbf{E} = \frac{50}{\rho} \cos (10^6 t + \beta z)\, \mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H} = \frac{H_o}{\rho} \cos (10^6 t + \beta z)\, \mathbf{a}_\rho \text{ A/m}$$

Exprese estos enunciados en forma de fasor y determine las constantes H_o y β de manera que los campos satisfagan las ecuaciones de Maxwell.

Solución:

Las formas instantáneas de **E** y **H** se expresan como

$$\mathbf{E} = \text{Re}\,(\mathbf{E}_s e^{j\omega t}), \qquad \mathbf{H} = \text{Re}\,(\mathbf{H}_s e^{j\omega t}) \tag{9.7.1}$$

donde $\omega = 10^6$ y los fasores $\mathbf{E}_s$ y $\mathbf{H}_s$ están dados por

$$\mathbf{E}_s = \frac{50}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\phi, \qquad \mathbf{H}_s = \frac{H_o}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\rho \tag{9.7.2}$$

En el vacío, $\rho_v = 0$, $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_o$ y $\mu = \mu_o$, de modo que las ecuaciones de Maxwell se convierten en·

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_o \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \;\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \tag{9.7.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_o \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0 \tag{9.7.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon_o \mathbf{E}_s \tag{9.7.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \rightarrow \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_o \mathbf{H}_s \tag{9.7.6}$$

Al sustituir la ecuación (9.7.2) en las ecuaciones (9.7.3) y (9.7.4) se comprueba rápidamente que se satisfacen dos ecuaciones de Maxwell; es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}(E_{\phi s}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_{\rho s}) = 0$$

Ahora,

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \nabla \times \left(\frac{H_o}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\rho\right) = \frac{jH_o\beta}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\phi \tag{9.7.7}$$

De la sustitución de las ecuaciones (9.7.2) y (9.7.7) en la ecuación (9.7.5) se obtiene

$$\frac{jH_o\beta}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\phi = j\omega\varepsilon_o \frac{50}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\phi$$

o

$$H_o\beta = 50\,\omega\varepsilon_o \tag{9.7.8}$$

De forma similar, la sustitución de la ecuación (9.7.2) en la ecuación (9.7.6) resulta en

$$-j\beta\,\frac{50}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\rho = -j\omega\mu_o \frac{H_o}{\rho}\, e^{j\beta z}\mathbf{a}_\rho$$

o

$$\frac{H_o}{\beta} = \frac{50}{\omega\mu_o} \tag{9.7.9}$$

La multiplicación de la ecuación (9.7.8) por la ecuación (9.7.9) produce

$$H_o^2 = (50)^2 \frac{\varepsilon_o}{\mu_o}$$

o

$$H_o = \pm 50\sqrt{\varepsilon_o/\mu_o} = \pm \frac{50}{120\pi} = \pm 0.1326$$

De la división de la ecuación (9.7.8) entre la ecuación (9.7.9) se obtiene

$$\beta^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o$$

o

$$\beta = \pm\omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o} = \pm\frac{\omega}{c} = \pm\frac{10^6}{3 \times 10^8}$$
$$= \pm 3.33 \times 10^{-3}$$

En vista de la ecuación (9.7.8), $H_o = 0.1326, \beta = 3.33 \times 10^{-3}$ o $H_o = -0.1326, \beta = -3.33 \times 10^{-3}$; sólo estos valores satisfacen las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Ejercicio 9.7

En el aire, $\mathbf{E} = \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\cos(6 \times 10^7 t - \beta r)\mathbf{a}_\phi$ V/m.

Halle β y $\mathbf{H}$.

Respuesta: 0.2 rad/m, $-\frac{1}{12\pi r^2}\cos\theta\,\text{sen}\,(6 \times 10^7 t - 0.2r)\mathbf{a}_r - \frac{1}{120\pi r}\text{sen}\,\theta \times \cos(6 \times 10^7 t - 0.2r)\mathbf{a}_\theta$ A/m.

Ejemplo 9.8

En un medio caracterizado por $\sigma = 0, \mu = \mu_o, \varepsilon_o$ y

$$\mathbf{E} = 20\,\text{sen}\,(10^8 t - \beta z)\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

calcule β y $\mathbf{H}$.

Solución:

Este problema puede resolverse directamente en el dominio temporal o con el empleo de fasores. Como en el ejemplo anterior, β y $\mathbf{H}$ se determinan mediante el recurso de que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ satisfagan las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Método 1 (dominio temporal). Resolvamos este problema del modo más difícil: en el dominio temporal. Es evidente que se satisface la ley de Gauss para campos eléctricos; esto es,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

Conforme a la ley de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \int (\nabla \times \mathbf{E})\, dt$$

Pero

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\mathbf{a}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x}\mathbf{a}_z$$
$$= 20\beta \cos(10^8 t - \beta z)\mathbf{a}_x + 0$$

Por tanto,

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\mu} \int \cos(10^8 t - \beta z)\, dt\, \mathbf{a}_x$$
$$= -\frac{20\beta}{\mu 10^8} \operatorname{sen}(10^8 t - \beta z)\, \mathbf{a}_x \tag{9.8.1}$$

Se comprueba fácilmente que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

lo que demuestra que se satisface la ley de Gauss para campos magnéticos. Finalmente, con base en la ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \int (\nabla \times \mathbf{H})\, dt \tag{9.8.2}$$

porque $\sigma = 0$.
Pero

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_x}{\partial z}\mathbf{a}_y - \frac{\partial H_x}{\partial y}\mathbf{a}_z$$
$$= \frac{20\beta^2}{\mu 10^8} \cos(10^8 t - \beta z)\, \mathbf{a}_y + 0$$

donde se ha sustituido **H** de la ecuación (9.8.1). Así, la ecuación (9.8.2) se convierte en

$$\mathbf{E} = \frac{20\beta^2}{\mu\varepsilon 10^8} \int \cos(10^8 t - \beta z)\, dt\, \mathbf{a}_y$$
$$= \frac{20\beta^2}{\mu\varepsilon 10^{16}} \operatorname{sen}(10^8 t - \beta z)\, \mathbf{a}_y$$

La comparación de esta expresión con el **E** dado resulta en

$$\frac{20\beta^2}{\mu\varepsilon 10^{16}} = 20$$

o

$$\beta = \pm 10^8\sqrt{\mu\varepsilon} = \pm 10^8\sqrt{\mu_o \cdot 4\varepsilon_o} = \pm \frac{10^8(2)}{c} = \pm \frac{10^8(2)}{3 \times 10^8}$$
$$= \pm \frac{2}{3}$$

A partir de la ecuación (9.8.1),

$$\mathbf{H} = \pm \frac{20\,(2/3)}{4\pi \cdot 10^{-7}\,(10^8)} \operatorname{sen}\left(10^8 t \pm \frac{2z}{3}\right)\mathbf{a}_x$$

o

$$\mathbf{H} = \pm \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen}\left(10^8 t \pm \frac{2z}{3}\right)\mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

Método 2 (empleo de fasores).

$$\mathbf{E} = \operatorname{Im}\,(E_s e^{j\omega t}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_s = 20e^{-j\beta z}\,\mathbf{a}_y \tag{9.8.3}$$

donde $\omega = 10^8$.
De nueva cuenta,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{ys}}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_s = \frac{\nabla \times \mathbf{E}_s}{-j\omega\mu}$$

o

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{-j\omega\mu}\left[-\frac{\partial E_{ys}}{\partial z}\,\mathbf{a}_x\right] = -\frac{20\beta}{\omega\mu}\,e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x \tag{9.8.4}$$

Nótese que se satisface $\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$.

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_s \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_s = \frac{\nabla \times \mathbf{H}_s}{j\omega\varepsilon} \tag{9.8.5}$$

La sustitución de $\mathbf{H}_s$ de la ecuación (9.8.4) en la ecuación (9.8.5) da como resultado

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\,\frac{\partial H_{xs}}{\partial z}\,\mathbf{a}_y = \frac{20\beta^2 e^{-j\beta z}}{\omega^2\mu\varepsilon}\,\mathbf{a}_y$$

De la comparación de esta expresión con el $\mathbf{E}_s$ dado en la ecuación (9.8.3) se obtiene

$$20 = \frac{20\beta^2}{\omega^2\mu\varepsilon}$$

o

$$\beta = \pm\, \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \pm\frac{2}{3}$$

como se obtuvo anteriormente. Con base en la ecuación (9.8.4),

$$\mathbf{H}_s = \pm\frac{20(2/3)e^{\pm j\beta z}}{10^8(4\pi \times 10^{-7})}\,\mathbf{a}_x = \pm\frac{1}{3\pi}\,e^{\pm j\beta z}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H} = \text{Im}\,(\mathbf{H}_s e^{j\omega t})$$

$$= \pm\frac{1}{3\pi}\,\text{sen}\,(10^8 t \pm \beta z)\,\mathbf{a}_x\ \text{A/m}$$

como se obtuvo anteriormente. Como puede advertirse, trabajar con fasores es mucho más sencillo que hacerlo directamente en el dominio temporal. Nótese asimismo que empleamos

$$\mathbf{A} = \text{Im}\,(\mathbf{A}_s e^{j\omega t})$$

porque el **E** dado está en forma de seno, no de coseno. Habríamos podido usar

$$\mathbf{A} = \text{Re}\,(\mathbf{A}_s e^{j\omega t})$$

en cuyo caso el seno se expresa en términos de coseno y la ecuación (9.8.3) sería

$$\mathbf{E} = 20\cos\,(10^8 t - \beta z - 90°)\,\mathbf{a}_y = \text{Re}\,(\mathbf{E}_s e^{j\omega t})$$

o

$$\mathbf{E}_s = 20e^{-j\beta z - j90°}\,\mathbf{a}_y = -j20e^{-j\beta z}\mathbf{a}_y$$

tras de lo cual se sigue el mismo procedimiento.

Ejercicio 9.8

Cierto medio se caracteriza por $\sigma = 0$, $\mu = 2\mu_o$ y $\varepsilon = 5\varepsilon_o$. Si $\mathbf{H} = 2\cos\,(\omega t - 3y)\,\mathbf{a}_z$ A/m, calcule ω y **E**.

Respuesta: 2.846×10^8 rad/s, $-476.8\cos\,(2.846 \times 10^8\, t - 3y)\,\mathbf{a}_x$ V/m.

Resumen

1. En este capítulo se presentaron dos conceptos fundamentales: la fuerza electromotriz (fe), basada en experimentos de Faraday, y la corriente de desplazamiento, resultante de hipótesis de Maxwell. Estos conceptos imponen modificaciones a las ecuaciones del rotacional de Maxwell obtenidas para campos electromagnéticos estáticos, con objeto de incluir en ellas la dependencia de los campos respecto del tiempo.
2. La ley de Faraday establece que la fuerza electromotriz inducida está dada por ($N = 1$)

$$V_{\text{fe}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

En cuanto a la fuerza electromotriz estática, $V_{\text{fe}} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

y en cuanto a la fuerza electromotriz cinética, $V_{\text{fe}} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$.

3. La corriente de desplazamiento

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (densidad de corriente de desplazamiento), es una modificación de la ley de los circuitos de Ampère, con la que Maxwell predijo las ondas electromagnéticas varios años antes de que fueran confirmadas experimentalmente por Hertz.

4. En su forma diferencial, las ecuaciones de Maxwell para campos dinámicos son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Estas ecuaciones diferenciales tienen sus correspondientes formas integrales (véanse las tablas 9.1 y 9.2), las cuales se deducen de aquéllas aplicando el teorema de Stokes o de la divergencia. Todo campo electromagnético debe satisfacer las cuatro ecuaciones de Maxwell.

5. El potencial eléctrico escalar variable en el tiempo $V(x, y, z, t)$ y el potencial magnético vectorial variable en el tiempo $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ satisfacen comprobadamente las ecuaciones de ondas si se cumple la condición de Lorentz.

6. Los campos armónicos en el tiempo son los que varían sinusoidalmente en el tiempo. Se les expresa fácilmente en fasores, con los que es muy sencillo trabajar. Empleando la referencia del coseno, la cantidad vectorial instantánea $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ se relaciona con su forma de fasor $\mathbf{A}_s(x, y, z)$ de acuerdo con

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \text{Re}\,[\mathbf{A}_s(x, y, z)\, e^{j\omega t}]$$

Preguntas de repaso

9.1. El flujo a través de cada vuelta de una bobina de 100 vueltas es de $(t^3 - 2t)$ mWb, donde t se mide en segundos. La fuerza electromotriz inducida en $t = 2$ s es

a) 1 V
b) −1 V
c) 4 mV
d) 0.4 V
e) −0.4 V

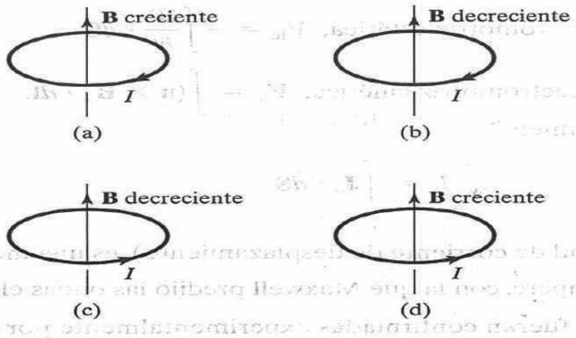


Figura 9.13. Para la pregunta de repaso 9.2.

9.2. Suponiendo que las espiras son estacionarias y que el campo magnético **B** variable en el tiempo induce corriente I, ¿cuáles de las configuraciones que aparecen en la figura 9.13 son incorrectas?

9.3. Dos bobinas conductoras 1 y 2 (idénticas salvo por el hecho de que la bobina 2 está fracturada) se sitúan en un campo magnético uniforme que decrece a un índice constante, como se muestra en la figura 9.14. Si el plano en el que se encuentran las bobinas es perpendicular a las líneas del campo, ¿cuál de los siguientes enunciados es cierto?

a) En ambas bobinas se induce fuerza electromotriz.
b) Se induce fuerza electromotriz en la bobina 2, la bobina fracturada.
c) En ambas bobinas ocurre igual calentamiento en joules.
d) En ninguna de las bobinas ocurre calentamiento en joules.

9.4. Una espira rota alrededor del eje y en un campo magnético $\mathbf{B} = B_o \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{a}_x$ Wb/m². El voltaje inducido en ella se debe a

a) Fuerza electromotriz cinética.
b) Fuerza electromotriz estática.
c) La combinación de fuerzas electromotriz cinética y estática.
d) Ninguna de las causas anteriores.

9.5. Una espira rectangular se localiza en el campo magnético variable en el tiempo $\mathbf{B} = 0.2 \cos 150\pi t/\mathbf{a}_z$ Wb/m², como se ilustra en la figura 9.15. V_1 no es igual a V_2.

a) Cierto *b)* Falso

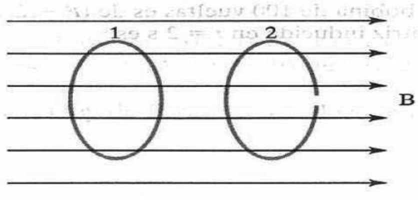


Figura 9.14. Para la pregunta de repaso 9.3.

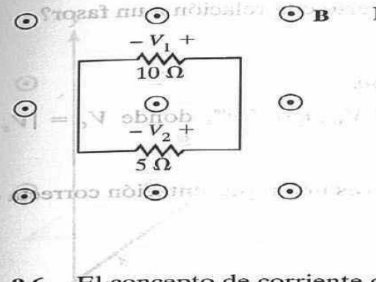


Figura 9.15. Para la pregunta de repaso 9.5 y el problema 9.10.

9.6. El concepto de corriente de desplazamiento fue una importante contribución de

a) Faraday.
b) Lenz.
c) Maxwell.
d) Lorentz.
e) El profesor de este curso.

9.7. Identifique entre las expresiones siguientes las que no son ecuaciones de Maxwell para campos variables en el tiempo:

a) $\nabla \cdot \mathbf{J} + \dfrac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$

b) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$

c) $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

d) $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$

e) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

9.8. Se dice que un campo electromagnético no existe o no es maxwelliano si no satisface las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de ondas deducidas de ellas. ¿Cuáles de los siguientes campos en el vacío no son maxwellianos?

a) $\mathbf{H} = \cos x \cos 10^6 t\, \mathbf{a}_x$

b) $\mathbf{E} = 100 \cos \omega t\, \mathbf{a}_x$

c) $\mathbf{D} = e^{-10y} \operatorname{sen} (10^5 - 10y)\, \mathbf{a}_z$

d) $\mathbf{B} = 0.4 \operatorname{sen} 10^4 t\, \mathbf{a}_z$

e) $\mathbf{H} = 10 \cos \left(10^5 t - \dfrac{z}{10} \right) \mathbf{a}_x$

f) $\mathbf{E} = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{r} \cos (\omega t - r\omega \sqrt{\mu_o \varepsilon_o})\, \mathbf{a}_\theta$

g) $\mathbf{B} = (1 - \rho^2) \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{a}_z$

9.9. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es cierto con relación a un fasor?

a) Puede ser un escalar o un vector.
b) Es una cantidad dependiente del tiempo.
c) Un fasor V_s puede representarse como $V_o \angle\theta$ o $V_o e^{j\theta}$, donde $V_o = |V_s|$.
d) Es una cantidad compleja.

9.10. Si $\mathbf{E}_s = 10\, e^{j4x}\, \mathbf{a}_y$, ¿cuál de las siguientes no es una representación correcta de **E**?

a) Re $(\mathbf{E}_s e^{j\omega t})$
b) Re $(\mathbf{E}_s e^{-j\omega t})$
c) Im $(\mathbf{E}_s e^{j\omega t})$
d) $10 \cos (\omega t + j4x)\, \mathbf{a}_y$
e) 10 sen $(\omega t + 4x)\, \mathbf{a}_y$

Respuestas: 9.1*b*, 9.2*b*, *d*, 9.3*a*, 9.4*c*, 9.5*a*, 9.6*c*, 9.7*a*, *b*, *d*, *g*, 9.8*b*, 9.9*a*, *c*, 9.10*d*.

Problemas

9.1. Una espira conductora circular de 20 cm de radio se sitúa en el plano $z = 0$ en un campo magnético $\mathbf{B} = 10 \cos 377t\, \mathbf{a}_z$ mWb/m². Calcule el voltaje inducido en ella.

9.2. Una varilla de longitud ℓ gira en torno al eje z con una velocidad angular ω. Si $\mathbf{B} = B_o \mathbf{a}_z$, calcule el voltaje inducido en el conductor.

9.3. Una espira rectangular de 30 por 40 cm gira a 130 rad/s en un campo magnético de 0.06 Wb/m² normal al eje de rotación. Si tiene 50 vueltas, determine el voltaje inducido en ella.

9.4. En la figura 9.16 aparece una espira conductora de 20 cm² de área y resistencia de 4 Ω. Si $\mathbf{B} = 40 \cos 10^4 t\mathbf{a}_z$ mWb/m², halle la corriente inducida en ella e indique su dirección.

9.5. Determine la fuerza electromotriz inducida en la espira en forma de V que se presenta en la figura 9.17. *a)* Adopte $\mathbf{B} = 0.1\mathbf{a}_z$ Wb/m² y $\mathbf{u} = 2\mathbf{a}_x$ m/s y suponga que la varilla corrediza se pone en movimiento en el origen cuando $t = 0$. *b)* Repita el inciso *a)* si $\mathbf{B} = 0.5x\mathbf{a}_z$ Wb/m².

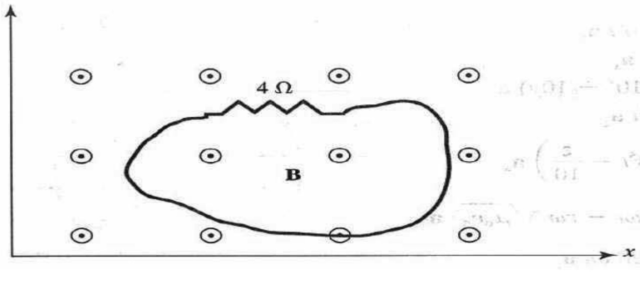


Figura 9.16. Para el problema 9.4.

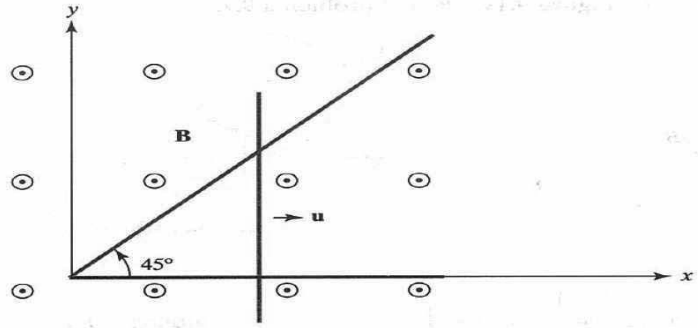


Figura 9.17. Para el problema 9.5.

***9.6.** Una espira cuadrada de lado a retrocede a una velocidad uniforme $u_o\mathbf{a}_y$ desde un filamento de longitud infinita portador de corriente I a lo largo de $\mathbf{a}_z$, como se muestra en la figura 9.18. Suponiendo que $\rho = \rho_o$ en el momento $t = 0$, demuestre que la fuerza electromotriz inducida en la espira en $t > 0$ es

$$V_{fe} = \frac{u_o a^2 \mu_o I}{2\pi\rho(\rho + a)}$$

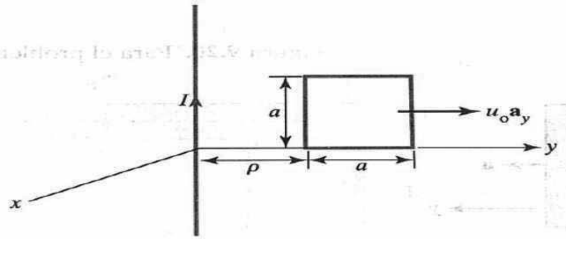
***9.7.** Una varilla conductora se mueve a una velocidad constante de $3\mathbf{a}_z$ m/s en paralelo a un cable recto y largo que porta una corriente de 15 A, como se ilustra en la figura 9.19. Calcule la fuerza electromotriz inducida en la varilla e indique en cuál de sus extremos ocurre mayor potencial.

***9.8.** Una barra conductora está conectada con conductores flexibles a un par de rieles en un campo magnético $\mathbf{B} = 6 \cos 10t\ \mathbf{a}_x$ mWb/m², como se muestra en la figura 9.20. Si el eje z es la posición de equilibrio de la barra y la velocidad de ésta es de $2 \cos 10t\ \mathbf{a}_y$ m/s, halle el voltaje inducido en ella.

9.9. Un automóvil viaja a 120 km/h. Si el campo magnético terrestre es de 4.3×10^{-5} Wb/m², halle el voltaje inducido en la defensa del auto, de 1.6 m de longitud. Suponga que el ángulo entre el campo magnético terrestre y la normal al auto es de 65°.

***9.10.** Si el área de la espira que se presentó en la figura 9.15 es de 10 cm², calcule V_1 y V_2.

Figura 9.18. Para el problema 9.6.



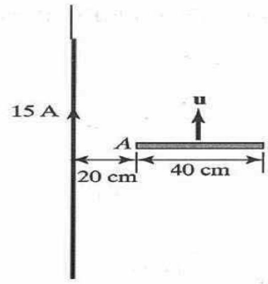


Figura 9.19. Para el problema 9.7.

9.11. Tal como se observa en la figura 9.21, una barra imantada es lanzada hacia el centro de una bobina de 10 vueltas y resistencia de 15 Ω. Si el flujo magnético a través de la bobina cambia de 0.45 Wb a 0.64 Wb en 0.02 s, ¿cuáles son la magnitud y dirección (consideradas desde el lado cercano a la barra) de la corriente inducida?

9.12. En la figura 9.22 aparece la sección transversal de un disco generador homopolar de radio interno $\rho_1 = 2$ cm y radio externo $\rho_2 = 10$ cm que gira en un campo magnético uniforme de 15 mWb/m^2 a una velocidad de 60 rad/s. Calcule el voltaje inducido.

9.13. Las placas paralelas, de 2.8 cm^2 de área y distancia de separación de 0.2 mm, de un capacitor con aire como dieléctrico están conectadas a un generador con voltaje de 50 V a 20 MHz. Halle el valor máximo de la densidad de corriente de desplazamiento y de la corriente de desplazamiento.

9.14. La razón J/J_d (densidad de corriente de conducción a densidad de corriente de desplazamiento) es muy importante a altas frecuencias. Calcule el valor de esa razón a 1 GHz en el caso de:

a) agua destilada ($\mu = \mu_o, \varepsilon = 81\varepsilon_o, \sigma = 2 \times 10^{-3}$ S/m)
b) agua de mar ($\mu = \mu_o, \varepsilon = 81\varepsilon_o, \sigma = 25$ S/m)
c) piedra caliza ($\mu = \mu_o, \varepsilon = 5\varepsilon_o, \sigma = 2 \times 10^{-4}$ S/m)

9.15. Suponiendo que el agua de mar tiene $\mu = \mu_o, \varepsilon = 81\varepsilon_o, \sigma = 20$ S/m, determine la frecuencia en la que la magnitud de la densidad de corriente de conducción es 10 veces superior a la de la densidad de corriente de desplazamiento.

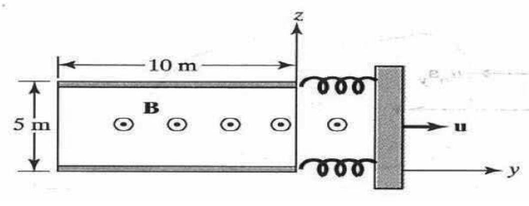


Figura 9.20. Para el problema 9.8.

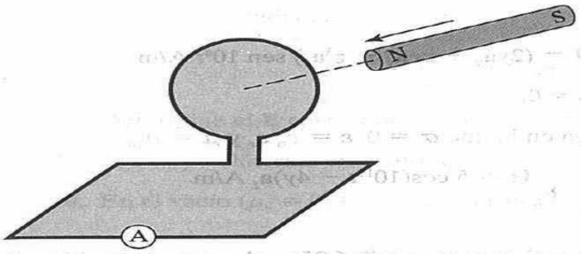


Figura 9.21. Para el problema 9.11.

9.16. Un conductor cuya sección transversal posee un área de 10 cm^2 porta una corriente de conducción de 0.2 sen $10^9\,t$ mA. Puesto que $\sigma = 2.5 \times 10^6$ S/m y $\varepsilon_r = 6$, calcule la magnitud de la densidad de corriente de desplazamiento.

9.17. *a)* Escriba las ecuaciones de Maxwell para un medio lineal y homogéneo en términos de $\mathbf{E}_s$ y $\mathbf{H}_s$ suponiendo sólo el factor de tiempo $e^{-j\omega t}$.

b) Escriba en coordenadas cartesianas y ocho ecuaciones escalares la forma puntual de las ecuaciones de Maxwell referidas en la tabla 9.2.

9.18. Demuestre que, en una región sin origen ($\mathbf{J} = 0, \rho_v = 0$), las ecuaciones de Maxwell pueden reducirse a dos. Identifique esas dos ecuaciones globales.

9.19. Demuestre que la densidad de carga ρ_v de un conductor lineal, homogéneo e isotrópico satisface

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

9.20. Suponga una región sin origen y deduzca la ecuación de difusión

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

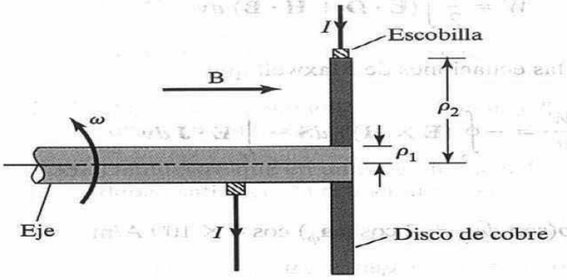


Figura 9.22. Para el problema 9.12.

9.21. En cierta región,

$$\mathbf{J} = (2y\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + z^3\mathbf{a}_z) \text{ sen } 10^4 t \text{ A/m}$$

Halle ρ_v si $\rho_v(x, y, 0, t) = 0$.

9.22. En una región sin carga en la que $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ y $\mu = \mu_o$,

$$\mathbf{H} = 5 \cos(10^{11}t - 4y)\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Halle: *a)* $\mathbf{J}_d$ y $\mathbf{D}$, *b)* ε_r.

9.23. En cierta región con $\sigma = 0$, $\mu = \mu_o$ y $\varepsilon = 6.25\varepsilon_o$, el campo magnético de una onda electromagnética es

$$\mathbf{H} = 0.6 \cos \beta x \cos 10^8 t \, \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Determine β y el $\mathbf{E}$ correspondiente mediante las ecuaciones de Maxwell.

***9.24.** En un medio no magnético,

$$\mathbf{E} = 50 \cos(10^9 t - 8x)\mathbf{a}_y + 40 \text{ sen}(10^9 t - 8x)\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Halle la constante dieléctrica ε_r y el $\mathbf{H}$ correspondiente.

9.25. Compruebe si los campos siguientes son campos electromagnéticos genuinos; es decir, si satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Suponga que existen en regiones sin carga.

a) $\mathbf{A} = 40 \text{ sen}(\omega t + 10x)\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{B} = \dfrac{10}{\rho} \cos(\omega t - 2\rho)\mathbf{a}_\phi$

c) $\mathbf{C} = \left(3\rho^2 \cot \phi \mathbf{a}_\rho + \dfrac{\cos \phi}{\rho} \mathbf{a}_\phi\right) \text{ sen } \omega t$

d) $\mathbf{D} = \dfrac{1}{r} \text{ sen } \theta \text{ sen}(\omega t - 5r)\mathbf{a}_\theta$

****9.26.** Dada la energía electromagnética total

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \, dv$$

demuestre con base en las ecuaciones de Maxwell que

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dv$$

9.27. En el vacío,

$$\mathbf{H} = \rho(\text{sen } \phi \mathbf{a}_\rho + 2 \cos \phi \mathbf{a}_\phi) \cos 4 \times 10^6 t \text{ A/m}$$

Halle $\mathbf{J}_d$ y $\mathbf{E}$.

9.28. Una antena radia en el vacío y

$$\mathbf{H} = \frac{12 \text{ sen } \theta}{r} \cos(2\pi \times 10^8 t - \beta r)\mathbf{a}_\theta \text{ mA/m}$$

Determine el $\mathbf{E}$ correspondiente en términos de β.

***9.29.** El campo eléctrico en el aire está dado por $\mathbf{E} = \rho t e^{-\rho - t}\mathbf{a}_\phi$ V/m; halle $\mathbf{B}$ y $\mathbf{J}$.

****9.30.** En el vacío ($\rho_v = 0, \mathbf{J} = 0$), demuestre que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi r}(\cos\theta\, \mathbf{a}_r - \text{sen}\,\theta\, \mathbf{a}_\theta)e^{j\omega(t - r/c)}$$

satisface la ecuación de ondas dada en la ecuación (9.52). Halle el V correspondiente. Considere c como la velocidad de la luz en el vacío.

9.31. Evalúe los siguientes números complejos y exprese sus respuestas en forma polar:

a) $(4\,\angle 30° - 10\,\angle 50°)^{1/2}$

b) $\dfrac{1 + j2}{6 + 8 - 7\angle 15°}$

c) $\dfrac{(3 + j4)^2}{12 - j7 + (-6 + j10)^*}$

d) $\dfrac{(3.6\,\angle -200°)^{1/2}}{(2.4\,\angle 45°)^2(-5 + j8)^*}$

9.32. Escriba como fasores los siguientes campos armónicos en el tiempo:

a) $\mathbf{E} = 4\cos(\omega t - 3x - 10°)\mathbf{a}_y - \text{sen}\,(\omega t + 3x + 20°)\mathbf{a}_z$

b) $\mathbf{H} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{r}\cos(\omega t - 5r)\mathbf{a}_\theta$

c) $\mathbf{J} = 6e^{-3x}\,\text{sen}(\omega t - 2x)\mathbf{a}_y + 10e^{-x}\cos(\omega t - 5x)\mathbf{a}_z$

9.33. Exprese los fasores siguientes en su forma instantánea:

a) $\mathbf{A}_s = (4 - 3j)e^{-j\beta x}\mathbf{a}_y$

b) $\mathbf{B}_s = \dfrac{20}{\rho}e^{-j2z}\mathbf{a}_\rho$

c) $\mathbf{C}_s = \dfrac{10}{r^2}(1 + j2)e^{-j\phi}\,\text{sen}\,\theta\mathbf{a}_\phi$

9.34. Dados $\mathbf{A} = 4\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{a}_x + 3\cos\omega t\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{B}_s = j10ze^{-jz}\mathbf{a}_x$, exprese $\mathbf{A}$ en forma de fasor y $\mathbf{B}_s$ en forma instantánea.

9.35. Demuestre que en una región lineal, homogénea, isotrópica y sin fuente, tanto $\mathbf{E}_s$ como $\mathbf{H}_s$ deben satisfacer la ecuación de ondas

$$\nabla^2\mathbf{A}_s + \gamma^2\mathbf{A}_s = 0$$

donde $\gamma^2 = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma$ y $\mathbf{A}_s = \mathbf{E}_s$ o $\mathbf{H}_s$.

10 Propagación de ondas electromagnéticas

Llegarás muy lejos en la vida si eres amable con los jóvenes, compasivo con los ancianos, solidario con los esforzados y tolerante con los débiles y los fuertes. Porque algún día te contarás entre todos ellos.

GEORGE W. CARVER

10.1. Introducción

Aplicaremos inicialmente las ecuaciones de Maxwell a la propagación de ondas electromagnéticas. Predicha por tales ecuaciones la existencia de esas ondas fue comprobada por Heinrich Hertz. Luego de varios cálculos y experimentos, Hertz logró generar y detectar ondas de radio, llamadas en su honor *ondas hertzianas*.

En general, las **ondas** son medios de transporte de energía o información.

Ejemplos comunes de ondas electromagnéticas son las ondas de radio, las señales de televisión, los haces de radar y los rayos luminosos. Todas las formas de energía electromagnética comparten tres características fundamentales: se desplazan a gran velocidad, adoptan al hacerlo propiedades de ondas e irradian hacia fuera desde una fuente sin la ayuda de ningún vehículo físico discernible. El problema de la radiación se abordará en el capítulo 13.

El principal objetivo de este capítulo es resolver las ecuaciones de Maxwell y deducir el movimiento de las ondas electromagnéticas en los siguientes medios:

1. El vacío ($\sigma = 0, \varepsilon = \varepsilon_o, \mu = \mu_o$)
2. Dieléctricos sin pérdidas ($\sigma = 0, \varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o, \mu = \mu_r\mu_o$ o $\sigma \ll \omega\varepsilon$)
3. Dieléctricos disipativos ($\sigma \neq 0, \varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o, \mu = \mu_r\mu_o$)
4. Buenos conductores ($\sigma \simeq \infty, \varepsilon = \varepsilon_o, \mu = \mu_r\mu_o$ o $\sigma \gg \omega\varepsilon$)

donde ω es la frecuencia angular de la onda. Por ser el caso más general, nos ocuparemos en primer término de los dieléctricos disipativos, de los que sencillamente deduciremos los casos especiales 1, 2 y 4 modificando los valores de σ, ε y μ. Sin embargo, antes de examinar el movimiento de ondas en esos diferentes medios, analizaremos las características generales de las ondas, esenciales para comprender las ondas electromagnéticas. El lector versado en el concepto de ondas puede omitir el estudio de la sección 10.2. En las

secciones finales de este capítulo se expondrán consideraciones de potencia, reflexión y transmisión entre dos medios distintos.

†10.2. Estudio general de las ondas

El detallado conocimiento de la propagación de ondas electromagnéticas implica el de las ondas en general.

Una **onda** es una función tanto del espacio como del tiempo.

Ocurre movimiento de ondas cuando una perturbación en el punto A en el instante t_o se relaciona con lo que sucede en el punto B en el instante $t > t_o$. Una ecuación de onda, como las ejemplificadas por las ecuaciones (9.51) y (9.52), es una ecuación diferencial parcial de segundo orden. En una dimensión, una ecuación escalar de onda adopta la forma de

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0 \tag{10.1}$$

donde u es la *velocidad de onda*. La ecuación (10.1) es un caso especial de la ecuación (9.51), en la que el medio carece de fuente ($\rho_v = 0$, $\mathbf{J} = 0$). Se le resuelve siguiendo un procedimiento similar al que se describió en el ejemplo 6.5. Sus soluciones son de la forma

$$E^- = f(z - ut) \tag{10.2a}$$

$$E^+ = g(z + ut) \tag{10.2b}$$

o

$$E = f(z - ut) + g(z + ut) \tag{10.2c}$$

donde f y g denotan cualquier función de $z - ut$ y $z + ut$, respectivamente. Son ejemplos de tales funciones $z \pm ut$, sen $k(z \pm ut)$, cos $k(z \pm ut)$ y $e^{jk(z \pm ut)}$, donde k es una constante. Podría demostrarse fácilmente que todas estas funciones satisfacen la ecuación (10.1).

Si se adopta en particular la dependencia de tiempo armónico (o sinusoidal) $e^{j\omega t}$, la ecuación (10.1) se convierte en

$$\frac{d^2 E_s}{dz^2} + \beta^2 E_s = 0 \tag{10.3}$$

donde $\beta = \omega/u$ y E_s es la forma de fasor de E. La resolución de la ecuación (10.3) es semejante al caso C del ejemplo 6.5 [véase la ecuación (6.5.12)]. Habiendo insertado el factor de tiempo, las posibles soluciones de la ecuación (10.3) son

$$E^+ = Ae^{j(\omega t - \beta z)} \tag{10.4a}$$

$$E^- = Be^{j(\omega t + \beta z)} \tag{10.4b}$$

y

$$E = Ae^{j(\omega t - \beta z)} + Be^{j(\omega t + \beta z)} \tag{10.4c}$$

donde A y B son constantes reales.

Consideremos por el momento la solución formulada en la ecuación (10.4*a*). Si se toma la parte imaginaria de esta ecuación se obtiene

$$E = A \text{ sen } (\omega t - \beta z) \tag{10.5}$$

Se ha optado por esta onda sinusoidal en razón de su simplicidad; de la elección de la parte real de la ecuación (10.4*a*) habría resultado una onda cosinusoidal. Repárese en las siguientes características de la onda expresada en la ecuación (10.5):

1. Es armónica en el tiempo, ya que para arribar a tal ecuación se adoptó la dependencia del tiempo $e^{j\omega t}$.
2. A es la *amplitud* de la onda, de unidades iguales a las de E.
3. $(\omega t - \beta z)$ es la *fase* (en radianes) de la onda; depende del tiempo t y de la variable espacial z.
4. ω es la *frecuencia angular* (en radianes/segundo) y β la *constante de fase* o *número de onda* (en radianes/metro).

Dada su variación tanto con el tiempo t como con la variable espacial z, E puede representarse gráficamente como una función de t manteniendo constante z y viceversa. En las figuras 10.1*(a)* y 10.1*(b)* aparecen los diagramas de $E(z, t = \text{constante})$ y $E(t, z = \text{constante})$, respectivamente. En la primera de ellas se observa que la onda tarda en repetirse una distancia λ, la que por este motivo recibe el nombre de *longitud de onda* (en metros). En la segunda, la onda tarda en repetirse el tiempo T, el *periodo* (en segundos). Puesto que para que la onda recorra la distancia λ a la velocidad u transcurre el tiempo T, es de suponer que

$$\lambda = uT \tag{10.6a}$$

Pero $T = 1/f$, donde f es la *frecuencia* (el número de ciclos por segundo) de la onda en hertz (Hz). Así,

$$\boxed{u = f\lambda} \tag{10.6b}$$

Por efecto de esta relación fija entre longitud de onda y frecuencia, la posición de una estación de radio en su banda puede identificarse con una u otra, aunque suele preferirse la frecuencia. Asimismo, a causa de que

$$\omega = 2\pi f \tag{10.7a}$$

$$\beta = \frac{\omega}{u} \tag{10.7b}$$

y

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{10.7c}$$

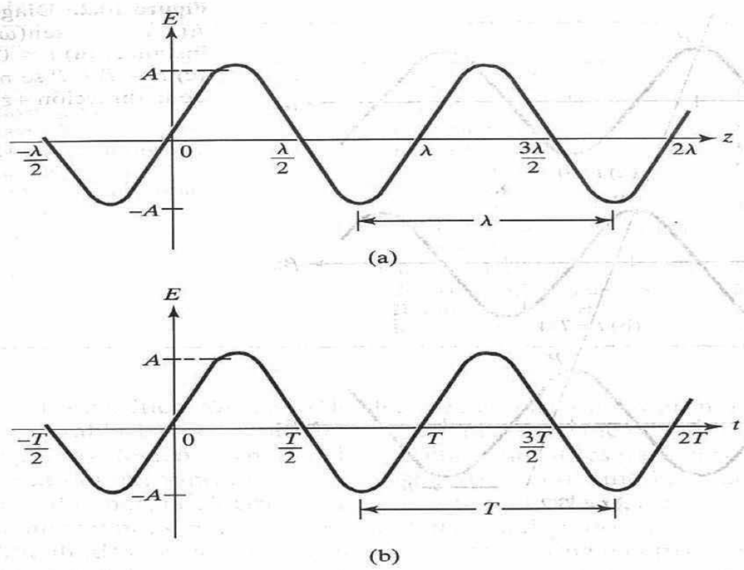


Figura 10.1. Diagrama de $E(z, t) = A\ \text{sen}(\omega t - \beta z)$: **(a)** con t constante, **(b)** con z constante.

de las ecuaciones (10.6) y (10.7) es de esperar que

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{10.8}$$

La ecuación (10.8) indica que cualquiera que sea la distancia comprendida por su longitud, una onda sufre un cambio de fase de 2π radianes.

Demostremos ahora que la onda representada por la ecuación (10.5) se desplaza a una velocidad u en la dirección $+z$. Para hacerlo se considera un punto fijo P en la onda y se traza la ecuación (10.5) en los instantes $t = 0$, $T/4$ y $T/2$, como en la figura 10.2. En ésta es evidente que el punto P se mueve a lo largo de la dirección $+z$ a medida que la onda avanza en el tiempo. El punto P es un punto de fase constante, de manera que

$$\omega t - \beta z = \text{constante}$$

o

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = u \tag{10.9}$$

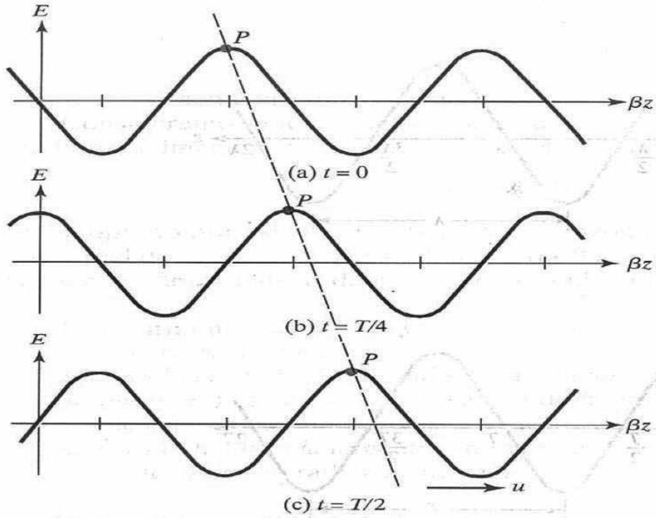


Figura 10.2. Diagrama de $E(z, t) = A \text{ sen}(\omega t - \beta z)$ en los instantes **(a)** $t = 0$, **(b)** $t = T/4$, **(c)** $t = T/2$; P se mueve a lo largo de la dirección $+z$ a una velocidad u.

ecuación equivalente a la ecuación (10.7b). La ecuación (10.9) indica que la onda se desplaza a una velocidad u en la dirección $+z$. De la misma forma podría demostrarse que la onda B sen $(\omega t + \beta z)$ representada por la ecuación (10.4b) se desplaza a una velocidad u en la dirección $-z$.

En suma, cabe señalar lo siguiente:

1. Una onda es una función tanto del tiempo como del espacio.
2. No tiene principio ni fin; el instante $t = 0$ se elige arbitrariamente como punto de referencia.
3. Cuando el signo de $(\omega t \pm \beta z)$ es negativo, la propagación de la onda ocurre en la dirección $+z$ (onda de avance o de marcha positiva); cuando es positivo, la propagación ocurre en la dirección $-z$ (onda de retroceso o de marcha negativa).
4. Puesto que sen $(-\psi) = -$sen $\psi =$ sen $(\psi \pm \pi)$, mientras que $\cos(-\psi) = \cos \psi$,

$$\text{sen } (\psi \pm \pi/2) = \pm \cos \psi \tag{10.10a}$$

$$\text{sen } (\psi \pm \pi) = - \text{sen } \psi \tag{10.10b}$$

$$\cos (\psi \pm \pi/2) = \pm \text{ sen } \psi \tag{10.10c}$$

$$\cos (\psi \pm \pi) = - \cos \psi \tag{10.10d}$$

donde $\psi = \omega t \pm \beta z$. Mediante la ecuación (10.10), toda onda armónica en el tiempo puede representarse en forma de seno o coseno.

Tabla 10.1. Espectro electromagnético.

Fenómenos electromagnéticos	*Ejemplos de usos*	*Intervalo de frecuencia aproximado*
Rayos cósmicos	Física, astronomía	10^{14} GHz y superior
Rayos gamma	Terapia contra el cáncer	$10^{10}-10^{13}$ GHz
Rayos X	Examinación con rayos X	$10^{8}-10^{9}$ GHz
Radiación ultravioleta	Esterilización	$10^{6}-10^{8}$ GHz
Luz visible	Visión humana	$10^{5}-10^{6}$ GHz
Radiación infrarroja	Fotografía	$10^{3}-10^{4}$ GHz
Microondas	Radares, relevadores de microondas, comunicación satelital	3−300 GHz
Radioondas	Televisión UHF	470−806 MHz
	Televisión VHF, radio FM	54−216 MHz
	Radio de onda corta	3−26 MHz
	Radio AM	535−1605 kHz

La clasificación de múltiples frecuencias en orden numérico constituye un *espectro*. En la tabla 10.1 se detallan las frecuencias en que ocurren diversos tipos de energía en el espectro electromagnético. Las frecuencias útiles para la comunicación por radio ocurren cerca del extremo inferior del espectro. Conforme la frecuencia aumenta, la manifestación de energía electromagnética comporta riesgos para los seres humanos.[1] Los hornos de microondas, por ejemplo, pueden ser peligrosos si no se les blinda adecuadamente. Las dificultades prácticas para el empleo de energía electromagnética con fines de comunicación también aumentan al incrementar la frecuencia, al grado de volver imposible el uso de tal energía. No obstante, el límite de la frecuencia utilizable se ha elevado gracias a mejores métodos de comunicación. Hoy los satélites de comunicación operan con frecuencias próximas a los 14 GHz. Esta frecuencia está aún muy por debajo de la de la luz, la que sin embargo ya se emplea para la radiocomunicación en el restringido ámbito de la fibra óptica.[2]

Ejemplo 10.1

El campo eléctrico en el vacío está dado por

$$\mathbf{E} = 50 \cos (10^8 t + \beta x)\ \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

a) Halle la dirección de la propagación de la onda.
b) Calcule β y el tiempo que tarda en recorrer una distancia de $\lambda/2$.
c) Trace la onda en $t = 0$, $T/4$ y $T/2$.

Solución:

a) Del signo positivo en $(\omega t + \beta x)$ se infiere que la onda se propaga a lo largo de $-\mathbf{a}_x$. Esto se confirmará en el inciso *c)* de este ejemplo.

[1] Véase la edición especial de marzo de 1987 de la *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine* sobre "Efectos de la radiación electromagnética".
[2] Véase la edición de octubre de 1980 de *IEEE Proceedings* sobre "Comunicaciones mediante fibra óptica".

b) En el vacío, $u = c$.

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3}$$

o

$$\beta = 0.3333 \text{ rad/m}$$

Si T es el periodo de la onda, ésta tarda T segundos en recorrer una distancia λ a una velocidad c. De ahí que en recorrer una distancia de $\lambda/2$ tarde

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10^8} = 31.42 \text{ ns}$$

Opcionalmente, y a causa de que la onda viaja a la velocidad de la luz c,

$$\frac{\lambda}{2} = ct_1 \quad \text{o} \quad t_1 = \frac{\lambda}{2c}$$

Pero

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 6\pi$$

Por tanto,

$$t_1 = \frac{6\pi}{2(3 \times 10^8)} = 31.42 \text{ ns}$$

como se obtuvo anteriormente.

c) En $\quad t = 0, \quad E_y = 50 \cos \beta x$

En $\quad t = T/4, \quad E_y = 50 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \beta x\right) = 50 \cos(\beta x + \pi/2)$

$$= -50 \text{ sen } \beta x$$

En $\quad t = T/2, \quad E_y = 50 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega} + \beta x\right) = 50 \cos(\beta x + \pi)$

$$= -50 \cos \beta x$$

E_y en $t = 0$, $T/4$, $T/2$ se traza contra x, como se observa en la figura 10.3. Nótese que el punto P en la onda (seleccionado arbitrariamente) se mueve a lo largo de $-\mathbf{a}_x$ al incrementarse t, lo que demuestra que la onda se desplaza a lo largo de $-\mathbf{a}_x$.

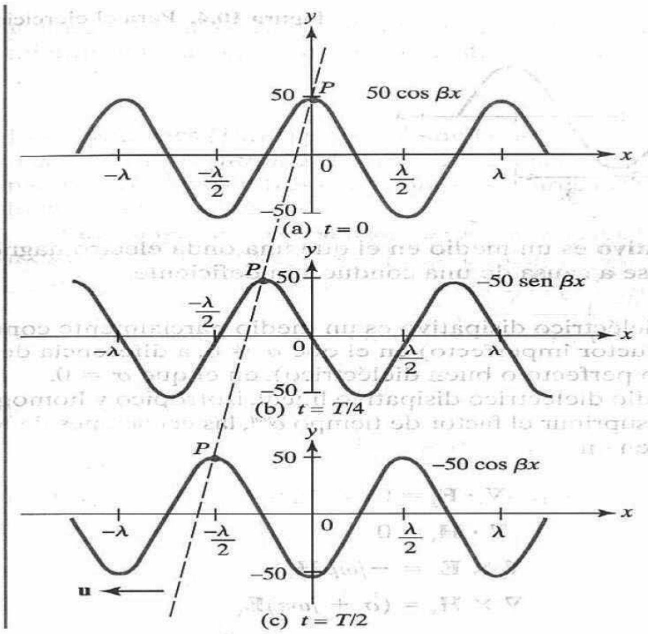


Figura 10.3. Para el ejemplo 10.1; la onda se desplaza a lo largo de $-\mathbf{a}_x$.

Ejercicio 10.1

En el vacío, $\mathbf{H} = 0.1 \cos(2 \times 10^8 t - kx)\mathbf{a}_y$ A/m.

a) Calcule k, λ y T.
b) Determine el tiempo t_1 que la onda tarda en recorrer $\lambda/8$.
c) Trace la onda en el instante t_1.

Respuestas: *a)* 0.667 rad/m, 9.425 m, 31.42 ns, *b)* 3.927 ns y *c)* véase la figura 10.4.

10.3. Propagación de ondas en dieléctricos disipativos

Como se mencionó en la sección 10.1, la propagación de ondas en dieléctricos disipativos es un caso general del que pueden deducirse los casos especiales de la propagación de ondas en otros tipos de medios. Por tanto, está sección servirá de fundamento a las tres secciones posteriores.

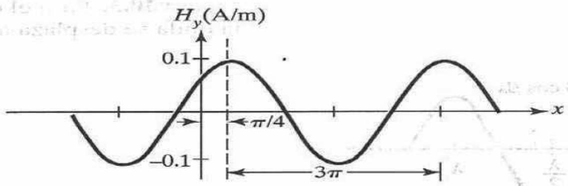


Figura 10.4. Para el ejercicio 10.1, inciso *c*).

> Un **dieléctrico disipativo** es un medio en el que una onda electromagnética pierde potencia al propagarse a causa de una conducción deficiente.

En otras palabras, un dieléctrico disipativo es un medio parcialmente conductor (dieléctrico imperfecto o conductor imperfecto) en el que $\sigma \neq 0$, a diferencia de un dieléctrico sin pérdidas (dieléctrico perfecto o buen dieléctrico), en el que $\sigma = 0$.

Considérese un medio dieléctrico disipativo lineal, isotrópico y homogéneo sin carga ($\rho_v = 0$). Tras adoptar y suprimir el factor de tiempo $e^{j\omega t}$, las ecuaciones de Maxwell (véase la tabla 9.2) se convierten en

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \tag{10.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0 \tag{10.12}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \tag{10.13}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}_s \tag{10.14}$$

Al tomar el rotacional de ambos miembros de la ecuación (10.13) se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\, \nabla \times \mathbf{H}_s \tag{10.15}$$

La aplicación de la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{10.16}$$

al miembro izquierdo de la ecuación (10.15) y la invocación de las ecuaciones (10.11) y (10.14) produce

$$\nabla(\underbrace{\cancel{\nabla \cdot \mathbf{E}_s}}_{0}) - \nabla^2\mathbf{E}_s = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}_s$$

o

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E}_s - \gamma^2\mathbf{E}_s = 0} \tag{10.17}$$

donde

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \tag{10.18}$$

y donde γ es la *constante de propagación* (por metro) del medio. Siguiendo un procedimiento semejante, es posible demostrar que en cuanto al campo **H**,

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s - \gamma^2 \mathbf{H}_s = 0 \tag{10.19}$$

Las ecuaciones (10.17) y (10.19) son las *ecuaciones vectoriales homogéneas de Helmholtz*, o *ecuaciones vectoriales de onda*. La ecuación (10.17), por ejemplo, equivale en coordenadas cartesianas a tres ecuaciones escalares de onda, una por cada componente de **E** a lo largo de $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$.

Puesto que en las ecuaciones (10.17) a (10.19) γ es una cantidad compleja, concedamos que

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \tag{10.20}$$

α y β se obtienen de las ecuaciones (10.18) y (10.20), en el entendido de que

$$-\text{Re}\ \gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \tag{10.21}$$

y

$$|\gamma^2| = \beta^2 + \alpha^2 = \omega\mu\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} \tag{10.22}$$

De las ecuaciones (10.21) y (10.22) se obtiene

$$\boxed{\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^2} - 1\right]}} \tag{10.23}$$

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^2} + 1\right]}} \tag{10.24}$$

Sin menoscabo de la generalización, si suponemos que la onda se propaga a lo largo de $+\mathbf{a}_z$ y que $\mathbf{E}_s$ sólo cuenta con la componente x,

$$\mathbf{E}_s = E_{xs}(z)\mathbf{a}_x \tag{10.25}$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación (10.17) resulta en

$$(\nabla^2 - \gamma^2)E_{xs}(z) \tag{10.26}$$

Por consiguiente,

$$\cancelto{0}{\frac{\partial^2 E_{xs}(z)}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 E_{xs}(z)}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_{xs}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 E_{xs}(z) = 0$$

o

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2\right]E_{xs}(z) = 0 \tag{10.27}$$

La solución de esta ecuación escalar de onda, una ecuación diferencial lineal homogénea, es (véase el caso B del ejemplo 6.5)

$$E_{xs}(z) = E_o e^{-\gamma z} + E'_o e^{\gamma z} \tag{10.28}$$

donde E_o y E'_o son constantes. El hecho de que el campo deba ser finito en el infinito impone que $E'_o = 0$. Opcionalmente, y a causa de que $e^{\gamma z}$ denota una onda que se desplaza a lo largo de $-\mathbf{a}_z$ mientras que suponemos que la propagación de la onda ocurre a lo largo de $\mathbf{a}_z$, $E'_o = 0$. Desde cualquier punto de vista, así, $E'_o = 0$. De la inserción del factor de tiempo $e^{j\omega t}$ en la ecuación (10.28) y el empleo de la ecuación (10.20) se obtiene

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\,[E_{xs}(z)e^{j\omega t}\mathbf{a}_x] = \text{Re}\,(E_o e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_x)$$

o

$$\boxed{\mathbf{E}(z, t) = E_o e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x} \tag{10.29}$$

En la figura 10.5 se presenta el diagrama de $|\mathbf{E}|$ en los instantes $t = 0$ y $t = \Delta t$. Salta a la vista que $\mathbf{E}$ sólo cuenta con la componente x y se desplaza a lo largo de la dirección $+z$. Habiendo obtenido $\mathbf{E}(z, t)$, $\mathbf{H}(z, t)$ se obtiene con pasos similares mediante la ecuación (10.19) o aplicando la ecuación (10.29) en combinación con las ecuaciones de Maxwell, como se hizo en el ejemplo 9.8. De un modo u otro se llega finalmente a

$$\mathbf{H}(z, t) = \text{Re}\,(H_o e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_y) \tag{10.30}$$

donde

$$H_o = \frac{E_o}{\eta} \tag{10.31}$$

y donde η es una cantidad compleja conocida como *impedancia intrínseca* (en ohms) del medio. Siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo 9.8, es posible demostrar que

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = |\eta|\underline{/\theta_\eta} = |\eta|e^{j\theta_\eta} \tag{10.32}$$

Figura 10.5. Campo E con la componente x en desplazamiento a lo largo de la dirección $+z$ en los instantes $t = 0$ y $t = \Delta t$; las flechas indican valores instantáneos de E.

con

$$\boxed{|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\left[1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/4}}, \quad \tan 2\theta_\eta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \tag{10.33}$$

donde $0 \leq \theta_\eta \leq 45°$. La sustitución de las ecuaciones (10.31) y (10.32) en la ecuación (10.30) da como resultado

$$\mathbf{H} = \text{Re}\left[\frac{E_o}{|\eta| e^{j\theta_\eta}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_y\right]$$

o

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{E_o}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)\, \mathbf{a}_y} \tag{10.34}$$

De las ecuaciones (10.29) y (10.34) se desprende que conforme la onda se propaga a lo largo de $\mathbf{a}_z$, su amplitud decrece o se atenúa en un factor $e^{-\alpha z}$, motivo por el cual α recibe el nombre de *constante de atenuación* o *factor de atenuación* del medio. Esta constante mide el índice espacial de la declinación de la onda en el medio y se enuncia en nepers por metro (Np/m) o en decibeles por metro (dB/m). Una atenuación de 1 neper equivale a una reducción de e^{-1} del valor original, mientras que un incremento de 1 neper equivale a un aumento en un factor de e. En el caso del voltaje, así,

$$1 \text{ Np} = 20 \log_{10} e = 8.686 \text{ dB} \tag{10.35}$$

En cuanto a la ecuación (10.23), vale hacer notar que si $\sigma = 0$, como es el caso tanto de un medio sin pérdidas como del vacío, $\alpha = 0$, de modo que la onda no se atenúa al propagarse. La cantidad β es una medida del corrimiento de fase por longitud y se llama *constante de fase* o *número de onda*. En términos de β, la velocidad de onda u y la longitud de onda λ están dadas respectivamente por [véanse las ecuaciones (10.7*b*) y (10.8)]

$$u = \frac{\omega}{\beta}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.36}$$

Respecto de las ecuaciones (10.29) y (10.34) es posible observar asimismo que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ están fuera de fase por θ_η en cualquier instante, a causa de la impedancia intrínseca compleja del medio. En cualquier momento, así, $\mathbf{E}$ se adelanta a $\mathbf{H}$ (o $\mathbf{H}$ se rezaga de $\mathbf{E}$) por θ_η. Señálese por último que, en un medio disipativo, la razón de la magnitud de la densidad de corriente de conducción $\mathbf{J}$ a la magnitud de la densidad de corriente de desplazamiento $\mathbf{J}_d$ es

$$\frac{|\mathbf{J}_s|}{|\mathbf{J}_{ds}|} = \frac{|\sigma \mathbf{E}_s|}{|j\omega\varepsilon \mathbf{E}_s|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \tan\theta$$

o

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \tag{10.37}$$

donde $\tan\theta$ es la *tangente de pérdida* y θ el *ángulo de pérdida* del medio, como se ilustra en la figura 10.6. Aunque no es fácil trazar una línea de demarcación entre buenos conductores y dieléctricos disipativos, $\tan\theta$ o θ pueden usarse para determinar cuán disipativo es un medio. Un medio es un buen dieléctrico (sin pérdidas o perfecto) si, en su caso, el valor de $\tan\theta$ es muy reducido ($\sigma \ll \omega\varepsilon$), y un buen conductor si $\tan\theta$ es muy alto ($\sigma \gg \omega\varepsilon$). Desde el punto de vista de la propagación de ondas, el comportamiento característico de un medio depende no sólo de sus parámetros constitutivos σ, ε y μ, sino también de la frecuencia de operación. Un buen conductor en bajas frecuencias podría ser un buen dieléctrico en altas frecuencias. En lo que se refiere a las ecuaciones (10.33) y (10.37)

$$\theta = 2\theta\eta \tag{10.38}$$

Con base en la ecuación (10.14)

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}_s = j\omega\varepsilon\left[1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon}\right]\mathbf{E}_s \tag{10.39}$$

$$= j\omega\varepsilon_c\mathbf{E}_s$$

donde

$$\boxed{\varepsilon_c = \varepsilon\left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]} \tag{10.40a}$$

o

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' \tag{10.40b}$$

y $\varepsilon' = \varepsilon$, $\varepsilon'' = \sigma/\omega$, mientras que ε_c es la *permitividad compleja* del medio. Adviértase que la razón de ε'' a ε' es la tangente de pérdida del medio; es decir,

$$\tan\theta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{10.41}$$

En las secciones siguientes se examinará la propagación de ondas en otros tipos de medios, casos especiales del considerado en esta sección. Por tanto, de las fórmulas obtenidas para este caso general deduciremos simplemente las que rigen en aquéllos. Se recomienda al estudiante no limitarse a memorizarlas, sino observar además su fácil obtención a partir de las fórmulas relativas al caso general.

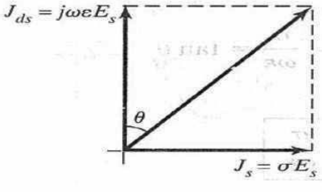


Figura 10.6. Ángulo de pérdida de un medio disipativo.

10.4. Ondas planas en dieléctricos sin pérdidas

En un dieléctrico sin pérdidas, $\sigma \ll \omega\varepsilon$. Éste es un caso especial del referido en la sección 10.3, salvo que

$$\boxed{\sigma \simeq 0, \qquad \varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r, \qquad \mu = \mu_o \mu_r} \tag{10.42}$$

Al sustituir estos valores en las ecuaciones (10.23) y (10.24) se obtiene

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{10.43a}$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.43b}$$

Asimismo,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \underline{/0°} \tag{10.44}$$

de manera que **E** y **H** comparten la misma fase temporal.

10.5. Ondas planas en el vacío

Éste es también un caso especial del considerado en la sección 10.3. Esta vez,

$$\boxed{\sigma = 0, \qquad \varepsilon = \varepsilon_o, \qquad \mu = \mu_o} \tag{10.45}$$

Esta situación puede interpretarse asimismo como un caso especial del descrito en la sección 10.4. En consecuencia, basta reemplazar ε por ε_o y μ por μ_o en la ecuación (10.43) o sustituir directamente la ecuación (10.45) en las ecuaciones (10.23) y (10.24). De una u otra forma se obtiene

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_o} = \frac{\omega}{c} \tag{10.46a}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = c, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.46b}$$

donde $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s, la velocidad de la luz en el vacío. El hecho de que las ondas electromagnéticas viajen en el vacío a la velocidad de la luz es importante, pues indica que la luz es manifestación de una onda electromagnética. En otras palabras, la luz es propiamente electromagnética.

Al sustituir los parámetros constitutivos de la ecuación (10.45) en la ecuación (10.33), $\theta_\eta = 0$ y $\eta = \eta_o$, donde η_o es la *impedancia intrínseca del vacío* y está dada por

$$\boxed{\eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120\pi \simeq 377\ \Omega} \tag{10.47}$$

$$\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - \beta z)\ \mathbf{a}_x \tag{10.48a}$$

así,

$$\mathbf{H} = H_o \cos(\omega t - \beta z)\ \mathbf{a}_y = \frac{E_o}{\eta_o} \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y \tag{10.48b}$$

En la figura 10.7*(a)* aparece el diagrama de **E** y **H**. En general, si $\mathbf{a}_E$, $\mathbf{a}_H$ y $\mathbf{a}_k$ son vectores unitarios a lo largo del campo **E**, el campo **H** y la dirección de propagación de la onda, es posible demostrar que (véase el problema 10.14)

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H$$

o

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_H = -\mathbf{a}_E$$

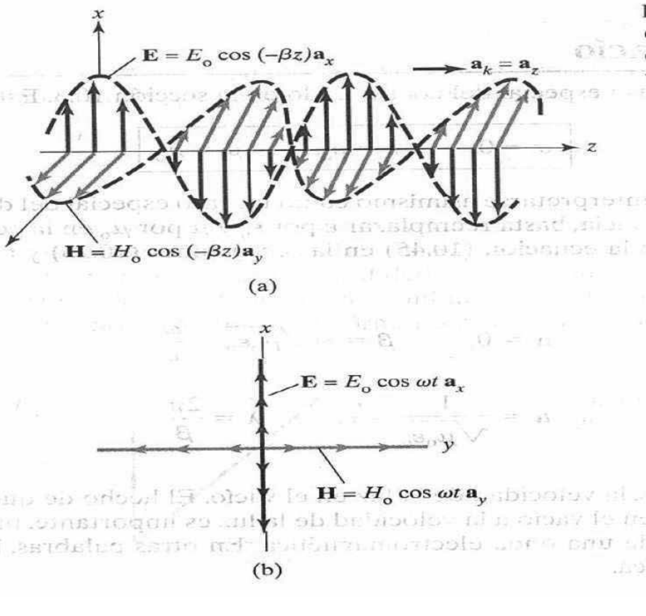


Figura 10.7. **(a)** Diagrama de **E** y **H** como funciones de z en $t = 0$; **(b)** diagrama de **E** y **H** en $z = 0$. Las flechas indican valores instantáneos.

o

$$\boxed{\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_k} \tag{10.49}$$

Los campos (u ondas electromagnéticas) tanto **E** como **H** son normales en cualquier punto a la dirección de propagación de onda $\mathbf{a}_k$. Esto significa que se sitúan en un plano transversal u ortogonal a esa dirección. Así, forman una onda electromagnética sin componentes de campo eléctrico y magnético a lo largo de la dirección de propagación, llamada *onda electromagnética transversal* (ET). **E** y **H** son a su vez, y por separado, una *onda plana uniforme*, puesto que **E** (o **H**) mantiene igual magnitud a todo lo largo de un plano transversal, definido por z = constante. La dirección en la que apunta el campo eléctrico es la *polarización* de una onda ET.[3] La onda de la ecuación (10.29), por ejemplo, está polarizada en la dirección de x. Esto se advierte en la figura 10.7*(b)*, ilustrativa de ondas planas uniformes. La existencia física de una onda plana uniforme es imposible, ya que se extendería al infinito y representaría una energía infinita. Pese a su simplicidad, no carece de importancia pues sirve como aproximación de ondas prácticas —las procedentes de una antena de radio, por ejemplo— alejadas de fuentes de radiación. Aunque estas precisiones se refieren al vacío, también se aplican a cualquier otro medio isotrópico.

10.6. Ondas planas en buenos conductores

Éste es otro caso especial del expuesto en la sección 10.3. Un conductor perfecto, o buen conductor, es aquel en el que $\sigma \gg \omega\varepsilon$, de modo que $\sigma/\omega\varepsilon \to \infty$; es decir,

$$\boxed{\sigma \simeq \infty, \qquad \varepsilon = \varepsilon_o, \qquad \mu = \mu_o\mu_r} \tag{10.50}$$

Así, las ecuaciones (10.23) y (10.24) se convierten en

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu\sigma} \tag{10.51a}$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.51b}$$

Asimismo,

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\,\angle 45^\circ \tag{10.52}$$

de modo que **E** se adelanta a **H** en 45°. Si

$$\mathbf{E} = E_o e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_x \tag{10.53a}$$

[3] En algunos textos la polarización se define de otra manera.

entonces

$$\mathbf{H} = \frac{E_o}{\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\sigma}}} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - 45°)\, \mathbf{a}_y \tag{10.53b}$$

De esta forma, a medida que la onda **E** (o **H**) se desplaza en un medio conductor, su amplitud es atenuada por el factor $e^{-\alpha z}$. Indicada en la figura 10.8, la distancia δ, a lo largo de la cual la amplitud de onda decrece en un factor e^{-1} (alrededor de 37%), es la *profundidad pelicular* o *profundidad de penetración* del medio; esto es,

$$E_o e^{-\alpha\delta} = E_o e^{-1}$$

o

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha}} \tag{10.54a}$$

La **profundidad pelicular** es una medida del grado de penetración de una onda electromagnética en el medio.

La ecuación (10.54*a*) suele ser aplicable a cualquier medio material. En el caso de los buenos conductores, las ecuaciones (10.51*a*) y (10.54*a*) producen

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{10.54b}$$

Con referencia a un buen conductor, la imagen contenida en la figura 10.8 resulta exagerada, pero la profundidad pelicular de un medio parcialmente conductor puede ser muy considerable. En cuanto a las ecuaciones (10.51*a*), (10.52) y (10.54*b*), alusivas todas ellas a un buen conductor,

$$\eta = \frac{1}{\sigma\delta}\sqrt{2}\, e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sigma\delta} \tag{10.55}$$

Figura 10.8. Ilustración de la profundidad pelicular.

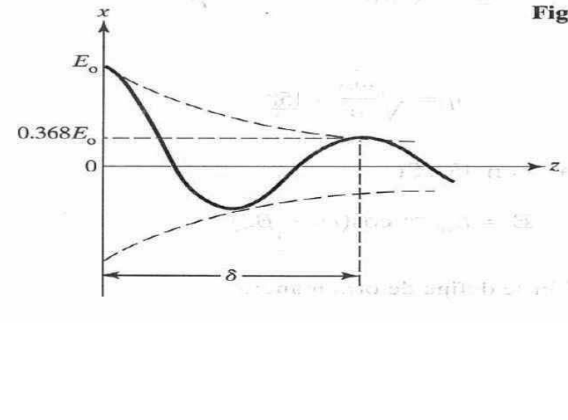


Tabla 10.2. Profundidad pelicular del cobre.*

Frecuencia (Hz)	10	60	100	500	10^4	10^8	10^{10}
Profundidad pelicular (mm)	20.8	8.6	6.6	2.99	0.66	6.6×10^{-3}	6.6×10^{-4}

*En cobre, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ mhos/m, $\mu = \mu_o$, $\delta = 66.1/\sqrt{f}$ (en mm).

Con relación asimismo a los buenos conductores, la ecuación (10.53*a*) puede expresarse como

$$\mathbf{E} = E_o e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \mathbf{a}_x$$

lo que indica que δ mide la disminución exponencial de la onda durante su recorrido por el conductor. En la tabla 10.2 se presenta la profundidad pelicular del cobre a varias frecuencias, la cual decrece al aumentar la frecuencia. Así, **E** y **H** difícilmente pueden propagarse a través de buenos conductores.

El fenómeno por el que la intensidad de campo decrece rápidamente en un conductor se conoce como *efecto pelicular*. Los campos y corrientes asociadas son confinados a una capa muy delgada (la "piel") de la superficie del conductor. Respecto de un cable de radio *a*, por ejemplo, es válido suponer que, a altas frecuencias, toda la corriente fluye en el anillo circular de grosor δ que se muestra en la figura 10.9. El efecto pelicular —el cual adopta distintas apariencias en problemas tales como la atenuación en guías de ondas, la resistencia efectiva o en corriente alterna de líneas de transmisión y el blindaje electromagnético— es útil en numerosas aplicaciones. Puesto que, por ejemplo, la plata presenta una profundidad pelicular muy reducida y es insignificante la diferencia de rendimiento entre un componente de plata pura y uno de cobre con revestimiento de plata suele recurrirse a éste para abatir el costo de materiales de componentes de guías de ondas. Esto explica asimismo que en las antenas exteriores de televisión se empleen conductores tubulares huecos en lugar de conductores sólidos. De igual manera, los aparatos eléctricos pueden ser protegidos eficazmente contra ondas electromagnéticas mediante cubiertas conductoras de apenas unas cuantas profundidades peliculares de grosor.

La profundidad pelicular sirve para calcular la *resistencia en corriente alterna* debida al efecto pelicular. La resistencia de la ecuación (5.16) se llama *resistencia en corriente directa*; es decir,

$$R_{cd} = \frac{\ell}{\sigma S} \tag{5.16}$$

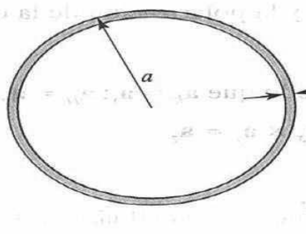


Figura 10.9. Profundidad pelicular a altas frecuencias, $\delta \ll a$.

La *resistencia superficial o pelicular* R_s (en Ω/m^2) es la parte real de la η de un buen conductor. Así, a partir de la ecuación (10.55)

$$\boxed{R_s = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}} \tag{10.56}$$

Ésta es la resistencia de una unidad de anchura y una unidad de longitud del conductor. Equivale a la resistencia en corriente directa de una unidad de longitud de un conductor con área de sección transversal $1 \times \delta$. Con referencia, así, a una anchura w y una longitud ℓ dadas, la resistencia en corriente alterna se calcula recurriendo a la ya conocida relación de resistencia en corriente directa de la ecuación (5.16) y suponiendo un flujo uniforme de corriente en el conductor de grosor δ; esto es,

$$\boxed{R_{\text{ca}} = \frac{\ell}{\sigma\delta w} = \frac{R_s \ell}{w}} \tag{10.57}$$

donde $S \simeq \delta w$. Respecto de un cable conductor de radio a (fig. 10.9), $w = 2\pi a$, de modo que

$$\frac{R_{\text{ca}}}{R_{\text{dc}}} = \frac{\dfrac{\ell}{\sigma 2\pi a \delta}}{\dfrac{\ell}{\sigma \pi a^2}} = \frac{a}{2\delta}$$

Puesto que $\delta \ll a$ a altas frecuencias, esto indica que R_{ca} es mucho mayor que R_{cd}. En general, la razón de la resistencia en corriente alterna a la resistencia en corriente directa comienza en 1.0 en corriente directa y muy bajas frecuencias y crece conforme aumenta la frecuencia. Asimismo, aun si la mayor parte de la corriente no está distribuida uniformemente en un conductor de 5δ de grosor, la pérdida de potencia es la misma que si aquélla estuviera distribuida uniformemente en un grosor de δ y cero. Ésta es una razón más de que a δ se le denomine *profundidad pelicular*.

Ejemplo 10.2

Un dieléctrico disipativo tiene una impedancia intrínseca de $200 \,/\!\underline{30^\circ}\ \Omega$ en una frecuencia particular. Si, en esa frecuencia, la onda plana que se propaga por el dieléctrico tiene como componente de campo magnético

$$\mathbf{H} = 10\, e^{-\alpha x} \cos\left(\omega t - \frac{1}{2}x\right) \mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

halle $\mathbf{E}$ y α. Determine la profundidad pelicular y la polarización de la onda.

Solución:

La onda dada se desplaza a lo largo de $\mathbf{a}_x$, de modo que $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_x$; $\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_y$, de forma que

$$-\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$$

o

$$\mathbf{a}_E = -\mathbf{a}_z$$

Asimismo, $H_o = 10$, de manera que

$$\frac{E_o}{H_o} = \eta = 200 \angle 30^\circ = 200\, e^{j\pi/6} \rightarrow E_o = 2000e^{j\pi/6}$$

Salvo por su diferencia de amplitud y fase, **E** y **H** tienen siempre la misma forma. Por tanto,

$$\mathbf{E} = \text{Re}\,(2000e^{j\pi/6}e^{-\gamma x}e^{j\omega t}\mathbf{a}_E)$$

o

$$\mathbf{E} = -2e^{-\alpha x}\cos\left(\omega t - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{a}_z\,\text{kV/m}$$

En conocimiento de que $\beta = 1/2$, es preciso determinar α. Puesto que

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^2} - 1\right]}$$

y

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^2} + 1\right]}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left[\frac{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^2} - 1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^2} + 1}\right]^{1/2}$$

Sin embargo, $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \tan 2\theta_\eta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. En consecuencia,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left[\frac{2 - 1}{2 + 1}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

o

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.2887\ \text{Np/m}$$

y

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 2\sqrt{3} = 3.464\ \text{m}$$

La onda tiene una componente $\mathbf{E}_z$; así, está polarizada a lo largo de la dirección de z.

Ejercicio 10.2

Una onda plana que se propaga por un medio con $\varepsilon_r = 8$, $\mu_r = 2$ tiene $\mathbf{E} = 0.5\, e^{-z/3}$ sen $(10^8 t - \beta z)\, \mathbf{a}_x$ V/m. Determine

a) β.
b) La tangente de pérdida.
c) La impedancia de la onda.
d) La velocidad de la onda.
e) El campo **H**.

Respuestas: *a)* 1.374 rad/m, *b)* 0.5154, *c)* $177.72\ \underline{/13.63°}\ \Omega$, *d)* 7.278×10^7 m/s, y *e)* $2.817e^{-z/3}$ sen$(10^8 t - \beta z - 13.63°)\mathbf{a}_y$ mA/m.

Ejemplo 10.3

En un medio sin pérdidas en el que $\eta = 60\pi$, $\mu_r = 1$ y $\mathbf{H} = -0.1 \cos(\omega t - z)\, \mathbf{a}_x + 0.5$ sen $(\omega t - z)\mathbf{a}_y$ A/m, calcule ε_r, ω y **E**.

Solución:

En este caso, $\sigma = 0$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, de modo que

$$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

o

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{120\pi}{\eta} = \frac{120\pi}{60\pi} = 2 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_r = 4$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}\,\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{4} = \frac{2\omega}{c}$$

o

$$\omega = \frac{\beta c}{2} = \frac{1(3 \times 10^8)}{2} = 1.5 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

A partir del campo **H** dado, **E** puede calcularse de dos maneras: mediante las técnicas desarrolladas en este capítulo (basadas en las ecuaciones de Maxwell) o usando directamente las ecuaciones de Maxwell, como en el capítulo anterior.

Método 1. Para emplear las técnicas desarrolladas en este capítulo, sea

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

donde $\mathbf{H}_1 = -0.1 \cos(\omega t - z)\,\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{H}_2 = 0.5 \operatorname{sen}(\omega t - z)\,\mathbf{a}_y$ y el campo eléctrico correspondiente

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

donde $\mathbf{E}_1 = E_{1o}\cos(\omega t - z)\,\mathbf{a}_{E_1}$ y $\mathbf{E}_2 = E_{2o}\operatorname{sen}(\omega t - z)\,\mathbf{a}_{E_2}$. Nótese que aunque $\mathbf{H}$ tiene componentes a lo largo de $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_y$, no tiene ninguno a lo largo de la dirección de propagación; se trata en consecuencia de una onda ET.

En el caso de $\mathbf{E}_1$,

$$\mathbf{a}_{E_1} = -(\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_{H_1}) = -(\mathbf{a}_z \times -\mathbf{a}_x) = \mathbf{a}_y$$
$$E_{1o} = \eta\, H_{1o} = 60\pi\,(0.1) = 6\pi$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_1 = 6\pi \cos(\omega t - z)\,\mathbf{a}_y$$

En el caso de $\mathbf{E}_2$,

$$\mathbf{a}_{E_2} = -(\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_{H_2}) = -(\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y) = \mathbf{a}_x$$
$$E_{2o} = \eta\, H_{2o} = 60\pi\,(0.5) = 30\pi$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_2 = 30\pi \operatorname{sen}(\omega t - z)\mathbf{a}_x$$

La adición de $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ da como resultado $\mathbf{E}$; es decir,

$$\mathbf{E} = 94.25 \operatorname{sen}(1.5 \times 10^8 t - z)\,\mathbf{a}_x + 18.85 \cos(1.5 \times 10^8 t - z)\,\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Método 2. Es posible aplicar directamente las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \cancelto{0}{\sigma}\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\int \nabla \times H\, dt$$

porque $\sigma = 0$. Pero

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x(z) & H_y(z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}\,\mathbf{a}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z}\,\mathbf{a}_y$$
$$= H_{2o}\cos(\omega t - z)\,\mathbf{a}_x + H_{1o}\operatorname{sen}(\omega t - z)\mathbf{a}_y$$

donde $H_{1o} = -0.1$ y $H_{2o} = 0.5$. Por consiguiente,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\int \nabla \times \mathbf{H}\, dt = \frac{H_{2o}}{\varepsilon\omega}\operatorname{sen}(\omega t - z)\,\mathbf{a}_x - \frac{H_{1o}}{\varepsilon\omega}\cos(\omega t - z)\,\mathbf{a}_y$$
$$= 94.25 \operatorname{sen}(\omega t - z)\,\mathbf{a}_x + 18.85 \cos(\omega t - z)\,\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

como era de esperar.

Ejercicio 10.3

Una onda plana en un medio no magnético tiene $\mathbf{E} = 50 \text{ sen } (10^8 t + 2z)\ \mathbf{a}_y$ V/m. Halle

a) La dirección de propagación de la onda.

b) λ, f y ε_r.

c) **H**.

Respuestas: *a)* a lo largo de la dirección $-z$, *b)* 3.142 m, 15.92 MHz, 36 y *c)* 0.7958 $\text{sen}(10^8 t + 2z)\ \mathbf{a}_x$ A/m.

Ejemplo 10.4

Una onda plana uniforme que se propaga en cierto medio tiene

$$\mathbf{E} = 2e^{-\alpha z} \text{ sen } (10^8 t - \beta z)\ \mathbf{a}_y \text{ V/m}.$$

Si el medio se caracteriza por $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 20$ y $\sigma = 3$ mhos/m, halle α, β y **H**.

Solución:

Para saber si el medio es un dieléctrico disipativo o un buen conductor debe determinarse la tangente de pérdida.

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{3}{10^8 \times 1 \times \dfrac{10^{-9}}{36\pi}} = 3393 \gg 1$$

lo que indica que el medio es un buen conductor en la frecuencia de operación. Por tanto,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} = \left[\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20(10^8)(3)}{2}\right]^{1/2}$$

$$= 61.4$$

$$\alpha = 61.4 \text{ Np/m}, \qquad \beta = 61.4 \text{ rad/m}$$

Asimismo,

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} = \left[\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20(10^8)}{3}\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{800\pi}{3}}$$

$$\tan 2\theta_\eta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 3393 \quad \rightarrow \quad \theta_\eta = 45° = \pi/4$$

En consecuencia,

$$\mathbf{H} = H_o e^{-\alpha z} \text{sen}\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{a}_H$$

donde

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$

y

$$H_o = \frac{E_o}{|\eta|} = 2\sqrt{\frac{3}{800\pi}} = 69.1 \times 10^{-3}$$

Así,

$$\mathbf{H} = -69.1\, e^{-61.4z} \operatorname{sen}\left(10^8 t - 61.42z - \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

Ejercicio 10.4

Una onda plana que se desplaza en la dirección $+y$ en un medio disipativo ($\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1, \sigma = 10^{-2}$ mhos/m) tiene $\mathbf{E} = 30 \cos(10^9\pi t + \pi/4)\mathbf{a}_z$ V/m en $y = 0$. Determine

a) $\mathbf{E}$ en $y = 1$ m, $t = 2$ ns.

b) La distancia recorrida por la onda para presentar un corrimiento de fase de 10°.

c) La distancia recorrida por la onda para que su amplitud se reduzca 40%.

d) $\mathbf{H}$ en $y = 2$ m, $t = 2$ ns.

Respuestas: *a)* $2.787\mathbf{a}_z$ V/m, *b)* 8.325 mm, *c)* 542 mm y *d)* $-4.71\mathbf{a}_x$ mA/m.

Ejemplo 10.5

Una onda plana $\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - \beta z)\, \mathbf{a}_x$ incide en un buen conductor en $z = 0$. Halle la densidad de corriente en el conductor.

Solución:

Puesto que la densidad de corriente $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, es de esperar que $\mathbf{J}$ satisfaga la ecuación de onda formulada en la ecuación (10.17); es decir,

$$\nabla^2 \mathbf{J}_s - \gamma^2 \mathbf{J}_s = 0$$

Asimismo, la $\mathbf{E}$ incidente cuenta sólo con componente x y varía con z. Por tanto, $\mathbf{J} = J_x(z, t)\, \mathbf{a}_x$ y

$$\frac{d^2}{dz^2} J_{sx} - \gamma^2 J_{sx} = 0$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es (véase el caso B del ejemplo 6.5)

$$J_{sx} = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}$$

La constante B debe ser de cero porque J_{sx} es finita cuando $z \to \infty$. Pero en un buen conductor, $\sigma \gg \omega\varepsilon$ de manera que $\alpha = \beta = 1/\delta$. Por tanto,

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha(1 + j) = \frac{(1 + j)}{\delta}$$

y

$$J_{sx} = Ae^{-z(1 + j)/\delta}$$

o

$$J_{sx} = J_{sx}(0)\, e^{-z(1 + j)/\delta}$$

donde J_{sx} (0) es la densidad de corriente en la superficie del conductor.

Ejercicio 10.5

Con relación a la densidad de corriente del ejemplo 10.5, halle la magnitud de la corriente total a través de una franja del conductor de profundidad infinita a lo largo de z y anchura w a lo largo de y.

Respuesta: $\dfrac{J_{sx}(0)w\delta}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo 10.6 Con referencia al cable coaxial de cobre mostrado en la figura 7.12, sea $a = 2$ mm, $b = 6$ mm y $t = 1$ mm. Calcule la resistencia de 2 m de longitud del cable en corriente directa y a 100 MHz.

Solución:

Sea

$$R = R_o + R_i$$

donde R_o y R_i son las resistencias de los conductores externo e interno.

En corriente directa,

$$R_i = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\ell}{\sigma \pi a^2} = \frac{2}{5.8 \times 10^7 \pi [2 \times 10^{-3}]^2} = 2.744 \text{ m}\Omega$$

$$R_o = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\ell}{\sigma\pi[[b + t]^2 - b^2]} = \frac{\ell}{\sigma\pi[t^2 + 2bt]}$$

$$= \frac{2}{5.8 \times 10^7 \pi [1 + 12] \times 10^{-6}}$$

$$= 0.8429 \text{ m}\Omega$$

Por tanto, $R_{cd} = 2.744 + 0.8429 = 3.587$ mΩ

En $f = 100$ MHz,

$$R_i = \frac{R_s \ell}{w} = \frac{\ell}{\sigma \delta 2\pi a} = \frac{\ell}{2\pi a}\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$= \frac{2}{2\pi \times 2 \times 10^{-3}}\sqrt{\frac{\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}}$$

$$= 0.41\ \Omega$$

Puesto que $\delta = 6.6\ \mu\text{m} \ll t = 1\text{mm}$, $w = 2\pi b$ respecto del conductor externo. Por tanto,

$$R_o = \frac{R_s \ell}{w} = \frac{\ell}{2\pi b}\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$= \frac{2}{2\pi \times 6 \times 10^{-3}}\sqrt{\frac{\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}}$$

$$= 0.1384\ \Omega$$

En consecuencia,

$$R_{ca} = 0.41 + 0.1384 = 0.5484\ \Omega$$

valor superior en aproximadamente 150 veces al de R_{cd}. Con relación, así, a la misma corriente efectiva i, la pérdida óhmica (i^2R) del cable a 100 MHz es mucho mayor que la pérdida de potencia en corriente directa, en un factor de 150.

Ejercicio 10.6

Respecto de un alambre de aluminio con diámetro de 2.6 mm, calcule la razón de resistencia en corriente alterna a resistencia en corriente directa a

a) 10 MHz
b) 2 GHz

Respuestas: *a)* 24.16 y *b)* 341.7.

10.7. Potencia y el vector de Poynting

Como ya se mencionó, por medio de ondas electromagnéticas es posible transportar energía de un punto (sede de un transmisor) a otro (con un receptor). La rapidez de tal transmisión de energía puede obtenerse de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{10.58a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{10.58b}$$

De la multiplicación de ambos miembros de la ecuación (10.58*b*) por **E** se obtiene

$$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \sigma E^2 + \mathbf{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\varepsilon t} \tag{10.59}$$

Pero en todo campo vectorial **A** y **B** (véase el apéndice A.10)

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}).$$

La aplicación de esta identidad vectorial a la ecuación (10.59) (concediendo que $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{E}$) da como resultado

$$\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) + \nabla\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{E}) = \sigma E^2 + \mathbf{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{10.60}$$

Con base en la ecuación (10.58*a*),

$$\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) = \mathbf{H}\cdot\left(-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}) \tag{10.61}$$

de modo que la ecuación (10.60) se convierte en

$$-\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} - \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Si se reordenan los términos y se obtiene la integral de volumen de ambos miembros,

$$\int_v \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dv = -\frac{\partial}{\partial t}\int_v\left[\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right]dv - \int_v \sigma E^2\,dv \tag{10.62}$$

Al aplicar el teorema de la divergencia al miembro izquierdo se obtiene

$$\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_v\left[\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right]dv - \int_v \sigma E^2\,dv \tag{10.63}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Potencia} & & \text{Rapidez de decremento} & & \text{Potencia óhmica} \\ \text{total que sale} & = & \text{de la energía almacenada en} & - & \text{disipada} \\ \text{del volumen} & & \text{los campos eléctrico y magnético} & & \end{array} \tag{10.64}$$

La ecuación (10.63) es el *teorema de Poynting*,[4] cuyos términos se identifican aquí con argumentos de conservación de energía aplicados a campos electromagnéticos. El primer término del miembro derecho de esta ecuación es la rapidez de decremento de la energía almacenada en los campos eléctrico y magnético, y el segundo la potencia disipada a causa de que el medio es un conductor ($\sigma \neq 0$). La cantidad $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ en el miembro izquierdo es el *vector de Poynting* $\mathcal{P}$ (el cual se mide en watts por metro cuadrado [W/m²]); es decir,

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}} \tag{10.65}$$

[4]Así llamado en honor de J. H. Poynting, quien lo formuló en "On the transfer of energy in the electromagnetic field", *Phil. Trans.*, vol. 174, 1883, p. 343.

Esto representa el vector instantáneo de densidad de potencia asociado con el campo electromagnético en un punto dado. La integración del vector de Poynting sobre cualquier superficie cerrada da como resultado la potencia neta que sale de esa superficie.

El **teorema de Poynting** establece que la potencia neta que sale de un volumen v dado es igual a la rapidez temporal de decremento de la energía almacenada en v menos las pérdidas de conducción.

Este teorema se ilustra en la figura 10.10.

Cabe señalar que $\mathcal{P}$ es normal tanto a **E** como a **H** y ocurre, por tanto, a lo largo de la dirección de propagación de onda $\mathbf{a}_k$ en el caso de ondas planas uniformes. Así,

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H \tag{10.49}$$

El hecho de que $\mathcal{P}$ apunte a lo largo de $\mathbf{a}_k$ provocó que el nombre de este vector degenerara en vector de *apuntamiento* (*pointing*, en inglés).

Si suponemos de nuevo que

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x$$

entonces

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{E_o}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)\mathbf{a}_y$$

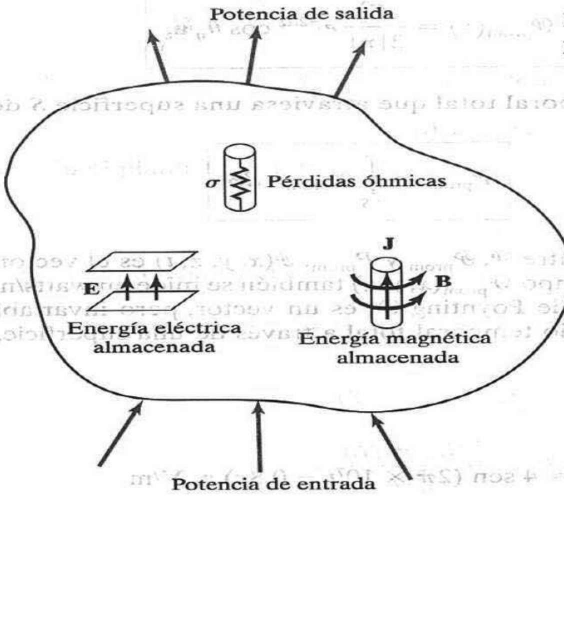


Figura 10.10. Ilustración del equilibrio de potencia en campos electromagnéticos.

y

$$\mathcal{P}(z, t) = \frac{E_o^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \mathbf{a}_z \tag{10.66}$$

$$= \frac{E_o^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos \theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)] \mathbf{a}_z$$

puesto que $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$. Para determinar el vector de Poynting promedio temporal $\mathcal{P}_{\text{prom}}(z)$ (en W/m²), de mayor valor práctico que el vector de Poynting instantáneo $\mathcal{P}(z, t)$, la ecuación (10.66) se integra sobre el periodo $T = 2\pi/\omega$; es decir,

$$\mathcal{P}_{\text{prom}}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(z, t)\, dt \tag{10.67}$$

Es posible demostrar (véase el problema 10.28) que esto equivale a

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{prom}}(z) = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*)} \tag{10.68}$$

Al sustituir la ecuación (10.66) en la ecuación (10.67) se obtiene

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{prom}}(z) = \frac{E_o^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \, \mathbf{a}_z} \tag{10.69}$$

La potencia promedio temporal total que atraviesa una superficie S determinada está dada por

$$\boxed{P_{\text{prom}} = \int_S \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot d\mathbf{S}} \tag{10.70}$$

Repárese en la diferencia entre $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ y P_{prom}. $\mathcal{P}(x, y, z, t)$ es el vector de Poynting en watts/metro y varía en el tiempo. $\mathcal{P}_{\text{prom}}(x, y, z)$ también se mide en watts/metro y es el promedio temporal del vector de Poynting $\mathcal{P}$; es un vector, pero invariable en el tiempo. P_{prom} es la potencia promedio temporal total a través de una superficie, en watts; es un escalar.

Ejemplo 10.7

En un medio no magnético

$$\mathbf{E} = 4 \text{ sen}(2\pi \times 10^7 t - 0.8x)\, \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Halle

a) ε_r, η

b) La potencia promedio temporal que porta la onda.

c) La potencia total que atraviesa 100 cm^2 del plano $2x + y = 5$.

Solución:

a) Puesto que $\alpha = 0$ y $\beta \neq \omega/c$, el medio de referencia no es el vacío, sino un medio sin pérdidas.

$$\beta = 0.8, \qquad \omega = 2\pi \times 10^7, \qquad \mu = \mu_o \text{ (no magnético)}, \qquad \varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$$

Por tanto,

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$$

o

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\beta c}{\omega} = \frac{0.8(3 \times 10^8)}{2\pi \times 10^7} = \frac{12}{\pi}$$

$$\varepsilon_r = 14.59$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 120\pi \cdot \frac{\pi}{12} = 10\pi^2$$

$$= 98.7\ \Omega$$

b) $\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \dfrac{E_o^2}{\eta}\,\text{sen}^2(\omega t - \beta x)\,\mathbf{a}_x$

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{P}\,dt = \frac{E_o^2}{2\eta}\,\mathbf{a}_x = \frac{16}{2 \times 10\pi^2}\,\mathbf{a}_x$$

$$= 81\ \mathbf{a}_x\ \text{mW/m}^2$$

c) En el plano $2x + y = 5$ (véanse los ejemplos 3.5 u 8.5),

$$\mathbf{a}_n = \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}$$

Así, la potencia total es

$$P_{\text{prom}} = \int \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot d\mathbf{S} = \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot S\,\mathbf{a}_n$$

$$= (81 \times 10^{-3}\mathbf{a}_x) \cdot (100 \times 10^{-4}) \left[\frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}\right]$$

$$= \frac{162 \times 10^{-5}}{\sqrt{5}} = 724.5\ \mu\text{W}$$

Ejercicio 10.7

En el vacío, $\mathbf{H} = 0.2 \cos(\omega t - \beta x)\, \mathbf{a}_z$ A/m. Halle la potencia total que pasa por:

a) Una placa cuadrada de 10 cm por lado en el plano $x + z = 1$.
b) Un disco circular de 5 cm de radio en el plano $x = 1$.

Respuestas: *a)* 0 y *b)* 59.22 mW.

10.8. Reflexión de una onda plana en incidencia normal

Hasta aquí hemos considerado ondas planas uniformes que se desplazan en medios homogéneos ilimitados. Pero cuando una onda plana procedente de cierto medio se encuentra con un medio diferente, es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida. La proporción de la onda incidente por ser reflejada y por ser transmitida depende de los parámetros constitutivos (ε, μ, σ) de los dos medios implicados. Aquí supondremos que el plano de la onda incidente es normal a la frontera entre los medios; la incidencia oblicua de ondas planas se tratará en la sección siguiente, una vez comprendido el caso, más simple, de la incidencia normal.

Supongamos que una onda plana que se propaga a lo largo de la dirección $+z$ incide en forma normal en la frontera $z = 0$ entre el medio 1 ($z < 0$), caracterizado por σ_1, ε_1 y μ_1, y el medio 2 ($z > 0$), caracterizado por σ_2, ε_2 y μ_2, como se muestra en la figura 10.11. En ésta, los subíndices i, r y t denotan las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. Las ondas incidente, reflejada y transmitida que aparecen en la figura 10.11 se obtienen de la siguiente manera:

Onda incidente:

($\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$) se desplaza a lo largo de $+\mathbf{a}_z$ en el medio 1. Si se suprime el factor de tiempo $e^{j\omega t}$ y se supone que

$$\mathbf{E}_{is}(z) = E_{io} e^{-\gamma_1 z}\, \mathbf{a}_x \tag{10.71}$$

entonces

$$\mathbf{H}_{is}(z) = H_{io} e^{-\gamma_1 z}\, \mathbf{a}_y = \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z}\, \mathbf{a}_y \tag{10.72}$$

Onda reflejada:

($\mathbf{E}_r$, $\mathbf{H}_r$) se desplaza a lo largo de $-\mathbf{a}_z$ en el medio 1. Si

$$\mathbf{E}_{rs}(z) = E_{ro} e^{\gamma_1 z}\, \mathbf{a}_x \tag{10.73}$$

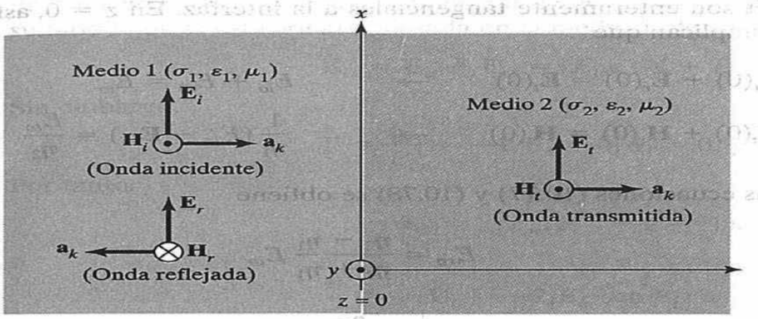


Figura 10.11. Onda plana de incidencia normal en una interfaz entre dos medios distintos.

entonces

$$\mathbf{H}_{rs}(z) = H_{ro}e^{\gamma_1 z}(-\mathbf{a}_y) = -\frac{E_{ro}}{\eta_1}e^{\gamma_1 z}\,\mathbf{a}_y \tag{10.74}$$

donde $\mathbf{E}_{rs}$ se halla presumiblemente a lo largo de $\mathbf{a}_x$; supondremos en forma sistemática que, en incidencia normal, $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_t$ tienen la misma polarización.

Onda transmitida:

($\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$) se desplaza a lo largo de $+\mathbf{a}_z$ en el medio 2. Si

$$\mathbf{E}_{ts}(z) = E_{to}e^{-\gamma_2 z}\,\mathbf{a}_x \tag{10.75}$$

entonces

$$\mathbf{H}_{ts}(z) = H_{to}e^{-\gamma_2 z}\,\mathbf{a}_y = \frac{E_{to}}{\eta_2}e^{-\gamma_2 z}\,\mathbf{a}_y \tag{10.76}$$

En las ecuaciones (10.71) a (10.76), E_{io}, E_{ro} y E_{to} son las magnitudes en $z = 0$ de los campos eléctricos incidente, reflejado y transmitido, respectivamente.

Adviértase en la figura 10.11 que el campo total en el medio 1 comprende los campos tanto incidente como reflejado, mientras que el medio 2 sólo contiene al campo transmitido; es decir,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r, \qquad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t, \qquad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t$$

En la interfaz $z = 0$, las condiciones en la frontera exigen que las componentes tangenciales de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ sean continuas. Puesto que las ondas son transversales, los

campos **E** y **H** son enteramente tangenciales a la interfaz. En $z = 0$, así, $\mathbf{E}_{1\tan} = \mathbf{E}_{2\tan}$ y $\mathbf{H}_{1\tan} = \mathbf{H}_{2\tan}$ implican que

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) \quad \rightarrow \quad E_{io} + E_{ro} = E_{to} \tag{10.77}$$

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t(0) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\eta_1}(E_{io} - \mathbf{E}_{ro}) = \frac{E_{to}}{\eta_2} \tag{10.78}$$

A partir de las ecuaciones (10.77) y (10.78) se obtiene

$$E_{ro} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{io} \tag{10.79}$$

y

$$E_{to} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{io} \tag{10.80}$$

Con base en las ecuaciones (10.79) y (10.80), el *coeficiente de reflexión* Γ y el *coeficiente de transmisión* τ se definen como

$$\boxed{\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \tag{10.81a}$$

o

$$E_{ro} = \Gamma E_{io} \tag{10.81b}$$

y

$$\boxed{\tau = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}} \tag{10.82a}$$

o

$$E_{to} = \tau E_{io} \tag{10.82b}$$

Cabe hacer notar que

1. $1 + \Gamma = \tau$
2. Tanto Γ como τ son adimensionales y pueden ser complejos.
3. $0 \leq |\Gamma| \leq 1$ (10.83)

El caso hasta aquí expuesto es el general. Consideremos ahora un caso especial, en el que el medio 1 es un dieléctrico perfecto (sin pérdidas, $\sigma_1 = 0$) y el medio 2 un conductor perfecto ($\sigma_2 = \infty$). En estas circunstancias, $\eta_2 = 0$; así, $\Gamma = -1$ y $\tau = 0$, lo que indica que la onda es totalmente reflejada. Esto no es de sorprender, puesto que en un conductor perfecto los campos tienden a cero, de modo que es imposible que exista una onda transmitida ($\mathbf{E}_2 = 0$). La onda totalmente reflejada se une con la onda incidente para formar una *onda estacionaria*. Como su nombre lo indica, una onda estacionaria se "estaciona" y no viaja, ya que se compone de dos ondas en movimiento ($\mathbf{E}_i$ y $\mathbf{E}_r$) de igual amplitud pero

campos **E** y **H** son enteramente tangenciales a la interfaz. En $z = 0$, así, $\mathbf{E}_{1\tan} = \mathbf{E}_{2\tan}$ y $\mathbf{H}_{1\tan} = \mathbf{H}_{2\tan}$ implican que

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) \quad \rightarrow \quad E_{io} + E_{ro} = E_{to} \tag{10.77}$$

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t(0) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\eta_1}(E_{io} - \mathbf{E}_{ro}) = \frac{E_{to}}{\eta_2} \tag{10.78}$$

A partir de las ecuaciones (10.77) y (10.78) se obtiene

$$E_{ro} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{io} \tag{10.79}$$

y

$$E_{to} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{io} \tag{10.80}$$

Con base en las ecuaciones (10.79) y (10.80), el *coeficiente de reflexión* Γ y el *coeficiente de transmisión* τ se definen como

$$\boxed{\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \tag{10.81a}$$

o

$$E_{ro} = \Gamma E_{io} \tag{10.81b}$$

y

$$\boxed{\tau = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}} \tag{10.82a}$$

o

$$E_{to} = \tau E_{io} \tag{10.82b}$$

Cabe hacer notar que

1. $1 + \Gamma = \tau$
2. Tanto Γ como τ son adimensionales y pueden ser complejos.
3. $0 \leq |\Gamma| \leq 1$ (10.83)

El caso hasta aquí expuesto es el general. Consideremos ahora un caso especial, en el que el medio 1 es un dieléctrico perfecto (sin pérdidas, $\sigma_1 = 0$) y el medio 2 un conductor perfecto ($\sigma_2 = \infty$). En estas circunstancias, $\eta_2 = 0$; así, $\Gamma = -1$ y $\tau = 0$, lo que indica que la onda es totalmente reflejada. Esto no es de sorprender, puesto que en un conductor perfecto los campos tienden a cero, de modo que es imposible que exista una onda transmitida ($\mathbf{E}_2 = 0$). La onda totalmente reflejada se une con la onda incidente para formar una *onda estacionaria*. Como su nombre lo indica, una onda estacionaria se "estaciona" y no viaja, ya que se compone de dos ondas en movimiento ($\mathbf{E}_i$ y $\mathbf{E}_r$) de igual amplitud pero

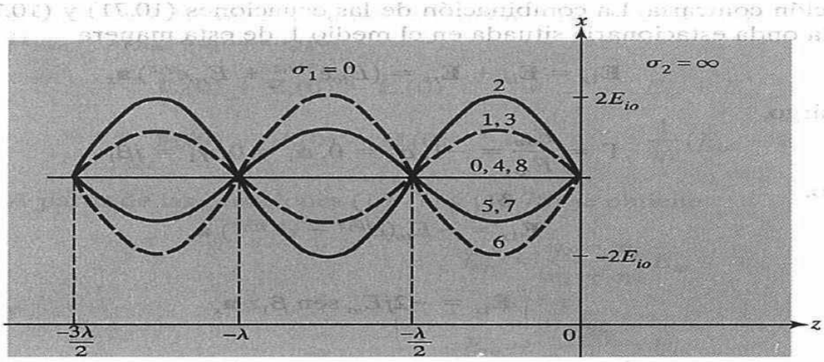


Figura 10.12. Ondas estacionarias $E = 2E_{io}$ sen $\beta_1 z$ sen $\omega t\, \mathbf{a}_x$; las curvas 0, 1, 2, 3, 4, . . . , corresponden a los momentos $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2, \ldots$, respectivamente; $\lambda = 2\pi/\beta_1$.

y que los valores mínimos de $|\mathbf{E}_1|$ ocurren en

$$-\beta_1 z_{\text{mín}} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

o

$$z_{\text{máx}} = -\frac{(2n + 1)\pi}{2\beta_1} = -\frac{(2n + 1)}{4}\lambda_1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.89}$$

CASO B

Si $\eta_2 < \eta_1, \Gamma < 0$. En este caso, la ubicación de los valores máximos de $|\mathbf{E}_1|$ está dada por la ecuación (10.89), y la de sus valores mínimos por la ecuación (10.88), como se ilustra en la figura 10.13. Conviene señalar que

1. El valor mínimo de $|\mathbf{H}_1|$ ocurre en asociación con el valor máximo de $|\mathbf{E}_1|$ y viceversa.
2. La onda transmitida (no representada en la figura 10.13) en el medio 2 es una onda puramente móvil, de manera que en esa región no hay valores máximos ni mínimos.

La razón de $|\mathbf{E}_1|_{\text{máx}}$ a $|\mathbf{E}_1|_{\text{mín}}$ (o de $|\mathbf{H}_1|_{\text{máx}}$ a $|\mathbf{H}_1|_{\text{mín}}$) se llama *razón de onda estacionaria s*; es decir,

$$\boxed{s = \frac{|\mathbf{E}_1|_{\text{máx}}}{|\mathbf{E}_1|_{\text{mín}}} = \frac{|\mathbf{H}_1|_{\text{máx}}}{|\mathbf{H}_1|_{\text{mín}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}} \tag{10.90}$$

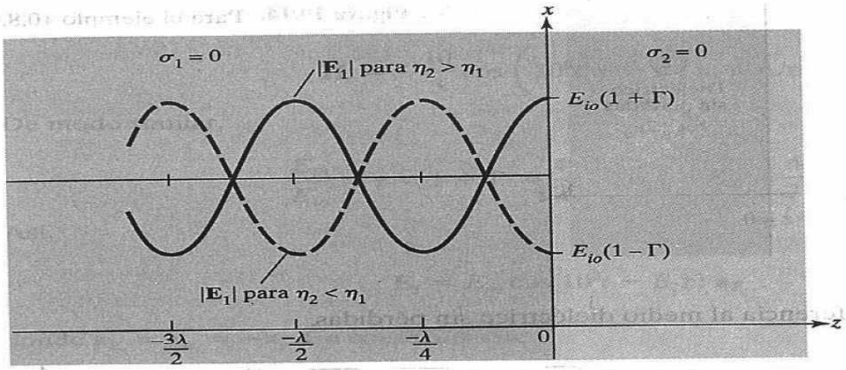


Figura 10.13. Ondas estacionarias debida a reflexión en una interfaz entre dos medios sin pérdidas; $\lambda = 2\pi/\beta_1$.

o

$$|\Gamma| = \frac{s-1}{s+1} \tag{10.91}$$

Puesto que $|\Gamma| \leq 1$ de ello se desprende que $1 \leq s \leq \infty$. La razón de onda estacionaria es adimensional y suele expresarse en decibeles (dB), de esta forma:

$$s \text{ en dB} = 20 \log_{10} s \tag{10.92}$$

Ejemplo 10.8

En el vacío ($z \leq 0$), una onda plana con

$$\mathbf{H} = 10 \cos (10^8 t - \beta z)\, \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

incide normalmente en un medio sin pérdidas ($\varepsilon = 2\varepsilon_o$, $\mu = 8\mu_o$) en la región $z \geq 0$. Determine la onda reflejada $\mathbf{H}_r$, $\mathbf{E}_r$ y la onda transmitida $\mathbf{H}_t$, $\mathbf{E}_t$.

Solución:
Este problema puede resolverse de dos maneras.

Método 1. Considérese que la figura 10.14 ilustra este problema. Con referencia al vacío,

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3}$$

$$\eta_1 = \eta_o = 120\pi$$

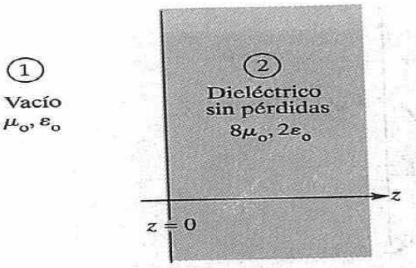


Figura 10.14. Para el ejemplo 10.8.

Con referencia al medio dieléctrico sin pérdidas,

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\cdot(4) = 4\beta_1 = \frac{4}{3}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 2\,\eta_o$$

Puesto que $\mathbf{H}_i = 10\cos(10^8t - \beta_1 z)\,\mathbf{a}_x$, es de esperar que

$$\mathbf{E}_i = E_{io}\cos(10^8t - \beta_1 z)\,\mathbf{a}_{E_i}$$

donde

$$\mathbf{a}_{E_i} = \mathbf{a}_{H_i} \times \mathbf{a}_{k_i} = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$$

y

$$E_{io} = \eta_1 H_{io} = 10\,\eta_o$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_i = -10\eta_o\cos(10^8t - \beta_1 z)\,\mathbf{a}_y \text{ mV/m}$$

Ahora bien,

$$\frac{E_{ro}}{E_{io}} = \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\eta_o - \eta_o}{2\eta_o + \eta_o} = \frac{1}{3}$$

$$E_{ro} = \frac{1}{3}E_{io}$$

Así

$$\mathbf{E}_r = -\frac{10}{3}\eta_o\cos\left(10^8t + \frac{1}{3}z\right)\mathbf{a}_y \text{ mV/m}$$

de donde es fácil obtener $\mathbf{H}_r$, en esta forma:

$$\mathbf{H}_r = -\frac{10}{3}\cos\left(10^8 t + \frac{1}{3}z\right)\mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

De modo similar,

$$\frac{E_{to}}{E_{io}} = \tau = 1 + \Gamma = \frac{4}{3} \qquad \text{o} \qquad E_{to} = \frac{4}{3}E_{io}$$

Así,

$$\mathbf{E}_t = E_{to}\cos(10^8 t - \beta_2 z)\,\mathbf{a}_{E_t}$$

donde $\mathbf{a}_{E_t} = \mathbf{a}_{E_i} = -\mathbf{a}_y$. En consecuencia,

$$\mathbf{E}_t = -\frac{40}{3}\eta_o\cos\left(10^8 t - \frac{4}{3}z\right)\mathbf{a}_y \text{ mV/m}$$

de lo que resulta

$$\mathbf{H}_t = \frac{20}{3}\cos\left(10^8 t - \frac{4}{3}z\right)\mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

Método 2. Opcionalmente, es posible obtener $\mathbf{H}_r$ y $\mathbf{H}_t$ directamente de $\mathbf{H}_i$ mediante

$$\frac{H_{ro}}{H_{io}} = -\Gamma \qquad \text{y} \qquad \frac{H_{to}}{H_{io}} = \tau\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

Así,

$$H_{ro} = -\frac{1}{3}H_{io} = -\frac{10}{3}$$

$$H_{to} = \frac{4}{3}\frac{\eta_o}{2\eta_o}\cdot H_{io} = \frac{2}{3}H_{io} = \frac{20}{3}$$

y

$$\mathbf{H}_r = -\frac{10}{3}\cos(10^8 t + \beta_1 z)\,\mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{20}{3}\cos(10^8 t - \beta_2 z)\,\mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

como se obtuvo antes.

Nótese que de esta forma quedan satisfechas en $z = 0$ las condiciones en la frontera,

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) = -\frac{40}{3}\eta_o\cos(10^8 t)\,\mathbf{a}_y$$

y

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t(0) = \frac{20}{3}\cos(10^8 t)\mathbf{a}_x$$

las cuales pueden utilizarse invariablemente para la comprobación cruzada de **E** y **H**.

Ejercicio 10.8

A 5 GHz, una onda plana uniforme $\mathbf{E}_{is} = 10e^{-j\beta z}\,\mathbf{a}_x$V/m en el vacío incide normalmente en una lámina dieléctrica sin pérdidas plana y de gran tamaño ($z > 0$) con $\varepsilon = 4\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$. Halle la onda reflejada $\mathbf{E}_{rs}$ y la onda transmitida $\mathbf{E}_{ts}$.

Respuesta: $-3.333\exp(j\beta_1 z)\,\mathbf{a}_x$ V/m, $6.667\exp(-j\beta_2 z)\,\mathbf{a}_x$ V/m, donde $\beta_2 = 2\beta_1 = 200\pi/3$.

Ejemplo 10.9

Dada una onda plana uniforme en el aire como

$$\mathbf{E}_i = 40\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_x + 30\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

a) Halle $\mathbf{H}_i$.
b) Si esta onda se encuentra con una placa perfectamente conductora normal al eje z en $z = 0$, halle la onda reflejada $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{H}_r$.
c) ¿Cuáles son los campos totales **E** y **H** en $z \leq 0$?
d) Calcule los vectores de Poynting promedio temporal en $z \leq 0$ y $z \geq 0$.

Solución:

a) Este problema se asemeja al formulado en el ejemplo 10.3. La onda puede descomponerse en dos ondas $\mathbf{E}_{i1}$ y $\mathbf{E}_{i2}$, donde

$$\mathbf{E}_{i1} = 40\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_x, \qquad \mathbf{E}_{i2} = 30\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_y$$

A la presión atmosférica, el aire tiene $\varepsilon_r = 1.0006 \simeq 1$. Así, es posible considerarlo como vacío. Sea $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i1} + \mathbf{H}_{i2}$.

$$\mathbf{H}_{i1} = H_{i1o}\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_{H_1}$$

donde

$$H_{i1o} = \frac{E_{i1o}}{\eta_o} = \frac{40}{120\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

$$\mathbf{a}_{H_1} = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

Por tanto,

$$\mathbf{H}_{i1} = \frac{1}{3\pi}\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_y$$

De igual forma,

$$\mathbf{H}_{i2} = H_{i2o}\,\text{sen}\,(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_{H_2}$$

donde

$$H_{i2o} = \frac{E_{i2o}}{\eta_o} = \frac{30}{120\pi} = \frac{1}{4\pi}$$

$$\mathbf{a}_{H_2} = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$

Así,

$$\mathbf{H}_{i2} = -\frac{1}{4\pi}\,\text{sen}\,(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_x$$

y

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i1} + \mathbf{H}_{i2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\,\text{sen}\,(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_x + \frac{1}{3\pi}\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Este problema también puede resolverse siguiendo el método 2 del ejemplo 10.3.

b) Puesto que el medio 2 es un conductor perfecto,

$$\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2} \gg 1 \quad \rightarrow \quad \eta_2 \ll \eta_1$$

esto es,

$$\Gamma = -1, \quad \tau = 0$$

lo que indica que los campos incidentes **E** y **H** son totalmente reflejados.

$$E_{ro} = \Gamma\,E_{io} = -E_{io}$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_r = -40\cos(\omega t + \beta z)\,\mathbf{a}_x - 30\,\text{sen}\,(\omega t + \beta z)\,\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

$\mathbf{H}_r$ puede hallarse a partir de $\mathbf{E}_r$ justo como se hizo en el inciso *a)* de este mismo ejemplo o a partir de $\mathbf{H}_i$ siguiendo el método 2 del ejemplo anterior. Cualquiera que sea el procedimiento, se obtiene

$$\mathbf{H}_r = \frac{1}{3\pi}\cos(\omega t + \beta z)\,\mathbf{a}_y - \frac{1}{4\pi}\,\text{sen}\,(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

c) Es posible demostrar que, en el aire, los campos totales

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r$$

pueden formar una onda estacionaria. En el conductor, los campos totales son

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t = 0, \qquad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t = 0.$$

d) En $z \leq 0$,

$$\mathcal{P}_{1\text{prom}} = \frac{|\mathbf{E}_{1s}|^2}{2\eta_1}\mathbf{a}_k = \frac{1}{2\eta_o}[E_{io}^2\mathbf{a}_z - E_{ro}^2\mathbf{a}_z]$$

$$= \frac{1}{240\pi}[(40^2 + 30^2)\mathbf{a}_z - (40^2 + 30^2)\mathbf{a}_z]$$

$$= 0$$

En $z \geq 0$,

$$\mathcal{P}_{2\text{prom}} = \frac{|\mathbf{E}_{2s}|^2}{2\eta_2}\mathbf{a}_k = \frac{E_{to}^2}{2\eta_2}\mathbf{a}_z = 0$$

porque la potencia incidente es reflejada en su totalidad.

Ejercicio 10.9

La onda plana $\mathbf{E} = 50 \text{ sen } (\omega t - 5x)\, \mathbf{a}_y$ V/m en un medio sin pérdidas ($\mu = 4\mu_o$, $\varepsilon = \varepsilon_o$) se encuentra con un medio disipativo ($\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$, $\sigma = 0.1$ mhos/m) normal al eje x en $x = 0$. Halle

a) Γ, τ y s

b) $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{H}_r$

c) $\mathbf{E}_t$ y $\mathbf{H}_t$

d) Los vectores de Poynting promedio temporal en ambas regiones.

Respuestas: *a)* $0.8186 \angle 171.1°$, $0.2295 \angle 33.56°$, 10.025, *b)* $40.93 \text{ sen } (\omega t + 5x + 171.9°)\, \mathbf{a}_y$ V/m, $-54.3 \text{ sen } (\omega t + 5x + 171.9°)\, \mathbf{a}_z$ mA/m, *c)* $11.47\, e^{-6.021x} \text{sen } (\omega t - 7.826x + 33.56°)\, \mathbf{a}_y$ V/m, $120.2\, e^{-6.021x}$ sen $(\omega t - 7.826x - 4.01°)\, \mathbf{a}_z$ mA/m y *d)* $0.5469\, \mathbf{a}_x$ W/m², $0.5469 \exp(-12.04x)\, \mathbf{a}_x$ W/m².

†10.9. Reflexión de una onda plana en incidencia oblicua

Consideremos ahora una situación más general que la descrita en la sección 10.8. Para simplificar el análisis, supondremos que tratamos con medios sin pérdidas. (Bastaría reemplazar ε por ε_c para prolongar el análisis a medios disipativos.) Es posible demostrar (véanse los problemas 10.14 y 10.15) que una onda plana uniforme adopta la forma general de

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_o \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ &= \text{Re}\,[E_o e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \end{aligned} \tag{10.93}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ es el radio o vector de posición y $\mathbf{k} = k_x\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y + k_z\mathbf{a}_z$ el *vector de número de onda* o *vector de propagación*; $\mathbf{k}$ sigue siempre la dirección de propagación de la onda. La magnitud de $\mathbf{k}$ se relaciona con ω de acuerdo con la relación de dispersión

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \tag{10.94}$$

En medios sin pérdidas, así, k es en esencia lo que β en las secciones anteriores. Dada la forma general de $\mathbf{E}$ de la ecuación (10.93), las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \tag{10.95a}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E} \tag{10.95b}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{10.95c}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{10.95d}$$

lo que indica que 1. $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{k}$ son mutuamente ortogonales y 2. $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ se sitúan en el plano

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$$

Con base en la ecuación (10.95*a*), el campo $\mathbf{H}$ correspondiente al campo $\mathbf{E}$ de la ecuación (10.93) es

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{a}_k \times \mathbf{E}}{\eta} \tag{10.96}$$

Habiendo expresado $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en forma general, consideremos ahora la incidencia oblicua de una onda plana uniforme en una frontera plana, como se ilustra en la figura 10.15*(a)*. El plano definido por el vector de propagación $\mathbf{k}$ y un vector unitario $\mathbf{a}_n$ normal a la frontera se llama *plano de incidencia*. El ángulo θ_i entre $\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}_n$ es el *ángulo de incidencia*.

También en este caso las ondas incidente y reflejada se encuentran en el medio 1, y la onda transmitida (o refractada) en el medio 2. Sea

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{io} \cos(k_{ix}x + k_{iy}y + k_{iz}z - \omega_i t) \tag{10.97a}$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{ro} \cos(k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z - \omega_r t) \tag{10.97b}$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{to} \cos(k_{tx}x + k_{ty}y + k_{tz}z - \omega_t t) \tag{10.97c}$$

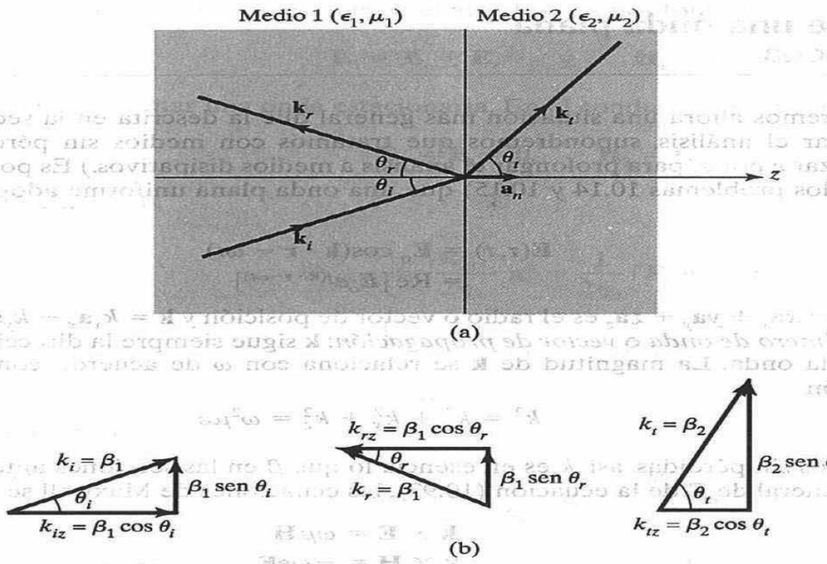


Figura 10.15. Incidencia oblicua de una onda plana: **(a)** ilustración de θ_i, θ_r y θ_t; **(b)** ilustración de las componentes normal y tangencial de **k**.

donde k_i, k_r y k_t con sus componentes normal y tangencial se muestran en la figura 10.15*(b)*. Puesto que la componente tangencial de **E** debe ser continua en la frontera $z = 0$,

$$\mathbf{E}_i(z = 0) + \mathbf{E}_r(z = 0) = \mathbf{E}_t(z = 0) \tag{10.98}$$

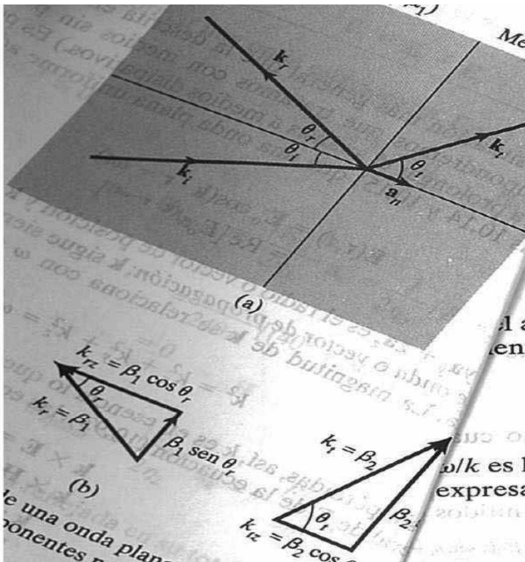
Para que las ondas representadas por la ecuación (10.97) cumplan esta condición en la frontera respecto de todas las x y y es indispensable que

1. $\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$
2. $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x$
3. $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y$

La condición 1 implica que la frecuencia no cambie. Las condiciones 2 y 3 (llamadas *condiciones de acoplamiento de fase*), requieren que las componentes tangenciales de los vectores de propagación sean continuas. Esto significa que los vectores de propagación $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_t$ y $\mathbf{k}_r$ deben situarse en el plano de incidencia. Así, por efecto de las condiciones 2 y 3,

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_r \operatorname{sen} \theta_r \tag{10.99}$$

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_t \operatorname{sen} \theta_t \tag{10.100}$$



reflexión y θ_t el *ángulo de transmisión*. Sin embargo, en el caso

$$k_i = k_r = \beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} \tag{10.101a}$$

$$k_t = \beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} \tag{10.101b}$$

(10.99) y (10.101a) se desprende claramente que

$$\boxed{\theta_r = \theta_i} \tag{10.102}$$

l ángulo de reflexión θ_r es igual al ángulo de incidencia θ_i, como en ópti-
ento asimismo en las ecuaciones (10.100) y (10.101),

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\operatorname{sen}\theta_i} = \frac{k_i}{k_t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} \tag{10.103}$$

ω/k es la velocidad de fase. La ecuación (10.103) es la conocida *ley de Snell*, la expresarse como

$$\boxed{n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t} \tag{10.104}$$

$n_1 = c\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = c/u_1$ y $n_2 = c\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = c/u_2$ son los *índices de refracción* de los s.

on base en estas generalidades preliminares sobre la incidencia oblicua, considere-
dos casos especiales: uno en el que el campo $\mathbf{E}$ es perpendicular al plano de inciden-
y otro en el que el campo $\mathbf{E}$ es paralelo a ese plano. Cualquier otra polarización
resenta una combinación lineal de estos dos casos.

A. Polarización paralela

Este caso se ilustra en la figura 10.16, en la que el campo $\mathbf{E}$ se ubica en el plano xz, el plano de incidencia. Situados en el medio 1, los campos incidente y reflejado están dados por

$$\mathbf{E}_{is} = E_{io}(\cos\theta_i\,\mathbf{a}_x - \operatorname{sen}\theta_i\,\mathbf{a}_z)\,e^{-j\beta_1(x\operatorname{sen}\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{10.105a}$$

$$\mathbf{H}_{is} = \frac{E_{io}}{\eta_1}\,e^{-j\beta_1(x\operatorname{sen}\theta_i + z\cos\theta_i)}\,\mathbf{a}_y \tag{10.105b}$$

$$\mathbf{E}_{rs} = E_{ro}(\cos\theta_r\,\mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_r\,\mathbf{a}_z)e^{-j\beta_1(x\operatorname{sen}\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{10.106a}$$

$$\mathbf{H}_{rs} = -\frac{E_{ro}}{\eta_1}\,e^{-j\beta_1(x\operatorname{sen}\theta_r - z\cos\theta_r)}\,\mathbf{a}_y \tag{10.106b}$$

donde $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$. Repárese detenidamente en la forma como se llegó a cada componente de estos campos. La clave en la deducción de sus componentes es obtener en primer término el vector de polarización $\mathbf{k}$ de las ondas incidente, reflejada y transmitida, como se muestra en la figura 10.15(b). Una vez conocido $\mathbf{k}$, se define $\mathbf{E}_s$

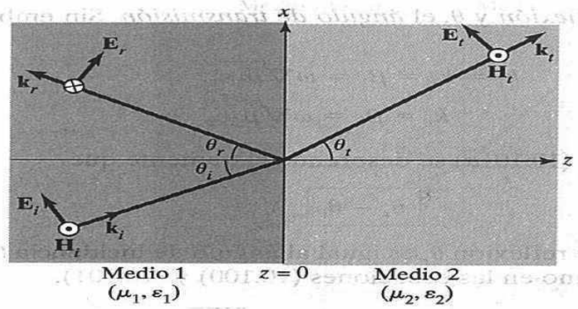


Figura 10.16. Incidencia oblicua en la que **E** es paralela al plano de incidencia.

de manera que $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$ o $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_s = 0$, tras de lo cual se obtiene $\mathbf{H}_s$ a partir de $\mathbf{H}_s = \dfrac{\mathbf{k}}{\omega\mu} \times \mathbf{E}_s = \mathbf{a}_k \times \dfrac{\mathbf{E}_s}{\eta}$.

Situados a su vez en el medio 2, los campos transmitidos están dados por

$$\mathbf{E}_{ts} = E_{to}(\cos\theta_t\,\mathbf{a}_x - \operatorname{sen}\theta_t\,\mathbf{a}_z)\,e^{-j\beta_2(x\operatorname{sen}\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{10.107a}$$

$$\mathbf{H}_{ts} = \frac{E_{to}}{\eta_2}\,e^{-j\beta_2(x\operatorname{sen}\theta_t + z\cos\theta_t)}\,\mathbf{a}_y \tag{10.107b}$$

donde $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$. Si nuestro supuesto sobre las direcciones relativas referidas en las ecuaciones (10.105) a (10.107) es erróneo, el resultado final nos lo indicará por medio de su signo.

De la imposición de la condiciones de que $\theta_r = \theta_i$ y de que las componentes tangenciales de **E** y **H** sean continuas en la frontera $z = 0$ se obtiene

$$(E_{io} + E_{ro})\cos\theta_i = E_{to}\cos\theta_t \tag{10.108a}$$

$$\frac{1}{\eta}(E_{io} - E_{ro}) = \frac{1}{\eta_2}E_{to} \tag{10.108b}$$

La expresión de $\mathbf{E}_{ro}$ y $\mathbf{E}_{to}$ en términos de $\mathbf{E}_{io}$ produce

$$\boxed{\Gamma_\parallel = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}} \tag{10.109a}$$

o

$$E_{ro} = \Gamma_\parallel E_{io} \tag{10.109b}$$

y

$$\boxed{\tau_\parallel = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}} \tag{10.110a}$$

o

$$E_{to} = \tau_{\|} E_{io} \tag{10.110b}$$

Las ecuaciones (10.109) y (10.110) son las *ecuaciones de Fresnel*. Cabe referir que estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones (10.81) y (10.82) cuando $\theta_i = \theta_t = 0$, como es de esperar. Puesto que θ_i y θ_t se relacionan conforme a la ley de Snell, formulada en la ecuación (10.103), las ecuaciones (10.109) y (10.110) pueden expresarse en términos de θ_i sustituyendo

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_t} = \sqrt{1 - (u_2/u_1)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i} \tag{10.111}$$

Con base en las ecuaciones (10.109) y (10.110) es fácil demostrar que

$$1 + \Gamma_{\|} = \tau_{\|} \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) \tag{10.112}$$

La ecuación (10.109*a*) evidencia que es posible que $\Gamma_{\|} = 0$, porque el numerador es la diferencia de dos términos. En estas condiciones no hay reflexión ($E_{ro} = 0$), y el ángulo incidente en el que esto ocurre se llama *ángulo de Brewster* $\theta_{B_{\|}}$ o *ángulo de polarización*, puesto que una onda incidente arbitrariamente polarizada se reflejará con sólo la componente de **E** perpendicular al plano de incidencia. El efecto de Brewster se aprovecha en tubos láser para controlar la polarización de la luz emitida mediante la colocación de cristales de cuarzo en el ángulo de Brewster. Este ángulo se obtiene disponiendo que $\theta_i = \theta_{B_{\|}}$ cuando $\Gamma_{\|} = 0$ en la ecuación (10.109); es decir,

$$\eta_2 \cos \theta_t = \eta_1 \cos \theta_{B_{\|}}$$

o

$$\eta_2^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_t) = \eta_1^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_{B_{\|}})$$

La introducción de la ecuación (10.103) o (10.104) resulta en

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \theta_{B_{\|}} = \frac{1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2}{1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2}} \tag{10.113}$$

Por su valor práctico, conviene considerar el caso en que, además de carecer de pérdidas, los medios dieléctricos son no magnéticos; esto es, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$. En esta situación, la ecuación (10.113) se convierte en

$$\operatorname{sen}^2 \theta_{B_{\|}} = \frac{1}{1 + \varepsilon_1/\varepsilon_2} \rightarrow \operatorname{sen} \theta_{B_{\|}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

o

$$\tan \theta_{B_{\|}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{10.114}$$

lo que indica que cualquier combinación de ε_1 y ε_1 produce un ángulo de Brewster.

B. Polarización perpendicular

En este caso, el campo **E** es perpendicular al plano de incidencia (el plano xz), como se ilustra en la figura 10.17, aunque también podría decirse que en esta situación el campo **H** es paralelo al plano de incidencia. Los campos incidente y reflejado en el medio 1 están dados por

$$\mathbf{E}_{is} = E_{io} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_i + z \cos \theta_i)}\, \mathbf{a}_y \tag{10.115a}$$

$$\mathbf{H}_{is} = \frac{E_{io}}{\eta_1} (-\cos \theta_i\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen} \theta_i\, \mathbf{a}_z)\, e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_i + z \cos \theta_i)} \tag{10.115b}$$

$$\mathbf{E}_{rs} = E_{ro} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)}\, \mathbf{a}_y \tag{10.116a}$$

$$\mathbf{H}_{rs} = \frac{E_{ro}}{\eta_1} (\cos \theta_r\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen} \theta_r\, \mathbf{a}_z)\, e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)} \tag{10.116b}$$

mientras que los campos transmitidos en el medio 2 están dados por

$$\mathbf{E}_{ts} = E_{to} e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)}\, \mathbf{a}_y \tag{10.117a}$$

$$\mathbf{H}_{ts} = \frac{E_{to}}{\eta_2} (-\cos \theta_t\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen} \theta_t\, \mathbf{a}_z)\, e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)} \tag{10.117b}$$

Nótese que la definición de las componentes de campos en las ecuaciones (10.115) a (10.117) satisface las ecuaciones (10.95) de Maxwell. Al imponer esta vez las condiciones de que las componentes tangenciales de **E** y **H** sean continuas en $z = 0$ y de que θ_r sea igual a θ_i se obtiene

$$E_{io} + E_{ro} = E_{to} \tag{10.118a}$$

$$\frac{1}{\eta_1} (E_{io} - E_{ro}) \cos \theta_i = \frac{1}{\eta_2} E_{to} \cos \theta_t \tag{10.118b}$$

La expresión de E_{ro} y E_{to} en términos de E_{io} produce

$$\boxed{\Gamma_\perp = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}} \tag{10.119a}$$

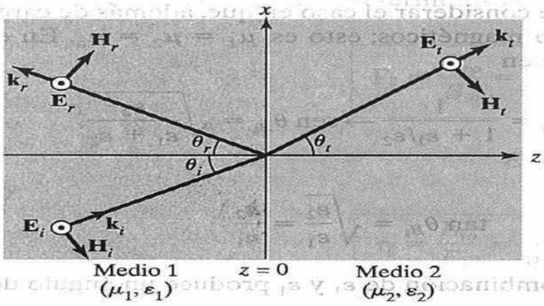


Figura 10.17. Incidencia oblicua en la que **E** es perpendicular al plano de incidencia.

o

$$E_{ro} = \Gamma_\perp E_{io} \tag{10.119b}$$

y

$$\boxed{\tau_\perp = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}} \tag{10.120a}$$

o

$$E_{to} = \tau_\perp E_{io} \tag{10.120b}$$

las *ecuaciones de Fresnel* para polarización perpendicular. Con fundamento en las ecuaciones (10.119) y (10.120) es fácil demostrar que

$$1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp \tag{10.121}$$

ecuación semejante a la ecuación (10.83) para incidencia normal. Asimismo, cuando $\theta_i = \theta_t = 0$, las ecuaciones (10.119) y (10.120) se convierten en las ecuaciones (10.81) y (10.82), como debe ser.

En el caso en que no hay reflexión, $\Gamma_\perp = 0$ (o $E_r = 0$), lo que equivale al caso de transmisión total ($\tau_\perp = 1$). Al reemplazar θ_i por el correspondiente ángulo de Brewster $\theta_{B_\perp}$ se obtiene

$$\eta_2 \cos\theta_{B_\perp} = \eta_1 \cos\theta_t$$

o

$$\eta_2^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_{B_\perp}) = \eta_1^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_t)$$

La incorporación de la ecuación (10.104) resulta en

$$\operatorname{sen}^2 \theta_{B_\perp} = \frac{1 - \mu_1\varepsilon_2/\mu_2\varepsilon_1}{1 - (\mu_1/\mu_2)^2} \tag{10.122}$$

En medios no magnéticos ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$), $\operatorname{sen}^2 \theta_{B_\perp} \to \infty$ en la ecuación (10.122), de modo que no existe $\theta_{B_\perp}$, ya que el seno de un ángulo nunca es mayor que la unidad. Asimismo, si $\mu_1 \neq \mu_2$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, la ecuación (10.122) se reduce a

$$\operatorname{sen} \theta_{B_\perp} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

o

$$\tan \theta_{B_\perp} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \tag{10.123}$$

Aunque posible en teoría, esta situación es rara en la práctica.

Ejemplo 10.10 Una onda electromagnética se desplaza en el vacío con la componente de campo eléctrico

$$\mathbf{E}_s = 100\, e^{j(0.866y + 0.5z)}\, \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

Determine

a) ω y λ.

b) La componente de campo magnético.

c) La potencia promedio temporal en la onda.

Solución:

a) Al comparar el **E** dado con

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_o\, e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = E_o e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}\mathbf{a}_x$$

resulta claro que

$$k_x = 0, \qquad k_y = 0.866, \qquad k_z = 0.5$$

Así,

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{(0.866)^2 + (0.5)^2} = 1$$

Pero en el vacío,

$$k = \beta = \omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_o} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por tanto,

$$\omega = kc = 3 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi = 6.283 \text{ m}$$

b) A partir de la ecuación (10.96), el campo magnético correspondiente está dado por

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\mu\omega}\,\mathbf{k} \times \mathbf{E}_s$$

$$= \frac{(0.866\mathbf{a}_y + 0.5\mathbf{a}_z)}{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8} \times 100\, \mathbf{a}_x e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

o

$$\mathbf{H}_s = (1.33\, \mathbf{a}_y - 2.3\, \mathbf{a}_z)\, e^{j(0.866y + 0.5z)} \text{ mA/m}$$

c) La potencia promedio temporal es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\,(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) = \frac{E_o^2}{2\eta}\,\mathbf{a}_k$$

$$= \frac{(100)^2}{2(120\pi)}\,(0.866\, \mathbf{a}_y + 0.5\, \mathbf{a}_z)$$

$$= 11.49\, \mathbf{a}_y + 6.631\, \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$$

Ejercicio 10.10

Repita el ejemplo 10.10 si

$$\mathbf{E} = (10\,\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)\cos(\omega t + 2y - 4z)\ \text{V/m}$$

en el vacío.

Respuestas: *a)* 1.342 × 10^9 rad/s, 1.405 m, *b)* $-29.66\cos(1.342 \times 10^9 t + 2y - 4z)$ $\mathbf{a}_x$ mA/m y *c)* $-0.07415\,\mathbf{a}_y + 0.1489\,\mathbf{a}_z$ W/m^2.

Ejemplo 10.11

Una onda plana uniforme en el aire con

$$\mathbf{E} = 8\cos(\omega t - 4x - 3z)\,\mathbf{a}_y\ \text{V/m}$$

incide en una lámina dieléctrica ($z \geq 0$) con $\mu_r = 1.0$, $\varepsilon_r = 2.5$, $\sigma = 0$. Halle

a) La polarización de la onda.
b) El ángulo de incidencia.
c) El campo **E** reflejado.
d) El campo **H** transmitido.

Solución:

a) Del campo **E** incidente se desprende claramente que el vector de propagación es

$$\mathbf{k}_i = 4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z \rightarrow k_i = 5 = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o} = \frac{\omega}{c}$$

Por tanto,

$$\omega = 5c = 15 \times 10^8\ \text{rad/s}$$

Un vector unitario normal a la interfaz ($z = 0$) es $\mathbf{a}_z$. El plano que contiene a **k** y $\mathbf{a}_z$ es y = constante, el cual es el plano xz, el plano de incidencia. Puesto que $\mathbf{E}_i$ es normal a este plano, la polarización es perpendicular (como la representada en la figura 10.17).
b) Los vectores de propagación se ilustran en la figura 10.18, donde es evidente que

$$\tan\theta_i = \frac{k_{ix}}{k_{iz}} = \frac{4}{3} \rightarrow \theta_i = 53.13°$$

Opcionalmente, y prescindiendo de la figura 10.18, θ_i puede obtenerse del hecho de que es el ángulo entre **k** y $\mathbf{a}_n$; es decir,

$$\cos\theta_i = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_n = \left(\frac{4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z}{5}\right)\cdot\mathbf{a}_z = \frac{3}{5}$$

o

$$\theta_i = 53.13°$$

c) Para determinar $\mathbf{E}_r$ bastaría recurrir a la ecuación (10.116*a*), ya que este problema es similar al planteado en el apartado B de la sección 10.9. Pero si suponemos que no estamos al tanto de ello, sea

$$\mathbf{E}_r = E_{ro} \cos(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}_y$$

el cual es de forma semejante el $\mathbf{E}_i$ dado. Se ha elegido aquí el vector unitario $\mathbf{a}_y$ en consideración del hecho de que la componente tangencial de $\mathbf{E}$ debe ser continua en la interfaz. Con base en la figura 10.18,

$$\mathbf{k}_r = k_{rx}\,\mathbf{a}_x - k_{rz}\,\mathbf{a}_z$$

donde

$$k_{rx} = k_r \operatorname{sen}\theta_r, \qquad k_{rz} = k_r \cos\theta_r$$

No obstante, $\theta_r = \theta_i$ y $k_r = k_i = 5$, puesto que tanto k_r como k_i se encuentran en el mismo medio. De ahí que

$$k_r = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z$$

Para hallar E_{ro} se precisa de θ_t. De acuerdo con la ley de Snell

$$\operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_i = \frac{c\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}{c\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}\operatorname{sen}\theta_i$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 53.13^\circ}{\sqrt{2.5}}$$

o

$$\theta_t = 30.39^\circ$$

$$\Gamma_\perp = \frac{E_{ro}}{E_{io}}$$

$$= \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

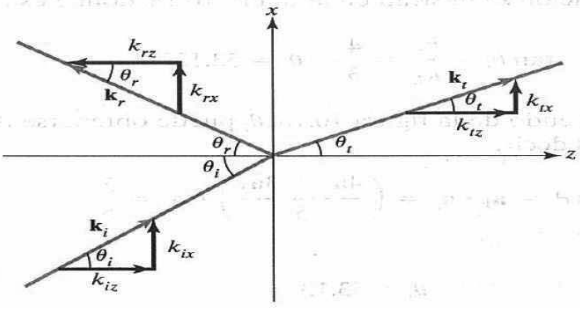


Figura 10.18. Vectores de propagación del ejemplo 10.11.

donde $\eta_1 = \eta_o = 377$, $\quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_o \mu_{r_2}}{\varepsilon_o \varepsilon_{r_2}}} = \frac{377}{\sqrt{2.5}} = 238.4$

$$\Gamma_\perp = \frac{238.4 \cos 53.13^\circ - 377 \cos 30.39^\circ}{238.4 \cos 53.13^\circ + 377 \cos 30.39^\circ} = -0.389$$

Por tanto,

$$E_{ro} = \Gamma_\perp E_{io} = -0.398\ (8) = -3.112$$

y

$$\mathbf{E}_r = -3.112 \cos (15 \times 10^8 t - 4x + 3z)\ \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

d) De igual manera, sea el campo eléctrico transmitido

$$\mathbf{E}_t = E_{to} \cos (\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})\ \mathbf{a}_y$$

donde

$$k_t = \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_{r_2} \varepsilon_{r_2}}$$

$$= \frac{15 \times 10^8}{3 \times 10^8} \sqrt{1 \times 2.5} = 7.906$$

Con base en la figura 10.18,

$$k_{tx} = k_t \operatorname{sen} \theta_t = 4$$
$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t = 6.819$$

o

$$\mathbf{k}_t = 4\mathbf{a}_x + 6.819\ \mathbf{a}_z$$

Nótese que $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$, como era de esperar.

$$\tau_\perp = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$= \frac{2 \times 238.4 \cos 53.13^\circ}{238.4 \cos 53.13^\circ + 377 \cos 30.39^\circ}$$

$$= 0.611$$

El mismo resultado podría obtenerse de la relación $\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp$. Así,

$$E_{to} = \tau_\perp E_{io} = 0.611 \times 8 = 4.888$$

$$\mathbf{E}_t = 4.888 \cos (15 \times 10^8 t - 4x - 6.819z)\ \mathbf{a}_y$$

$\mathbf{H}_t$ se obtiene fácilmente de $\mathbf{E}_t$ en esta forma

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{\mu_2 \omega} \mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t = \frac{\mathbf{a}_{k_t} \times \mathbf{E}_t}{\eta_2}$$

$$= \frac{4\mathbf{a}_x + 6.819\mathbf{a}_z}{7.906\,(238.4)} \times 4.888\ \mathbf{a}_y \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

$$\mathbf{H}_t = (-17.69\ \mathbf{a}_x + 10.37\ \mathbf{a}_z)\cos(15\times 10^8 t - 4x - 6.819z)\ \text{mA/m}.$$

Ejercicio 10.11

Si la onda plana descrita en el ejercicio 10.10 incide en un medio dieléctrico con $\sigma = 0$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$ y ocupa $z \geq 0$, calcule

a) Los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión.
b) Los coeficientes de reflexión y transmisión.
c) El campo **E** total en el vacío.
d) El campo **E** total en el dieléctrico.
e) El ángulo de Brewster.

Respuestas: *a)* 26.56°, 26.56°, 12.92°, *b)* –0.295, 0.647, *c)* $(10\ \mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)\cos(\omega t + 2y - 4z) + (-2.946\mathbf{a}_y + 1.473\ \mathbf{a}_z)\cos(\omega t + 2y + 4z)$ V/m y *d)* $(7.055\mathbf{a}_y + 1.618\mathbf{a}_z)\cos(\omega t + 2y - 8.718z)$ V/m, *e)* 63.43°.

Resumen

1. La ecuación de onda es de la forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

con la solución

$$\Phi = A \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

donde u = velocidad de onda, A = amplitud de onda, ω = frecuencia angular (= $2\pi f$) y β = constante de fase. Asimismo, $\beta = \omega/u = 2\pi/\lambda$ o $u = f\lambda = \lambda/T$, donde λ = longitud de onda y T = periodo.

2. En un medio disipativo sin carga, la ecuación de onda basada en las ecuaciones de Maxwell es de la forma

$$\nabla^2 \mathbf{A}_s - \gamma^2 \mathbf{A}_s = 0$$

donde $\mathbf{A}_s$ es $\mathbf{E}_s$ o $\mathbf{H}_s$ y $\gamma = \alpha + j\beta$ es la constante de propagación. Si suponemos que $\mathbf{E}_s = E_{xs}(z)\ \mathbf{a}_x$, se obtienen ondas electromagnéticas de la forma

$$\mathbf{E}(z,t) = E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\ \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H}(z,t) = H_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)\ \mathbf{a}_y$$

donde α = constante de atenuación, β = constante de fase, $\eta = |\eta| \underline{/\theta_\eta}$ = impedancia intrínseca del medio. El recíproco de α es la profundidad pelicular ($\delta = 1/\alpha$). La relación entre β, ω y λ formulada anteriormente también es válida para ondas electromagnéticas.

3. De la propagación de ondas en medios disipativos puede deducirse la que ocurre en otros tipos de medios, casos especiales de aquél. En el vacío, $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$; en medios dieléctricos sin pérdidas, $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ y $\mu = \mu_o \mu_r$, y en buenos conductores $\sigma \simeq \infty$, $\varepsilon = \varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$ o $\sigma/\omega\varepsilon \to 0$.
4. Un medio puede ser dieléctrico disipativo, dieléctrico sin pérdidas o buen conductor dependiendo de su tangente de pérdida, dada por

$$\tan\theta = \frac{|\mathbf{J}_s|}{|\mathbf{J}_{d_s}|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

donde $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$ es la permitividad compleja del medio. En dieléctricos sin pérdidas, $\tan\theta \ll 1$; en buenos conductores, $\tan\theta \gg 1$, y en dieléctricos disipativos $\tan\theta$ es del orden de la unidad.

5. En un buen conductor, los campos tienden a concentrarse en la distancia inicial δ considerada desde la superficie del conductor. Este fenómeno se llama *efecto pelicular*. En el caso de un conductor de anchura w y longitud ℓ, la resistencia efectiva o en corriente alterna es

$$R_{\text{ca}} = \frac{\ell}{\sigma w \delta}$$

donde δ es la profundidad pelicular.

6. El vector de Poynting, $\mathcal{P}$, es el vector de flujo de potencia, de dirección igual a la de la propagación de la onda y de magnitud igual a la de la potencia que fluye por una unidad de área normal a su dirección.

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \qquad \mathcal{P}_{\text{prom}} = 1/2\ \text{Re}\,(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*)$$

7. Si una onda plana procedente del medio 1 incide en forma normal en el medio 2, el coeficiente de reflexión Γ y el coeficiente de transmisión τ están dados por

$$\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \qquad \tau = \frac{E_{to}}{E_{io}} = 1 + \Gamma$$

La razón de onda estacionaria, s, se define como

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

8. En el caso de incidencia oblicua de un medio sin pérdidas 1 a un medio sin pérdidas 2, los coeficientes de Fresnel son

$$\Gamma_{\|} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}, \qquad \tau_{\|} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

donde α = constante de atenuación, β = constante de fase, $\eta = |\eta| \angle \theta_\eta$ = impedancia intrínseca del medio. El recíproco de α es la profundidad pelicular ($\delta = 1/\alpha$). La relación entre β, ω y λ formulada anteriormente también es válida para ondas electromagnéticas.

3. De la propagación de ondas en medios disipativos puede deducirse la que ocurre en otros tipos de medios, casos especiales de aquél. En el vacío, $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$; en medios dieléctricos sin pérdidas, $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ y $\mu = \mu_o \mu_r$, y en buenos conductores $\sigma \simeq \infty$, $\varepsilon = \varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$ o $\sigma/\omega\varepsilon \to 0$.
4. Un medio puede ser dieléctrico disipativo, dieléctrico sin pérdidas o buen conductor dependiendo de su tangente de pérdida, dada por

$$\tan\theta = \frac{|\mathbf{J}_s|}{|\mathbf{J}_{d_s}|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

donde $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$ es la permitividad compleja del medio. En dieléctricos sin pérdidas, $\tan\theta \ll 1$; en buenos conductores, $\tan\theta \gg 1$, y en dieléctricos disipativos $\tan\theta$ es del orden de la unidad.

5. En un buen conductor, los campos tienden a concentrarse en la distancia inicial δ considerada desde la superficie del conductor. Este fenómeno se llama *efecto pelicular*. En el caso de un conductor de anchura w y longitud ℓ, la resistencia efectiva o en corriente alterna es

$$R_{\text{ca}} = \frac{\ell}{\sigma w \delta}$$

donde δ es la profundidad pelicular.

6. El vector de Poynting, $\mathcal{P}$, es el vector de flujo de potencia, de dirección igual a la de la propagación de la onda y de magnitud igual a la de la potencia que fluye por una unidad de área normal a su dirección.

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \qquad \mathcal{P}_{\text{prom}} = 1/2 \, \text{Re}\,(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*)$$

7. Si una onda plana procedente del medio 1 incide en forma normal en el medio 2, el coeficiente de reflexión Γ y el coeficiente de transmisión τ están dados por

$$\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \qquad \tau = \frac{E_{to}}{E_{io}} = 1 + \Gamma$$

La razón de onda estacionaria, s, se define como

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

8. En el caso de incidencia oblicua de un medio sin pérdidas 1 a un medio sin pérdidas 2, los coeficientes de Fresnel son

$$\Gamma_{\|} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}, \qquad \tau_{\|} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

c) La amplitud de onda es de 10 V/m.
d) El número de onda $k = 0.33$ rad/m.
e) La onda se atenúa al desplazarse.

10.5. Puesto que $\mathbf{H} = 0.5\, e^{-0.1x}$ sen $(10^6 t - 2x)\ \mathbf{a}_z$ A/m, ¿cuáles de los enunciados siguientes son incorrectos?

a) $\alpha = 0.1$ Np/m.
b) $\beta = -2$ rad/m.
c) $\omega = 10^6$ rad/s.
d) La onda se desplaza a lo largo de $\mathbf{a}_x$.
e) La onda está polarizada en la dirección de z.
f) El periodo de la onda es de 1 μs.

10.6. ¿Cuál es el principal factor para determinar si un medio es vacío, dieléctrico sin pérdidas, dieléctrico disipativo o buen conductor?

a) Constante de atenuación.
b) Parámetros constitutivos $(\sigma, \varepsilon, \mu)$.
c) Tangente de pérdida.
d) Coeficiente de reflexión.

10.7. En cierto medio, $\mathbf{E} = 10 \cos (10^8 t - 3y)\ \mathbf{a}_x$ V/m. ¿Qué tipo de medio es?

a) Vacío.
b) Dieléctrico perfecto.
c) Dieléctrico sin pérdidas.
d) Conductor perfecto.

10.8. Las ondas electromagnéticas se desplazan con mayor rapidez en conductores que en dieléctricos.

a) Cierto.
b) Falso.

10.9. En un buen conductor, **E** y **H** comparten la misma fase temporal.

a) Cierto.
b) Falso.

10.10. El vector de Poynting denota físicamente la densidad de potencia que sale o entra a un volumen dado en un campo variable en el tiempo.

a) Cierto.
b) Falso.

Respuestas: 10.1*b*, 10.2*d*, *f*, 10.3*a*, 10.4*b*, *c*, 10.5*b*, *f*, 10.6*c*, 10.7*c*, 10.8*b*, 10.9*b*, 10.10*a*.

Problemas

10.1. Una onda electromagnética que se progaga en cierto medio está descrita por

$$\mathbf{E} = 25 \text{ sen } (2\pi \times 10^6 t - 6x)\, \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

a) Determine la dirección de propagación de la onda.
b) Calcule el periodo T, la longitud de onda λ y la velocidad u.
c) Trace la onda en $t = 0$, $T/8$, $T/4$, $T/2$.

10.2. *a)* Deduzca las ecuaciones (10.23) y (10.24) de las ecuaciones (10.18) y (10.20).
b) Emplee la ecuación (10.29) en combinación con las ecuaciones de Maxwell para demostrar que

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

c) Deduzca del inciso b) las ecuaciones (10.32) y (10.33).

10.3. A 50 MHz, un material dieléctrico disipativo se caracteriza por $\varepsilon = 3.6\varepsilon_o$, $\mu = 2.1\mu_o$ y $\sigma = 0.08$ S/m. Si $\mathbf{E}_s = 6e^{-\gamma x}\, \mathbf{a}_z$ V/m, calcule: *a)* γ, *b)* λ, *c)* u, *d)* η, *e)* $\mathbf{H}_s$.

10.4. Un material disipativo tiene $\mu = 5\mu_o$, $\varepsilon = 2\varepsilon_o$. Si a 5 MHz la constante de fase es de 10 rad/m, calcule

a) La tangente de pérdida.
b) La conductividad del material.
c) La permitividad compleja.
d) La constante de atenuación.
e) La impedancia intrínseca.

10.5. Un medio no magnético tiene una impedancia intrínseca de $\angle 30°\ \Omega$. Halle su

a) Tangente de pérdida.
b) Constante dieléctrica.
c) Permitividad compleja.
d) Constante de atenuación a 1 MHz.

10.6. La amplitud de una onda que se desplaza a través de un medio disipativo no magnético se reduce 18% cada metro. Si la onda opera a 10 MHz y el campo eléctrico se adelanta 24° al campo magnético, calcule: *a)* la constante de propagación, *b)* la longitud de onda, *c)* la profundidad pelicular, *d)* la conductividad del medio.

10.7. El agua de mar desempeña una función vital en el estudio de las comunicaciones submarinas. Suponga que respecto del agua de mar $\sigma = 4$ S/m, $\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ y $f = 100$ MHz, calcule: *a)* la velocidad de fase, *b)* la longitud de onda, *c)* la profundidad pelicular, *d)* la impedancia intrínseca.

10.8. En cierto medio con $\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$,

$$\mathbf{H} = 12e^{-0.1y} \text{ sen } (\pi \times 10^8 t - \beta y)\, \mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

Determine: *a)* el periodo T de la onda, *b)* la longitud de onda λ, *c)* el campo eléctrico $\mathbf{E}$, *d)* la diferencia de fase entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$.

10.9. En cierto medio,

$$\mathbf{E} = 16e^{-0.05x} \text{ sen } (2 \times 10^8 t - 2x)\, \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Halle: *a)* la constante de propagación, *b)* la longitud de onda, *c)* la velocidad de la onda, *d)* la profundidad pelicular.

10.10. Una onda uniforme en el aire tiene

$$\mathbf{E} = 10 \cos (2\pi \times 10^6 t - \beta z)\, \mathbf{a}_y$$

a) Calcule β y λ.

b) Trace la onda en $z = 0, \lambda/4$.

c) Halle **H**.

10.11. La componente del campo magnético de una onda electromagnética que se propaga a través de un medio no magnético ($\mu = \mu_o$) es

$$\mathbf{H} = 25 \text{ sen } (2 \times 10^8 t + 6x)\, \mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Determine:

a) La dirección de propagación de la onda.

b) La permitividad del medio.

c) La intensidad de campo eléctrico.

10.12. Si $\mathbf{H} = 10 \text{ sen } (\omega t - 4z)\mathbf{a}_x$ mA/m en un material en el cual $\sigma = 0$, $\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$, calcule ω, λ y $\mathbf{J}_d$.

10.13. Un fabricante produce un ferrito con $\mu = 750\mu_o$, $\varepsilon = 5\varepsilon_o$ y $\sigma = 10^{-6}$ S/m a 10 MHz.

a) ¿Clasificaría usted este material como un medio sin pérdidas, disipativo o conductor?

b) Calcule β y λ.

c) Determine la diferencia de fase entre dos puntos separados por 2 m.

d) Halle la impedancia intrínseca.

***10.14.** Tras suponer los campos dependientes del tiempo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}_o e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, donde $\mathbf{k} = k_x\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y + k_z\mathbf{a}_z$ es el vector de número de onda y $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ el vector de radio, demuestre que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ puede expresarse como $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H}$ y deduzca $\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H$.

10.15. Suponga los mismos campos descritos en el problema 10.14 y demuestre que en una región sin fuente las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse como

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

Deduzca de estas ecuaciones

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_H = -\mathbf{a}_E$$

10.16. La componente del campo magnético de una onda plana en un dieléctrico sin pérdidas es

$$\mathbf{H} = 30 \text{ sen } (2\pi \times 10^8 t - 5x)\, \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

a) Si $\mu_r = 1$, halle ε_r.
b) Calcule la longitud de onda y la velocidad de onda.
c) Determine la impedancia de la onda.
d) Determine la polarización de la onda.
e) Halle la correspondiente componente del campo eléctrico.
f) Halle la densidad de corriente de desplazamiento.

10.17. En un medio no magnético,

$$\mathbf{E} = 50 \cos (10^9 t - 8x)\, \mathbf{a}_y + 40 \text{ sen } (10^9 t - 8x)\, \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Halle la constante dieléctrica ε_r y el $\mathbf{H}$ correspondiente.

10.18. En cierto medio

$$\mathbf{E} = 10 \cos (2\pi \times 10^7 t - \beta x)(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

Si $\mu = 50\mu_o$, $\varepsilon = 2\varepsilon_o$ y $\sigma = 0$, halle β y $\mathbf{H}$.

10.19. ¿Cuál de los medios siguientes podría considerarse conductor a 8 MHz?

a) Tierra pantanosa húmeda ($\varepsilon = 15\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$, $\sigma = 10^{-2}$ S/m).
b) Germanio intrínseco ($\varepsilon = 16\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$, $\sigma = 0.025$ S/m).
c) Agua de mar ($\varepsilon = 81\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$, $\sigma = 25$ S/m).

10.20. Calcule la profundidad pelicular y la velocidad de propagación de una onda plana uniforme que se desplaza en cloruro polivinílico ($\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 4$, $\tan \theta_\eta = 7 \times 10^{-2}$) a una frecuencia de 6 MHz.

10.21. Una onda plana uniforme en un medio disipativo tiene una constante de fase de 1.6 rad/m a 10^7 Hz, en tanto que su magnitud se reduce 60% por cada 2 m recorridos. Halle la profundidad pelicular y la velocidad de la onda.

10.22. *a)* Determine la resistencia en corriente directa de un cable redondo de cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 1$) de 1.2 mm de radio y 600 m de longitud.
b) Halle la resistencia en corriente alterna a 100 MHz.
c) Calcule la frecuencia aproximada en la que las resistencias en corriente directa y en corriente alterna son iguales.

10.23. Un tubo de aluminio ($\sigma = 3.5 \times 10^7$ S/m, $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 1$) de 40 m de largo con radios interno y externo de 9 y 12 mm porta una corriente total de 6 sen $10^6 \pi t$ A. Halle la profundidad pelicular y la resistencia efectiva del tubo.

10.24. Demuestre que en un buen conductor la profundidad pelicular δ es siempre mucho menor que la longitud de onda.

10.25. Las guías de ondas de cobre suelen recubrirse de plata para reducir pérdidas. Si el grosor mínimo de la plata ($\mu = \mu_o$, $\varepsilon = \varepsilon_o$, $\sigma = 6.1 \times 10^7$ S/m) debe ser de 5δ, determine el grosor mínimo requerido para una guía de ondas que opere a 12 GHz.

10.26. Una onda plana uniforme en un medio disipativo no magnético tiene

$$\mathbf{E}_s = (5\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y)e^{-\gamma z}, \gamma = 0.2 + j3.4/\text{m}.$$

a) Calcule la magnitud de la onda en $z = 4$ m.

b) Halle la pérdida en dB sufrida por la onda en el intervalo $0 < z < 3$ m.

c) Calcule el vector de Poynting en $z = 4$, $t = T/8$. Adopte $\omega = 10^8$ rad/s.

10.27. En un material no magnético,

$$\mathbf{H} = 30 \cos (2\pi \times 10^8 t - 6x)\ \mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Halle: *a)* la impedancia intrínseca, *b)* el vector de Poynting, *c)* la potencia promedio temporal que atraviesa la superficie $x = 1$, $0 < y < 2$, $0 < z < 3$ m.

***10.28.** Demuestre que las ecuaciones (10.67) y (10.68) son equivalentes.

10.29. En una línea de transmisión ocupada por un dieléctrico sin pérdidas ($\varepsilon = 4.5\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$),

$$\mathbf{E} = \frac{40}{\rho} \text{sen } (\omega t - 2z)\ \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$$

Determine: *a)* ω y **H**, *b)* el vector de Poynting, *c)* la potencia promedio temporal total que atraviesa la superficie $z = 1$ m, 2 mm $< \rho < 3$ mm, $0 < \phi < 2\pi$.

10.30. *a)* Con relación a una incidencia normal en la interfaz dieléctrico-dieléctrico en la que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$, R y T son los coeficientes de reflexión y transmisión de potencias promedio, es decir $P_{r,\text{prom}} = RP_{i,\text{prom}}$ y $P_{t,\text{prom}} = TP_{i,\text{prom}}$. Compruebe que

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{y} \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de reflexión de los medios.

b) Determine la razón n_1/n_2 de manera que las ondas reflejada y transmitida tengan la misma potencia promedio.

10.31. La onda plana $\mathbf{E} = 30 \cos(\omega t - z)\mathbf{a}_x$ V/m en el aire incide normalmente en un medio sin pérdidas ($\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$) en $z = 0$. *a)* Halle Γ, τ y s. *b)* Calcule los campos eléctrico y magnético reflejados.

10.32. Una onda plana uniforme en el aire con

$$\mathbf{H} = 4 \text{ sen } (\omega t - 5x)\ \mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

incide normalmente en una región de plástico con los parámetros $\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$ y $\sigma = 0$. *a)* Obtenga el campo eléctrico total en el aire. *b)* Calcule la densidad de potencia promedio temporal en la región de plástico. *c)* Halle la razón de onda estacionaria.

10.33. Una onda plana en el vacío con $\mathbf{E} = 3.6 \cos(\omega t - 3x)\, \mathbf{a}_y$ V/m incide normalmente en una interfaz en $x = 0$. Si en $x \geq 0$ existe un medio sin pérdidas con $\sigma = 0$, $\varepsilon_r = 12.5$ y la onda reflejada tiene $\mathbf{H}_r = -1.2 \cos(\omega t + 3x)\, \mathbf{a}_z$ mA/m, halle μ_2.

10.34. La región 1 es un medio sin pérdidas en el que $y \geq 0$, $\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$, mientras que la región 2 es vacío, $y \leq 0$. Si en la región 1 existe una onda plana $\mathbf{E} = 5 \cos(10^8 t + \beta y)\, \mathbf{a}_z$ V/m, halle: *a)* la componente del campo eléctrico total de la onda en la región 2, *b)* el vector de Poynting promedio temporal en la región 1, *c)* el vector de Poynting promedio temporal en la región 2.

10.35. Una onda plana en el vacío ($z \leq 0$) incide normalmente en un gran bloque de material con $\varepsilon_r = 12$, $\mu_r = 3$, $\sigma = 0$ que ocupa $z \geq 0$. Si el campo eléctrico incidente es

$$\mathbf{E} = 30 \cos(\omega t - z)\, \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

halle: *a)* ω, *b)* la razón de onda estacionaria, *c)* el campo magnético reflejado, *d)* la densidad de potencia promedio de la onda transmitida.

10.36. Una onda plana uniforme a 30 MHz con

$$\mathbf{H} = 10 \text{ sen } (\omega t + \beta x)\, \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

existe en la región $x \geq 0$ con $\sigma = 0$, $\varepsilon = 9\varepsilon_o$, $\mu = 4\mu_o$. En $x = 0$, la onda se encuentra con vacío. Determine *a)* la polarización de la onda, *b)* la constante de fase β, *c)* la densidad de corriente de desplazamiento en la región $x \geq 0$, *d)* los campos magnéticos reflejado y transmitido, y *e)* la densidad de potencia promedio en cada región.

10.37. Una onda plana uniforme en el aire incide en forma normal en un material dieléctrico sin pérdidas infinito con $\varepsilon = 3\varepsilon_o$ y $\mu = \mu_o$. Si la onda incidente es $\mathbf{E}_i = 10 \cos(\omega t - z)\, \mathbf{a}_y$ V/m, determine:

a) λ y ω de la onda en el aire y la onda transmitida en el medio dieléctrico.

b) El campo incidente $\mathbf{H}_i$.

c) Γ y τ.

d) El campo eléctrico total y la potencia promedio temporal en ambas regiones.

***10.38.** Una señal en el aire ($z \geq 0$) con la componente del campo eléctrico

$$\mathbf{E} = 10 \text{ sen } (\omega t + 3z)\, \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

incide normalmente en la superficie del océano en $z = 0$, como se ilustra en la figura 10.19. Suponga que la superficie del océano es lisa y que en ese medio $\varepsilon = 80\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$, $\sigma = 4$ mhos/m, determine

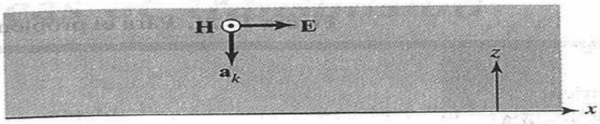
a) ω.

b) La longitud de onda de la señal en el aire.

c) La tangente de pérdida e impedancia intrínseca del océano.

d) El campo **E** reflejado y transmitido.

10.39. Trace la onda estacionaria representada por la ecuación (10.87) en $t = 0$, $T/8$, $T/4$, $3T/8$, $T/2$, etc., donde $T = 2\pi/\omega$.



Océano

$\varepsilon = 80\varepsilon_o, \mu = \mu_o, \sigma = 4$

Figura 10.19. Para el problema 10.38.

10.40. Una onda plana uniforme incide en un ángulo $\theta_i = 45°$ en un par de láminas dieléctricas unidas, como se muestra en la figura 10.20. Determine los ángulos de transmisión θ_{t1} y θ_{t2} en las láminas.

10.41. Demuestre que el campo

$$\mathbf{E}_s = 20 \text{ sen } (k_x x) \cos (k_y y)\ \mathbf{a}_z$$

donde $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o$, puede representarse como la superposición de cuatro ondas planas móviles. Halle el $\mathbf{H}_s$ correspondiente.

10.42. Demuestre que, en medios dieléctricos no magnéticos, los coeficientes de reflexión y transmisión para incidencia oblicua se convierten en

$$\Gamma_\parallel = \frac{\tan (\theta_t - \theta_i)}{\tan (\theta_t + \theta_i)}, \qquad \tau_\parallel = \frac{2 \cos \theta_i \text{ sen } \theta_t}{\text{sen } (\theta_t + \theta_i) \cos (\theta_t - \theta_i)}$$

$$\Gamma_\perp = \frac{\text{sen } (\theta_t - \theta_i)}{\text{sen } (\theta_t + \theta_i)}, \qquad \tau_\perp = \frac{2 \cos \theta_i \text{ sen } \theta_t}{\text{sen } (\theta_t + \theta_i)}$$

***10.43.** Una onda de polarización paralela en el aire incide

$$\mathbf{E} = (8\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z) \text{ sen } (\omega t - 4y - 3z) \text{ V/m}$$

en la mitad del dieléctrico, como se observa en la figura 10.21. Halle: *a)* el ángulo de incidencia θ_i, *b)* el promedio del tiempo en el aire ($\mu = \mu_o$, $\varepsilon = \varepsilon_o$), *c)* los campos **E** reflejado y transmitido.

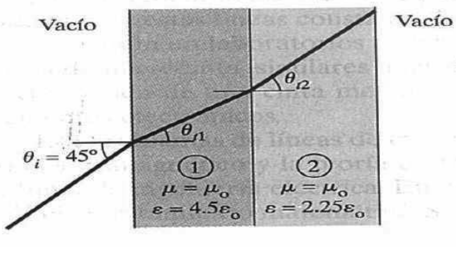


Figura 10.20. Para el problema 10.40.

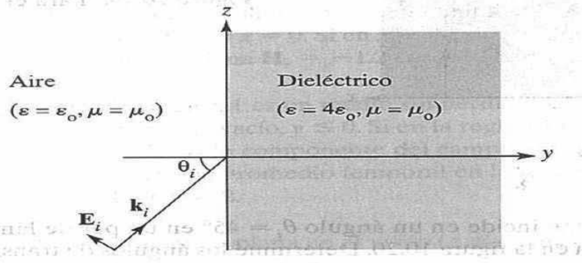


Figura 10.21. Para el problema 10.43.

10.44. En un medio dieléctrico ($\varepsilon = 9\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$), una onda plana con

$$\mathbf{H} = 0.2 \cos (10^9 t - kx - k\sqrt{8}z)\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

incide en una frontera de aire en $z = 0$. Halle

a) θ_r y θ_t

b) k

c) La longitud de onda en el dieléctrico y en el aire.

d) El $\mathbf{E}$ incidente.

e) El $\mathbf{E}$ transmitido y reflejado.

f) El ángulo de Brewster.

***10.45.** Una onda plana en el aire con

$$\mathbf{E} = (8\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) \text{ sen } (\omega t + 3x - 4y) \text{ V/m}$$

incide en una lámina de cobre en $y \geq 0$. Halle ω y la onda reflejada. Suponga que el cobre es un conductor perfecto. (*Pista*: Escriba las componentes de los campos en ambos medios e iguale las condiciones en la frontera.)

10.46. Una onda polarizada en el aire incide en poliestireno, con $\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 2.6\varepsilon$, en el ángulo de Brewster. Determine el ángulo de transmisión.

11 Líneas de transmisión

Había una vez cuatro hombres llamados Alguien, Cualquiera, Todos y Nadie. Alguien, Cualquiera y Nadie pidieron a Todos hacer algo importante. Todos confió en que Alguien lo haría y Cualquiera habría podido hacerlo, pero finalmente Nadie lo hizo. Eso molestó a Alguien, porque Todos debía haberlo hecho. Todos pensó que Cualquiera podía hacerlo, pero Nadie se dio cuenta de que Todos no lo haría. En fin, Todos culpó a Alguien, cuando en realidad Nadie hizo lo que Cualquiera habría podido hacer.

ANÓNIMO

11.1. Introducción

En el capítulo anterior nos ocupamos de la propagación de ondas en medios ilimitados, de extensión infinita. De tal propagación se dice que carece de guía, ya que la onda plana uniforme se expande en el espacio y la energía electromagnética asociada con ella se difunde sobre un área extensa. La propagación de ondas en medios ilimitados es distintiva de la transmisión de señales de radio y televisión, cuya información se destina a todos los interesados. Sin embargo, tales medios de propagación no son adecuados para la conversación telefónica, la cual implica una recepción privativa de información.

Potencia o información también puede transmitirse por medio de estructuras guiadas, las que dirigen la propagación de energía de la fuente a la carga. Las líneas de transmisión y las guías de ondas son los ejemplos más comunes de tales estructuras. Estudiaremos las primeras en este capítulo y las segundas en el siguiente.

Las líneas de transmisión son de uso frecuente en la distribución de potencia (a bajas frecuencias) y las comunicaciones (a altas frecuencias). En redes de computadoras como ethernet e Internet se emplean líneas de transmisión como cables de par trenzado y coaxiales.

Una línea de transmisión se compone básicamente de dos o más conductores paralelos que conectan una fuente con una carga. La fuente puede ser un generador hidroeléctrico, un transmisor o un oscilador, y la carga una fábrica, una antena o un osciloscopio, respectivamente. La líneas de transmisión más usuales son el cable coaxial, la línea de dos alambres, la línea plana o de placas paralelas, un alambre sobre un plano conductor y la línea de microcinta, las cuales se presentan en la figura 11.1. Como puede observarse, cada una de estas líneas consta de dos conductores en paralelo. Los cables coaxiales son de uso común en laboratorios eléctricos y para la conexión de televisores a antenas. Las líneas de microcinta [similares a las de la figura 11.1(*e*)], propias de circuitos integrados, se componen de una cinta metálica engastada en un sustrato dieléctrico para conectar elementos electrónicos.

Los problemas de líneas de transmisión suelen resolverse mediante la teoría del campo electromagnético y la teoría de los circuitos eléctricos, principales teorías en las que se funda la ingeniería eléctrica. En este capítulo se utilizará la teoría de los circuitos, de más fácil tratamiento matemático. Se aplicarán asimismo los conceptos básicos de propa-

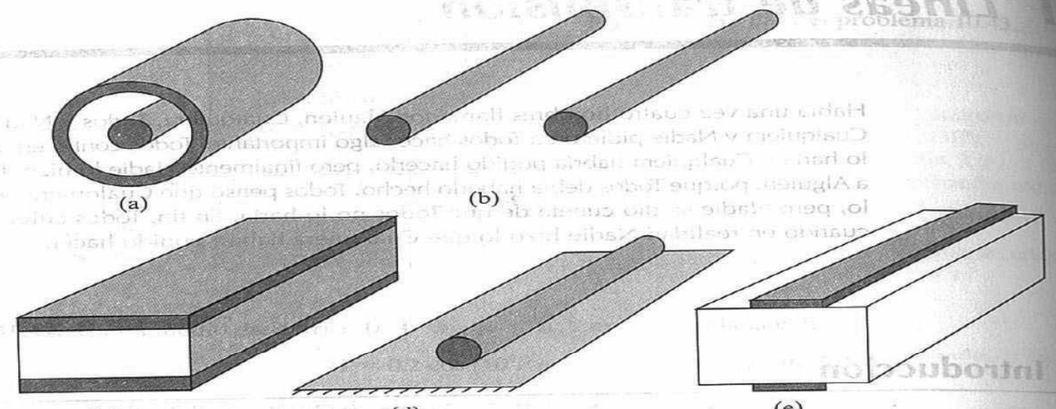


Figura 11.1. Vista de la sección transversal de líneas de transmisión comunes: **(a)** línea coaxial, **(b)** línea de dos alambres, **(c)** línea plana, **(d)** alambre sobre un plano conductor, **(e)** línea de microcinta.

gación de ondas (como constante de propagación, coeficiente de reflexión y razón de onda estacionaria) expuestos en el capítulo anterior.

Nuestro análisis incluirá la deducción de ecuaciones y cantidades características de líneas de transmisión, el uso del diagrama de Smith, aplicaciones prácticas y transitorios en líneas de transmisión.

11.2. Parámetros de las líneas de transmisión

Una línea de transmisión se describe habitual y útilmente en términos de sus parámetros: resistencia por unidad de longitud R, inductancia por unidad de longitud L, conductancia por unidad de longitud G y capacitancia por unidad de longitud C. Cada línea de la figura 11.1 posee fórmulas específicas para la determinación de R, L, G y C; las de las líneas coaxial, de dos alambres y plana se proporcionan en la tabla 11.1, mientras que en la figura 11.2 se indican sus dimensiones. Algunas de las fórmulas[1] referidas en la tabla 11.1 se dedujeron de los capítulos 6 y 8. Cabe señalar que

1. Los parámetros R, L, G y C no son discretos ni globales, sino distribuidos, como se muestra en la figura 11.3. Esto significa que están distribuidos uniformemente a todo lo largo de la línea.

[1] Fórmulas similares para otros tipos de líneas de transmisión pueden obtenerse en manuales de ingeniería o libros de datos como M. A. R. Guston, *Microwave Transmission-line Impedance Data*, Van Nostrand Reinhold, Londres, 1972.

Tabla 11.1. Parámetros distribuidos de líneas de transmisión a altas frecuencias.*

Parámetros	*Línea coaxial*	*Línea de dos alambres*	*Línea plana*
R (Ω/m)	$\dfrac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left[\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right]$ $(\delta \ll a, c-b)$	$\dfrac{1}{\pi a\delta\sigma_c}$ $(\delta \ll a)$	$\dfrac{2}{w\delta\sigma_c}$ $(\delta \ll t)$
L (H/m)	$\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\dfrac{d}{2a}$	$\dfrac{\mu d}{w}$
G (S/m)	$\dfrac{2\pi\sigma}{\ln\dfrac{b}{a}}$	$\dfrac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\dfrac{d}{2a}}$	$\dfrac{\sigma w}{d}$
C (F/m)	$\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{b}{a}}$	$\dfrac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}\dfrac{d}{2a}}$	$\dfrac{\varepsilon w}{d}$ $(w \gg d)$

$*\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}}$ = profundidad pelicular del conductor; $\cosh^{-1}\dfrac{d}{2a} \simeq \ln\dfrac{d}{a}$ si $\left[\dfrac{d}{2a}\right]^2 \gg 1$.

2. Los conductores de cada línea se caracterizan por σ_c, μ_c y $\varepsilon_c = \varepsilon_o$, en tanto que el dieléctrico homogéneo que los separa se caracteriza por σ, μ y ε.
3. $G \neq 1/R$; R es la resistencia en corriente alterna por unidad de longitud de los conductores que integran la línea y G la conductancia por unidad de longitud debida al medio dieléctrico que los separa.
4. El valor de L referido en la tabla 11.1 es la inductancia externa por unidad de longitud, es decir $L = L_{\text{ext}}$. Los efectos de la inductancia interna L_{in} $(= R/\omega)$ son insignificantes a altas frecuencias, en las que opera la mayor parte de los sistemas de comunicación.
5. En cada línea,

$$LC = \mu\varepsilon \quad \text{y} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{11.1}$$

En previsión de la siguiente sección, considérese la propagación de una onda electromagnética a través de una línea de transmisión de dos conductores como la línea coaxial que conecta a un generador o fuente con una carga en la figura 11.4*(a)*. Cuando el interruptor S se cierra, el conductor interno se vuelve positivo respecto del externo, de modo que

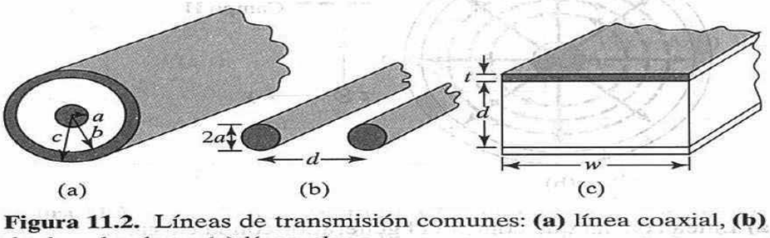


Figura 11.2. Líneas de transmisión comunes: **(a)** línea coaxial, **(b)** línea de dos alambres, **(c)** línea plana.

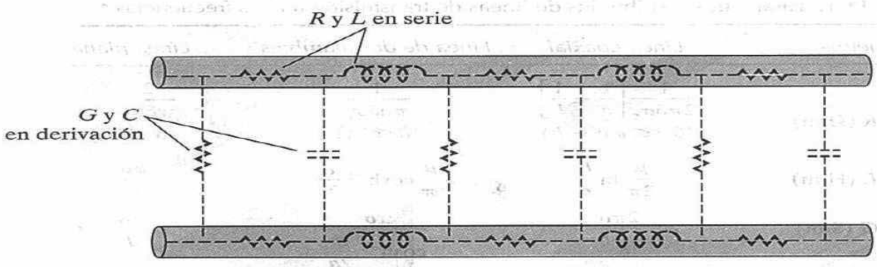


Figura 11.3. Parámetros distribuidos de una línea de transmisión de dos conductores.

el campo **E** irradia hacia fuera, como se ilustra en la figura 11.4*(b)*. En ésta también se muestra que, de acuerdo con la ley de Ampère, el campo **H** circunda al conductor portador de corriente. El vector de Poynting (**E** × **H**) apunta a lo largo de la línea de transmisión. Así, el cierre del interruptor causa sencillamente una perturbación que adopta la forma de onda electromagnética transversal (ET), la cual se propaga a lo largo de la línea. Esta onda es una onda plana no uniforme por medio de la cual se transmite potencia a través de la línea.

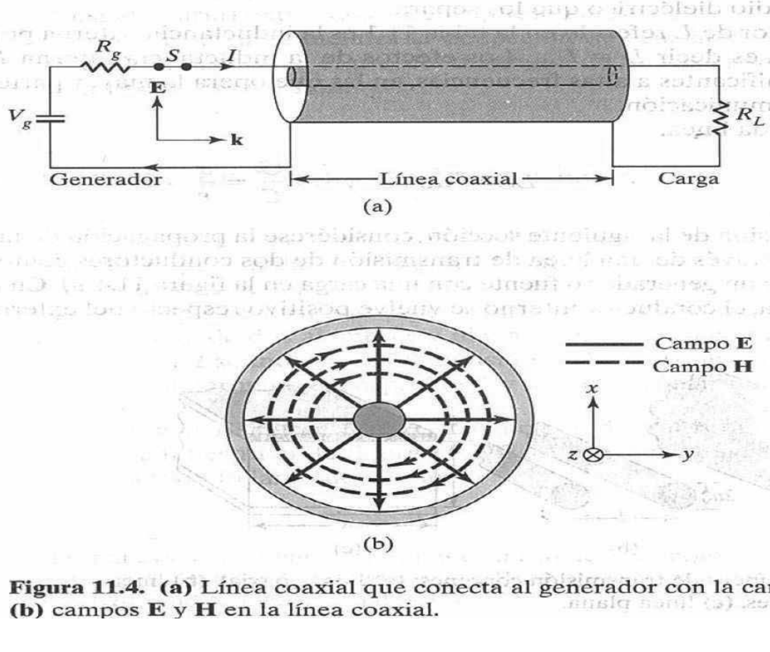


Figura 11.4. **(a)** Línea coaxial que conecta al generador con la carga; **(b)** campos **E** y **H** en la línea coaxial.

11.3. Ecuaciones de línea de transmisión

Como se mencionó en la sección anterior, una línea de transmisión de dos conductores soporta una onda ET; es decir, los campos eléctrico y magnético en la línea son transversales a la dirección de propagación de la onda. Una propiedad importante de las ondas ET es que los campos **E** y **H** se relacionan en forma específica con el voltaje V y la corriente I, respectivamente:

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \qquad I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \tag{11.2}$$

Así pues, en la resolución de problemas de líneas de transmisión emplearemos las cantidades de circuitos V e I en lugar de las cantidades de campos **E** y **H** (es decir, en vez de las ecuaciones de Maxwell y las condiciones en la frontera). El modelo de circuitos es en este caso más simple y práctico.

Examinemos una porción incremental de longitud Δz de una línea de transmisión de dos conductores. El propósito es hallar un circuito equivalente a esta línea y deducir las ecuaciones de línea de transmisión. De la figura 11.3 se desprende que el circuito que aparece en la figura 11.5 es el circuito equivalente a una porción de la línea. Este modelo hace suyos los parámetros R, L, G y C de las líneas de transmisión y puede representar a cualquiera de las líneas de dos conductores de la figura 11.3. Llamado *circuito equivalente tipo L*, este modelo no es el único posible; hay otros (véase el problema 11.1). En él se supone que la onda se propaga a lo largo de la dirección $+z$, del generador a la carga.

De la aplicación de la ley del voltaje de Kirchhoff a la espira externa del circuito de la figura 11.5 se obtiene

$$V(z, t) = R\,\Delta z\, I(z, t) + L\,\Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + V(z + \Delta z, t)$$

o

$$-\frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = R\, I(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \tag{11.3}$$

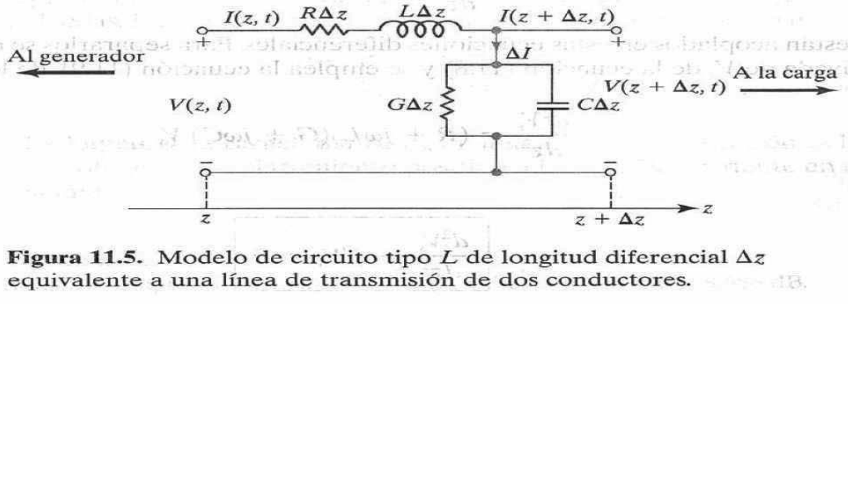


Figura 11.5. Modelo de circuito tipo L de longitud diferencial Δz equivalente a una línea de transmisión de dos conductores.

La adopción del límite de la ecuación (11.3) cuando $\Delta z \to 0$ produce

$$\boxed{-\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = RI(z,t) + L\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}} \tag{11.4}$$

De igual manera, la aplicación de la ley de la corriente de Kirchhoff al nodo principal del circuito de la figura 11.5 da como resultado

$$\begin{aligned} I(z,t) &= I(z+\Delta z, t) + \Delta I \\ &= I(z+\Delta z,t) + G\,\Delta z\,V(z+\Delta z,t) + C\,\Delta z\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

o

$$-\frac{I(z+\Delta z,t) - I(z,t)}{\Delta z} = G\,V(z+\Delta z,t) + C\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t} \tag{11.5}$$

Cuando $\Delta z \to 0$, la ecuación (11.5) se convierte en

$$\boxed{-\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = G\,V(z,t) + C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}} \tag{11.6}$$

Si suponemos dependencia de tiempo armónico de tal forma que

$$V(z,t) = \text{Re}\,[V_s(z)\,e^{j\omega t}] \tag{11.7a}$$

$$I(z,t) = \text{Re}\,[I_s(z)\,e^{j\omega t}] \tag{11.7b}$$

donde $V_s(z)$ y $I_s(z)$ son las formas de fasor de $V(z,t)$ e $I(z,t)$, respectivamente, las ecuaciones (11.4) y (11.6) se convierten en

$$-\frac{dV_s}{dz} = (R + j\omega L)\,I_s \tag{11.8}$$

$$-\frac{dI}{dz} = (G + j\omega C)\,V_s \tag{11.9}$$

V_s y I_s están acoplados en estas ecuaciones diferenciales. Para separarlos se obtiene la segunda derivada de V_s de la ecuación (11.8) y se emplea la ecuación (11.9), de lo que resulta

$$\frac{d^2V_s}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\,V_s$$

o

$$\boxed{\frac{d^2V_s}{dz^2} - \gamma^2 V_s = 0} \tag{11.10}$$

donde

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} \tag{11.11}$$

Al obtener a su vez la segunda derivada de I_s de la ecuación (11.9) y emplear la ecuación (11.8) resulta

$$\frac{d^2 I_s}{dz^2} - \gamma^2 I_s = 0 \tag{11.12}$$

Cabe hacer notar que las ecuaciones (11.10) y (11.12) —las ecuaciones de onda para voltaje y corriente, respectivamente— son de forma similar a la de las ecuaciones de onda para ondas planas (10.17) y (10.19). En nuestra notación usual, así, en la ecuación (11.11) γ es la constante de propagación (por metro), α la constante de atenuación (en nepers por metro o decibeles[2] por metro) y β la constante de fase (en radianes por metro). La longitud de onda λ y la velocidad de onda u están dadas respectivamente por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.13}$$

$$\boxed{u = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda} \tag{11.14}$$

La solución de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (11.10) y (11.12) es semejante al caso B del ejemplo 6.5,

$$V_s(z) = \underset{\longrightarrow +z}{V_o^+ e^{-\gamma z}} + \underset{-z \longleftarrow}{V_o^- e^{\gamma z}} \tag{11.15}$$

e

$$I_s(z) = \underset{\longrightarrow +z}{I_o^+ e^{-\gamma z}} + \underset{-z \longleftarrow}{I_o^- e^{\gamma z}} \tag{11.16}$$

donde V_o^+, V_o^-, I_o^+ e I_o^- son amplitudes de onda y los signos + y − denotan que la onda se desplaza a lo largo de la dirección $+z$ y $-z$, respectivamente, como lo indican asimismo las flechas. De este modo, la expresión instantánea del voltaje es

$$\begin{aligned} V(z, t) &= \text{Re}\,[V_s(z)\, e^{j\omega t}] \\ &= V_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \end{aligned} \tag{11.17}$$

La **impedancia característica** Z_o de una línea de transmisión es la razón de la onda de voltaje de desplazamiento positivo a la onda de corriente en cualquier punto en la línea.

---
[2] Recuérdese que, de acuerdo con la ecuación (10.35), 1 Np = 8.686 dB.

Z_o es análoga a η, la impedancia intrínseca del medio de propagación de la onda. Al sustituir las ecuaciones (11.15) y (11.16) en las ecuaciones (11.8) y (11.9) e igualar los coeficientes de los términos $e^{\gamma z}$ y $e^{-\gamma z}$ se obtiene

$$Z_o = \frac{V_o^+}{I_o^+} = \frac{-V_o^-}{I_o^-} = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + j\omega C} \tag{11.18}$$

o

$$\boxed{Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = R_o + jX_o} \tag{11.19}$$

donde R_o y X_o son las partes real e imaginaria de Z_o. R_o no debe confundirse con R: ésta se mide en ohms por metro, y R_o en ohms. La constante de propagación γ y la impedancia característica Z_o son propiedades importantes de la línea, porque ambas dependen de los parámetros R, L, G y C y la frecuencia de operación. El recíproco de Z_o es la admitancia característica Y_o, es decir $Y_o = 1/Z_o$.

La línea de transmisión considerada hasta aquí es del tipo *disipativo*, ya que los conductores que la componen son imperfectos ($\sigma_c \neq \infty$) y el dieléctrico en el que están inmersos es disipativo ($\sigma \neq 0$). Habiendo descrito este caso general, examinemos ahora dos casos especiales: los de las líneas de transmisión sin pérdidas y sin distorsión.

A. Línea sin pérdidas ($R = 0 = G$)

Una **línea de transmisión sin pérdidas** consta de conductores perfectos ($\sigma_c \approx \infty$) y medio dieléctrico sin pérdidas ($\sigma \simeq 0$).

Como se desprende claramente de la tabla 11.1, cuando $\sigma_c \simeq \infty$ y $\sigma \simeq 0$,

$$\boxed{R = 0 = G} \tag{11.20}$$

condición necesaria de una línea sin pérdidas. Respecto de una línea de este tipo, así, la ecuación (11.20) convierte las ecuaciones (11.11), (11.14) y (11.19) en

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \tag{11.21a}$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = f\lambda \tag{11.21b}$$

$$X_o = 0, \qquad Z_o = R_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{11.21c}$$

B. Línea sin distorsión ($R/L = G/C$)

Una señal consiste normalmente en una banda de frecuencias; en una línea disipativa, la amplitud de onda de componentes a distinta frecuencia se atenuará de diferente manera, puesto que α depende de la frecuencia. Esto resulta en distorsión.

> Una **línea sin distorsión** es aquella en la que la constante de atenuación α es independiente de la frecuencia y la constante de fase β linealmente dependiente de la frecuencia.

De acuerdo con la expresión general de α y β [referida en la ecuación (11.11)], una línea sin distorsión es consecuencia de que los parámetros adopten la forma siguiente

$$\boxed{\frac{R}{L} = \frac{G}{C}} \tag{11.22}$$

En una línea sin distorsión, así,

$$\gamma = \sqrt{RG\left(1 + \frac{j\omega L}{R}\right)\left(1 + \frac{j\omega C}{G}\right)}$$

$$= \sqrt{RG}\left(1 + \frac{j\omega C}{G}\right) = \alpha + j\beta$$

o

$$\alpha = \sqrt{RG}, \qquad \beta = \omega\sqrt{LC} \tag{11.23a}$$

lo que indica que mientras que α no depende de la frecuencia, β es una función lineal de la frecuencia. De igual modo

$$Z_o = \sqrt{\frac{R(1 + j\omega L/R)}{G(1 + j\omega C/G)}} = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_o + jX_o$$

o

$$R_o = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad X_o = 0 \tag{11.23b}$$

y

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = f\lambda \tag{11.23c}$$

Adviértase que

1. La velocidad de fase es independiente de la frecuencia, a causa de que la constante de fase β depende linealmente de la frecuencia. A menos que α y u sean independientes de la frecuencia, la forma de las señales sufrirá distorsión.
2. u y Z_o son iguales que en las líneas sin pérdidas.

Tabla 11.2. Características de las líneas de transmisión.

Caso	*Constante de propagación* $\gamma = \alpha + j\beta$	*Impedancia característica* $Z_o = R_o + jX_o$
General	$\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$	$\sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$
Sin pérdidas	$0 + j\omega\sqrt{LC}$	$\sqrt{\dfrac{L}{C}} + j0$
Sin distorsión	$\sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$	$\sqrt{\dfrac{L}{C}} + j0$

3. Una línea sin pérdidas carece también de distorsión, pero una línea sin distorsión no necesariamente carece de pérdidas. Las líneas sin pérdidas son deseables en la transmisión de potencia, en tanto que las líneas telefónicas deben ser líneas sin distorsión.

En la tabla 11.2 se presenta un resumen del contenido de esta sección. Nuestro análisis se restringirá casi exclusivamente a líneas de transmisión sin pérdidas.

Ejemplo 11.1

Una línea en el aire tiene impedancia característica de 70 Ω y constante de fase de 3 rad/m a 100 MHz. Calcule su inductancia por metro y capacitancia por metro.

Solución:

Una línea en el aire puede considerarse una línea sin pérdidas, ya que $\sigma \simeq 0$. Por tanto

$$R = 0 = G \quad \text{y} \quad \alpha = 0$$

$$Z_o = R_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{11.1.1}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \tag{11.1.2}$$

La división de la ecuación (11.1.1) entre la ecuación (11.1.2) produce

$$\frac{R_o}{\beta} = \frac{1}{\omega C}$$

o

$$C = \frac{\beta}{\omega R_o} = \frac{3}{2\pi \times 100 \times 10^6(70)} = 68.2 \text{ pF/m}$$

A partir de la ecuación (11.1.1),

$$L = R_o^2 C = (70)^2(68.2 \times 10^{-12}) = 334.2 \text{ nH/m}$$

Ejercicio 11.1

Una línea de transmisión que opera a 500 MHz tiene $Z_o = 80\ \Omega$, $\alpha = 0.04$ Np/m, $\beta = 1.5$ rad/m. Halle sus parámetros R, L, G y C.

Respuesta: 3.2 Ω/m, 38.2 nH/m, 5×10^{-4} S/m, 5.97 pF/m.

Ejemplo 11.2

Una línea sin distorsión tiene $Z_o = 60\ \Omega$, $\alpha = 20$ mNp/m, $u = 0.6c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Halle R, L, G, C y λ a 100 MHz.

Solución:

En una línea sin distorsión,

$$RC = GL \quad \text{o} \quad G = \frac{RC}{L}$$

Por tanto

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{11.2.1}$$

$$\alpha = \sqrt{RG} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{Z_o} \tag{11.2.2a}$$

o

$$R = \alpha\, Z_o \tag{11.2.2b}$$

Pero

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.2.3}$$

A partir de la ecuación (11.2.2b),

$$R = \alpha\, Z_o = (20 \times 10^{-3})(60) = 1.2\ \Omega/\text{m}$$

La división de la ecuación (11.2.1) entre la ecuación (11.2.3) resulta en

$$L = \frac{Z_o}{u} = \frac{60}{0.6(3 \times 10^8)} = 333\ \text{nH/m}$$

Con base en la ecuación (11.2.2a),

$$G = \frac{\alpha^2}{R} = \frac{400 \times 10^{-6}}{1.2} = 333\ \mu\text{S/m}$$

Al multiplicar las ecuaciones (11.2.1) y (11.2.3) se obtiene

$$uZ_o = \frac{1}{C}$$

o

$$C = \frac{1}{uZ_o} = \frac{1}{0.6\,(3 \times 10^8)\,60} = 92.59 \text{ pF/m}$$

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{0.6\,(3 \times 10^8)}{10^8} = 1.8 \text{ m}$$

Ejercicio 11.2

Una línea telefónica tiene $R = 30\ \Omega$/km, $L = 100$ mH/km, $G = 0$ y $C = 20\ \mu$F/km. A $f = 1$ kHz, obtenga:

a) La impedancia característica de la línea.
b) La constante de propagación.
c) La velocidad de fase.

Respuestas: *a)* $70.75\ \angle -1.367°\ \Omega$, *b)* $2.121 \times 10^{-4} + j8.888 \times 10^{-3}$/m y *c)* 7.069×105 m/s.

11.4. Impedancia de entrada, razón de onda estacionaria y potencia

Considérese una línea de transmisión de longitud ℓ caracterizada por γ y Z_o y conectada a una carga Z_L, como se muestra en la figura 11.6. Si se examina este caso, la línea con la carga representa para el generador una impedancia de entrada Z_{ent}. Nuestro propósito en esta sección es determinar la impedancia de entrada, la razón de onda estacionaria (ROE) y el flujo de potencia en la línea.

Concedamos que la línea de transmisión se extiende de $z = 0$ en el generador a $z = \ell$ en la carga. Antes que nada, precisamos de las ondas de voltaje y corriente de las ecuaciones (11.15) y (11.16), es decir, de

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{\gamma z} \tag{11.24}$$

$$I_s(z) = \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-\gamma z} - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{\gamma z} \tag{11.25}$$

donde se ha incorporado la ecuación (11.18). Para hallar V_o^+ y V_o^-, debe disponerse de las condiciones en la terminal. Si, por ejemplo, están dadas las condiciones en la entrada, digamos

$$V_o = V(z = 0), \qquad I_o = I(z = 0) \tag{11.26}$$

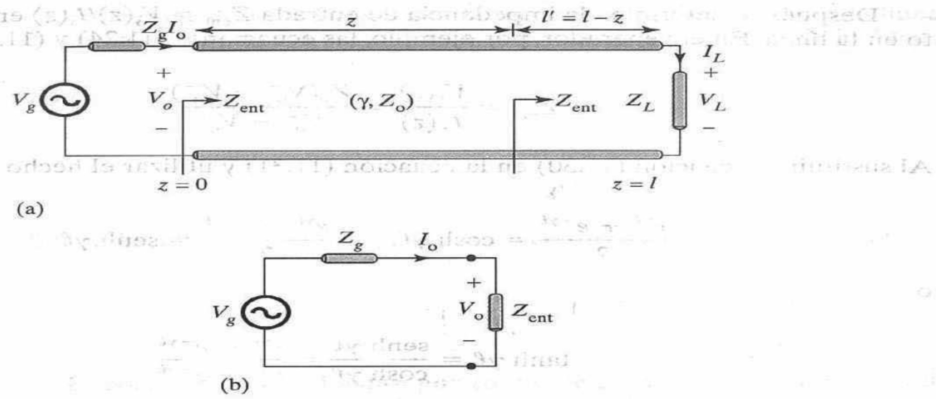


Figura 11.6. **(a)** Impedancia de entrada debida a una línea terminada en una carga; **(b)** circuito equivalente para determinar V_o e I_o en términos de Z_{ent} en la entrada.

la sustitución de estos valores en las ecuaciones (11.24) y (11.25) resulta en

$$V_o^+ = \frac{1}{2}(V_o - Z_o I_o) \tag{11.27a}$$

$$V_o^- = \frac{1}{2}(V_o - Z_o I_o) \tag{11.27b}$$

Si la impedancia de entrada en las terminales de entrada es Z_{ent}, el voltaje de entrada V_o y la corriente de entrada I_o se obtienen fácilmente de la figura 11.6*(b)* como

$$V_o = \frac{Z_{ent}}{Z_{ent} + Z_g} V_g, \qquad I_o = \frac{V_g}{Z_{ent} + Z_g} \tag{11.28}$$

Si, por otra parte, están dadas las condiciones en la carga, digamos

$$V_L = V(z = \ell), \qquad I_L = I(z = \ell) \tag{11.29}$$

La sustitución de estos valores en las ecuaciones (11.24) y (11.25) da como resultado

$$V_o^+ = \frac{1}{2}(V_L + Z_o I_L)e^{\gamma \ell} \tag{11.30a}$$

$$V_o^- = \frac{1}{2}(V_L - Z_o I_L)e^{-\gamma \ell} \tag{11.30b}$$

Después se determina la impedancia de entrada $Z_{ent} = V_s(z)/I_s(z)$ en cualquier punto en la línea. En el generador, por ejemplo, las ecuaciones (11.24) y (11.25) producen

$$Z_{ent} = \frac{V_s(z)}{I_s(z)} = \frac{Z_o(V_o^+ + V_o^-)}{V_o^+ - V_o^-} \tag{11.31}$$

Al sustituir la ecuación (11.30) en la ecuación (11.31) y utilizar el hecho de que

$$\frac{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}}{2} = \cosh \gamma\ell, \qquad \frac{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}{2} = \text{senh}\, \gamma\ell \tag{11.32a}$$

o

$$\tanh \gamma\ell = \frac{\text{senh}\, \gamma\ell}{\cosh \gamma\ell} = \frac{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}} \tag{11.32b}$$

se obtiene

$$\boxed{Z_{ent} = Z_o \left[\frac{Z_L + Z_o \tanh \gamma\ell}{Z_o + Z_L \tanh \gamma\ell}\right]} \qquad \text{(disipativa)} \tag{11.33}$$

Aunque deducida con referencia a la impedancia de entrada Z_{ent} en el extremo de generación, la ecuación (11.33) es una expresión general para determinar Z_{ent} en cualquier punto de la línea. Para hallar Z_{ent} a una distancia ℓ' desde la carga, como en la figura 11.6*(a)*, se reemplaza ℓ por ℓ'. En el apéndice A.3 se proporciona una fórmula para calcular la tangente hiperbólica de un número complejo, necesaria en la ecuación (11.33).

En el caso de una línea sin pérdidas, $\gamma = j\beta$, $\tanh j\beta\ell = j \tan \beta\ell$ y $Z_o = R_o$, de modo que la ecuación (11.33) se convierte en

$$\boxed{Z_{ent} = Z_o \left[\frac{Z_L + jZ_o \tan \beta\ell}{Z_o + jZ_L \tan \beta\ell}\right]} \qquad \text{(sin pérdidas)} \tag{11.34}$$

lo que indica que la impedancia de entrada varía periódicamente con la distancia ℓ desde la carga. La cantidad $\beta\ell$ de la ecuación (11.34) usualmente es la *longitud eléctrica* de la línea y puede expresarse en grados o en radianes.

Definamos ahora Γ_L como el *coeficiente de reflexión por voltaje* (en la carga). Γ_L es la razón de la onda de reflexión por voltaje a la onda incidente en la carga, es decir,

$$\Gamma_L = \frac{V_o^- e^{\gamma\ell}}{V_o^+ e^{-\gamma\ell}} \tag{11.35}$$

La sustitución de V_o^- y V_o^+ de la ecuación (11.30) en la ecuación (11.35) y la incorporación de $V_L = Z_L I_L$ resultan en

$$\boxed{\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}} \tag{11.36}$$

El **coeficiente de reflexión por voltaje** en cualquier punto de la línea es la razón de la magnitud de la onda reflejada por voltaje a la de la onda incidente.

Esto es,

$$\Gamma(z) = \frac{V_o^- e^{\gamma z}}{V_o^+ e^{-\gamma z}} = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{2\gamma z}$$

Sin embargo, $z = \ell - \ell'$. Al sustituir y combinar con la ecuación (11.35) se obtiene

$$\Gamma(z) = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{2\gamma \ell} e^{-2\gamma \ell'} = \Gamma_L e^{-2\gamma \ell'} \tag{11.37}$$

El **coeficiente de reflexión por corriente** en cualquier punto de la línea es el negativo del coeficiente de reflexión por voltaje en ese punto.

Así, el coeficiente de reflexión por corriente en la carga es $I_o^- e^{\gamma \ell}/I_o^+ e^{-\gamma \ell} = -\Gamma_L$.

Al igual que en el caso de las ondas planas, la *razón de onda estacionaria* (ROE) s se define como

$$\boxed{s = \frac{V_{máx}}{V_{mín}} = \frac{I_{máx}}{I_{mín}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}} \tag{11.38}$$

Es fácil demostrar que $I_{máx} = V_{máx}/Z_o$ e $I_{mín} = V_{mín}/Z_o$. Los valores máximos y mínimos de la impedancia de entrada Z_{ent} de la ecuación (11.34) ocurren en los valores máximos y mínimos, respectivamente, de la onda estacionaria de voltaje y corriente. También es posible demostrar que

$$\boxed{|Z_{ent}|_{máx} = \frac{V_{máx}}{I_{mín}} = sZ_o} \tag{11.39a}$$

y

$$\boxed{|Z_{ent}|_{mín} = \frac{V_{mín}}{I_{máx}} = \frac{Z_o}{s}} \tag{11.39b}$$

Para comprobar estos conceptos, considérese una línea sin pérdidas con impedancia característica de $Z_o = 50\ \Omega$. Para efectos de simplificación, supongamos que esta línea termina en una carga resistiva pura $Z_L = 100\ \Omega$ y que el voltaje en la carga es de 100 V (rms). Las condiciones en la línea se presentan en la figura 11.7, en la que se advierte que tales condiciones se repiten cada semilongitud de onda.

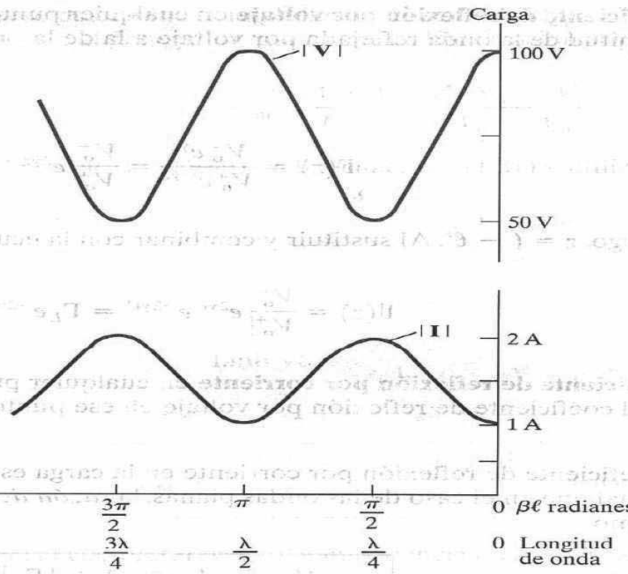


Figura 11.7. Patrones de ondas de voltaje y corriente en una línea sin pérdidas terminada en una carga resistiva.

Como se mencionó al principio de este capítulo, una línea de transmisión sirve para transferir potencia de una fuente a una carga. La potencia de entrada promedio a una distancia ℓ desde la carga está dada por una ecuación semejante a la ecuación (10.68); es decir,

$$P_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V_s(\ell) I_s^*(\ell) \right]$$

donde el factor 1/2 es necesario, puesto que tratamos con los valores pico en lugar de los valores rms. Suponiendo una línea sin pérdidas, se sustituyen las ecuaciones (11.24) y (11.25) para obtener

$$P_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V_o^+ (e^{j\beta\ell} + \Gamma e^{-j\beta\ell}) \frac{V^{+*}}{Z_o} (e^{-j\beta\ell} - \Gamma^* e^{j\beta\ell}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{|V_o^+|^2}{Z_o} (1 - |\Gamma|^2 + \Gamma e^{-2j\beta\ell} - \Gamma^* e^{2j\beta\ell}) \right]$$

Puesto que los dos últimos términos son puramente imaginarios, se tiene

$$\boxed{P_{\text{prom}} = \frac{|V_o^+|^2}{2Z_o} (1 - |\Gamma|^2)} \tag{11.40}$$

El primer término es la potencia incidente P_i y el segundo la potencia reflejada P_r. Así, la ecuación (11.40) puede expresarse como

$$P_t = P_i - P_r$$

donde P_t es la potencia de entrada o transmitida y el signo negativo se debe a la onda de dirección negativa, puesto que la dirección de referencia es la del voltaje/corriente que se desplaza hacia la derecha. Cabe señalar con relación a la ecuación (11.40) que la potencia es constante y no depende de ℓ, ya que tratamos con una línea sin pérdidas. Adviértase asimismo en que la carga recibe la potencia máxima cuando $\Gamma = 0$, como es de esperar.

Examinemos ahora los casos especiales representados por la conexión de la línea a una carga $Z_L = 0$, $Z_L = \infty$ y $Z_L = Z_o$. Estos casos pueden deducirse fácilmente del caso general.

A. Línea en cortocircuito ($Z_L = 0$)

En este caso, la ecuación (11.34) se convierte en

$$Z_{cc} = Z_{ent}\bigg|_{Z_L=0} = jZ_o \tan \beta\ell \qquad (11.41a)$$

Asimismo,

$$\Gamma_L = -1, \qquad s = \infty \qquad (11.41b)$$

Debe señalarse respecto de la ecuación (11.41*a*) que Z_{ent} es una reactancia pura, la cual puede ser capacitiva o inductiva según el valor de ℓ. La variación de Z_{ent} con ℓ se muestra en la figura 11.8*(a)*.

B. Línea en circuito abierto ($Z_L = \infty$)

Esta vez la ecuación (11.34) se convierte en

$$Z_{ca} = \lim_{Z_L\to\infty} Z_{ent} = \frac{Z_o}{j \tan \beta\ell} = -jZ_o \cot \beta\ell \qquad (11.42a)$$

y

$$\Gamma_L = 1, \qquad s = \infty \qquad (11.42b)$$

La variación de Z_{ent} con ℓ se muestra en la figura 11.8*(b)*. Adviértase que, a partir de las ecuaciones (11.41*a*) y (11.42*a*),

$$Z_{cc}Z_{ca} = Z_o^2 \qquad (11.43)$$

C. Línea acoplada ($Z_L = Z_o$)

Éste es el caso más deseable desde el punto de vista práctico. En él la ecuación (11.34) se reduce a

$$Z_{ent} = Z_o \qquad (11.44a)$$

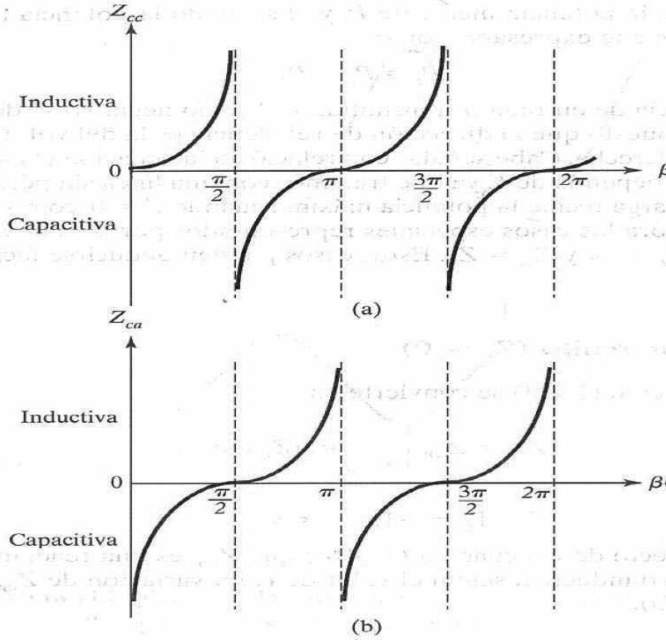


Figura 11.8. Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas: **(a)** en cortocircuito, **(b)** en circuito abierto.

y

$$\Gamma_L = 0, \qquad s = 1 \tag{11.44b}$$

es decir, $V_o^- = 0$, se transmite la onda completa y no hay reflexión. La potencia incidente es totalmente absorbida por la carga. En consecuencia, cuando una línea de transmisión está acoplada con la carga es posible una máxima transferencia de potencia.

Ejemplo 11.3

Cierta línea de transmisión que opera a $\omega = 10^6$ rad/s tiene $\alpha = 8$ dB/m, $\beta = 1$ rad/m y $Z_o = 60 + j40\ \Omega$ y 2 m de largo. Si está conectada a una fuente de $10\underline{/0°}$ V, $Z_g = 40\ \Omega$ y termina en una carga de $20 + j50\ \Omega$, halle

a) La impedancia de entrada.
b) La corriente en el extremo emisor.
c) La corriente a la mitad de la línea.

Solución:

a) Puesto que 1 Np = 8.686 dB,

$$\alpha = \frac{8}{8.686} = 0.921 \text{ Np/m}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0.921 + j1 \text{ /m}$$

$$\gamma\ell = 2(0.921 + j1) = 1.84 + j2$$

De la aplicación de la fórmula para $\tanh(x + jy)$ referida en el apéndice A.3 se obtiene

$$\tanh \gamma\ell = 1.033 - j0.03929$$

$$Z_{\text{ent}} = Z_o \left(\frac{Z_L + Z_o \tanh \gamma\ell}{Z_o + Z_L \tanh \gamma\ell} \right)$$

$$= (60 + j40) \left[\frac{20 + j50 + (60 + j40)(1.033 - j0.03929)}{60 + j40 + (20 + j50)(1.033 - j0.03929)} \right]$$

$$Z_{\text{ent}} = 60.25 + j38.79 \ \Omega$$

b) La corriente en el extremo emisor es $I(z = 0) = I_o$. De acuerdo con la ecuación (11.28),

$$I(z = 0) = \frac{V_g}{Z_{\text{ent}} + Z_g} = \frac{10}{60.25 + j38.79 + 40}$$

$$= 93.03\underline{/-21.15^\circ} \text{ mA}$$

c) Para hallar la corriente en cualquier punto, se precisa de V_o^+ y V_o^-. Sin embargo,

$$I_o = I(z = 0) = 93.03\underline{/-21.15^\circ} \text{ mA}$$

$$V_o = Z_{\text{ent}} I_o = (71.66\underline{/32.77^\circ})(0.09303\underline{/-21.15^\circ}) = 6.667\underline{/11.62^\circ} \text{V}$$

A partir de la ecuación (11.27),

$$V_o^+ = \frac{1}{2}(V_o + Z_o I_o)$$

$$= \frac{1}{2}[6.667\underline{/11.62^\circ} + (60 + j40)(0.09303\underline{/-21.15^\circ})] = 6.687\underline{/12.08^\circ}$$

$$V_o^- = \frac{1}{2}(V_o - Z_o I_o) = 0.0518\underline{/260^\circ}$$

A la mitad de la línea, $z = \ell/2$, $\gamma z = 0.921 + j1$. Por tanto, la corriente en este punto es

$$I_s(z = \ell/2) = \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-\gamma z} - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{\gamma z}$$

$$= \frac{(6.687e^{j12.08^\circ})e^{-0.921 - j1}}{60 + j40} - \frac{(0.0518e^{j260^\circ})e^{0.921 + j1}}{60 + j40}$$

Vale hacer notar que $j1$ está en radianes y equivale a $j57.3°$. Así,

$$
\begin{aligned}
I_s(z = \ell/2) &= \frac{6.687^{j12.08°}\, e^{-0.921}\, e^{-j57.3°}}{72.1e^{j33.69}} - \frac{0.0518e^{j260°}e^{0.921}\, e^{j57.3°}}{72.1e^{33.69°}} \\
&= 0.0369e^{-j78.91°} - 0.001805e^{j283.61°} \\
&= 6.673 - j34.456 \text{ mA} \\
&= 35.10\angle 281° \text{ mA}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11.3

Una línea de transmisión de 40 m de largo, la cual se ilustra en la figura 11.9, tiene $V_g = 15\angle 0°\ \text{V}_{\text{rms}}$, $Z_o = 30 + j60\ \Omega$ y $V_L = 5\angle -48°\ \text{V}_{\text{rms}}$. Si está acoplada con la carga, calcule:

a) La impedancia de entrada Z_{ent}.
b) La corriente I_{ent} y el voltaje V_{ent} en el extremo emisor.
c) La constante de propagación γ.

Respuestas: *a)* $30 + j60\ \Omega$, *b)* $0.112\angle -63.43°$ A, $7.5\angle 0°\ \text{V}_{\text{rms}}$ y *c)* $0.0101 + j0.2094$ /m.

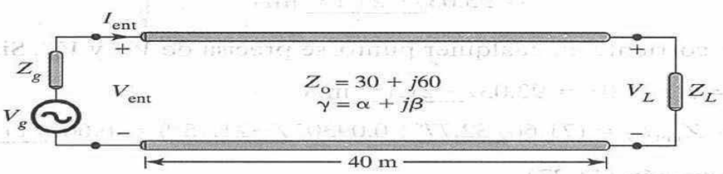


Figura 11.9. Para el ejercicio 11.3.

11.5. El diagrama de Smith

Antes de la aparición de las computadoras y calculadoras digitales, los ingenieros idearon toda suerte de recursos (tablas, diagramas, gráficas, etc.) para facilitar sus cálculos de diseño y análisis. Fue así como surgieron medios gráficos para reducir las tediosas manipulaciones implicadas por el cálculo de las características de líneas de transmisión. El diagrama de Smith[3] es la técnica gráfica de uso más común con ese propósito. Se trata básicamente de una indicación gráfica de la impedancia de una línea de transmisión conforme se avanza a lo largo de ésta. Basta un poco de práctica para dominar su empleo.

[3] Inventado por Phillip H. Smith en 1939. Véase P. H. Smith, "Transmission line calculator", *Electronics*, vol. 12, 1939, pp. 29-31 y P. H. Smith, "An improved transmission line calculator", *Electronics*, vol. 17, 1944, pp. 130-133, 318-325.

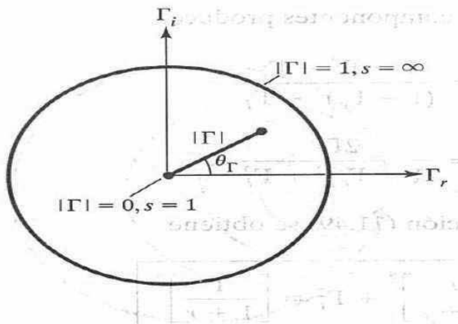


Figura 11.10. Círculo de radio igual a la unidad en el que se elabora el diagrama de Smith.

Examinaremos en primer lugar cómo se elabora el diagrama de Smith y después lo utilizaremos para calcular características de líneas de transmisión como Γ_L, s y Z_{ent}. Aunque no es forzoso que sea así, supondremos una línea de transmisión sin pérdidas ($Z_o = R_o$).

El diagrama de Smith se traza dentro de un círculo de radio igual a la unidad ($|\Gamma| \leq 1$), como se muestra en la figura 11.10. Su elaboración se basa en la relación enunciada en la ecuación (11.36);[4] esto es,

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \tag{11.45}$$

o

$$\Gamma = |\Gamma| \underline{/\theta_\Gamma} = \Gamma_r + j\Gamma_i \tag{11.46}$$

donde Γ_r y Γ_i son las partes real e imaginaria del coeficiente de reflexión Γ.

Para disponer de un solo diagrama de Smith aplicable a cualquier línea de transmisión —lo cual es preferible a elaborar uno por cada línea con diferente impedancia característica, como Z_o = 60, 100 y 120 Ω—, se usa un diagrama normalizado en el que todas las impedancias estén normalizadas respecto de la impedancia característica Z_o de la línea particular en consideración. En el caso de la impedancia de la carga Z_L, por ejemplo, la *impedancia normalizada* z_L está dada por

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_o} = r + jx \tag{11.47}$$

La sustitución de la ecuación (11.47) en las ecuaciones (11.45) y (11.46) resulta en

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \tag{11.48a}$$

o

$$z_L = r + jx = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i} \tag{11.48b}$$

[4] Cuando Γ no va acompañado por un subíndice, alude al coeficiente de reflexión por voltaje en la carga ($\Gamma_L = \Gamma$).

La normalización e igualación de las componentes produce

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{11.49a}$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{11.49b}$$

Al reordenar los términos de la ecuación (11.49) se obtiene

$$\boxed{\left[\Gamma_r - \frac{r}{1 + r}\right]^2 + \Gamma_i^2 = \left[\frac{1}{1 + r}\right]^2} \tag{11.50}$$

y

$$\boxed{[\Gamma_r - 1]^2 + \left[\Gamma_i - \frac{1}{x}\right]^2 = \left[\frac{1}{x}\right]^2} \tag{11.51}$$

Estas dos ecuaciones son similares a

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 \tag{11.52}$$

la ecuación general de un círculo de radio a centrado en (h, k). Así, la ecuación (11.50) es un *círculo r* (*círculo de resistencia*) con

$$\text{centro en } (\Gamma_r, \Gamma_i) = \left(\frac{r}{1 + r}, 0\right) \tag{11.53a}$$

$$\text{radio} = \frac{1}{1 + r} \tag{11.53b}$$

En la tabla 11.3 se presentan los centros y radios de círculos r correspondientes a valores comunes de la resistencia normalizada r, y en la figura 11.11 los círculos r basados en

Tabla 11.3. Radios y centros de círculos r correspondientes a valores comunes de r.

Resistencia normalizada (r)	*Radio* $\left(\frac{1}{1 + r}\right)$	*Centro* $\left(\frac{r}{1 + r}, 0\right)$
0	1	(0, 0)
1/2	2/3	(1/3, 0)
1	1/2	(1/2, 0)
2	1/3	(2/3, 0)
5	1/6	(5/6, 0)
∞	0	(1, 0)

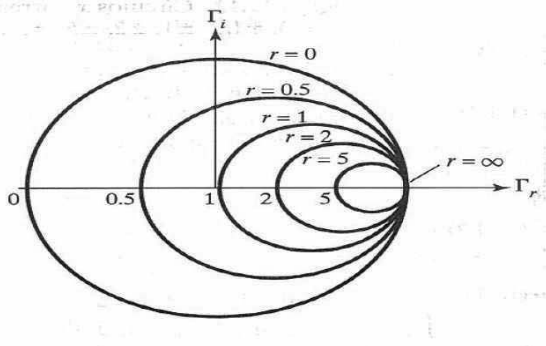


Figura 11.11. Círculos r correspondientes a $r = 0$, 0.5, 1, 2, 5, ∞.

los datos de la tabla 11.3. La ecuación (11.51) es a su vez un *círculo x* (*círculo de reactancia*) con

$$\text{centro en } (\Gamma_r, \Gamma_i) = \left(1, \frac{1}{x}\right) \tag{11.54a}$$

$$\text{radio} = \frac{1}{x} \tag{11.54b}$$

En la tabla 11.4 aparecen los centros y radios de círculos x correspondientes a valores comunes de x, y en la figura 11.12 el diagrama respectivo. Nótese que mientras que r siempre es positiva, x puede ser positiva (en el caso de impedancia inductiva) o negativa (en el de impedancia capacitiva).

De la superposición de los círculos r y x resulta el diagrama de Smith, como se muestra en la figura 11.13. En él es posible localizar una impedancia normalizada $z = 2 + j$, por ejemplo, en el punto de intersección del círculo $r = 2$ y el círculo $x = 1$, el punto P_1 en la figura 11.13. De igual forma, $z = 1 - j\,0.5$ se localiza en P_2, donde se intersecan el círculo $r = 1$ y el círculo $x = -0.5$.

Aparte de los círculos r y x (mostrados en el diagrama de Smith), es posible trazar *círculos s* o *círculos de razón constante de onda estacionaria* (los cuales nunca aparecen en el diagrama), centrados en el origen en tanto que s varía de 1 a ∞. El valor de la razón de onda estacionaria s se determina localizando el punto en el que un círculo s se cruza

Tabla 11.4. Radios y centros de círculos x correspondientes a valores comunes de x.

Reactancia normalizada (x)	*Radio* $\left(\frac{1}{x}\right)$	*Centro* $\left(1, \frac{1}{x}\right)$
0	∞	$(1, \infty)$
$\pm 1/2$	2	$(1, \pm 2)$
± 1	1	$(1, \pm 1)$
± 2	1/2	$(1, \pm 1/2)$
± 5	1/5	$(1, \pm 1/5)$
$\pm\infty$	0	$(1, 0)$

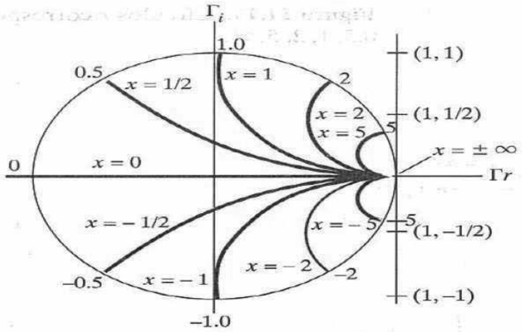


Figura 11.12. Círculos x correspondientes a $x = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm\infty$.

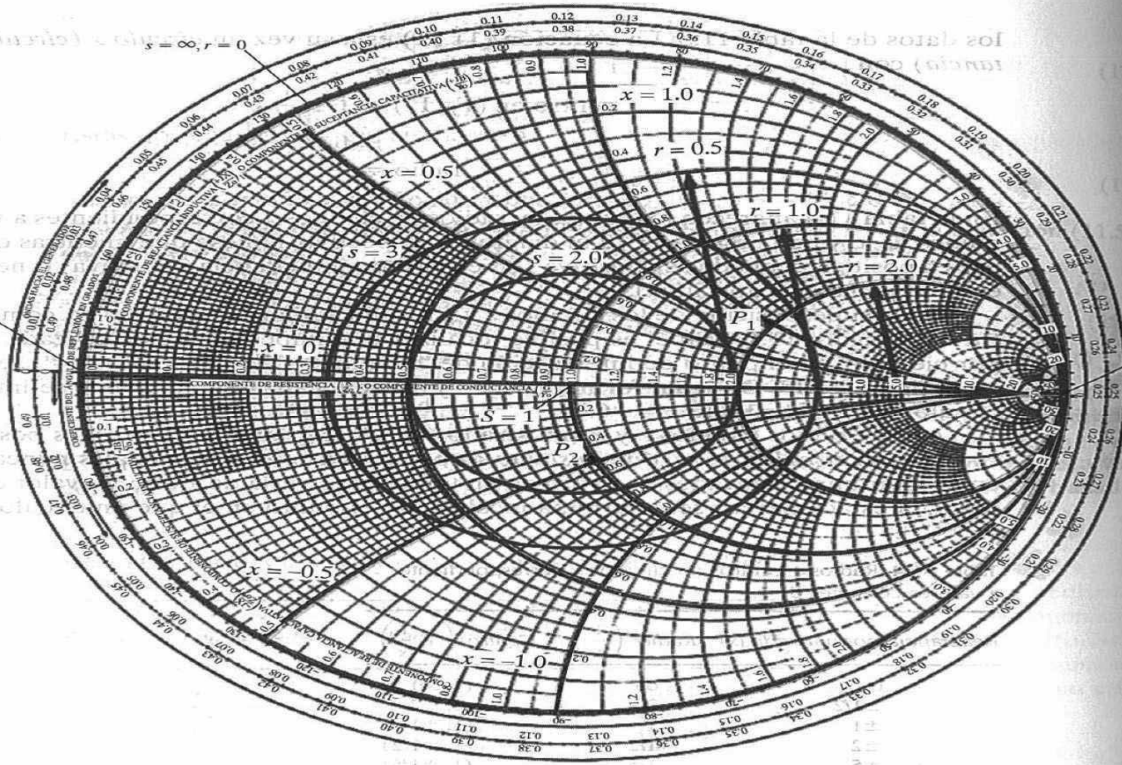


Figura 11.13. Ilustración de los círculos r, x y s en el diagrama de Smith.

con el eje Γ_r. En la figura 11.13 se presentan ejemplos representativos de los círculos s correspondientes a $s = 1, 2, 3$ e ∞. Puesto que $|\Gamma|$ y s se relacionan de acuerdo con la ecuación (11.38), a los círculos s también se les conoce como *círculos* $|\Gamma|$, en los que $|\Gamma|$ varía linealmente de 0 a 1 conforme se avanza del centro O a la periferia del diagrama, mientras que s varía de modo no lineal de 1 a ∞.

Conviene señalar lo siguiente acerca del diagrama de Smith:

1. En el punto P_{cc} del diagrama, $r = 0, x = 0$; es decir, $Z_L = 0 + j0$, lo que indica que P_{cc} representa un cortocircuito en la línea de transmisión. En el punto P_{ca}, $r = \infty$ y $x = \infty$, o $Z_L = \infty + j\infty$, lo que implica que P_{ca} corresponde a un circuito abierto en la línea. También en P_{ca}, $r = 0$ y $x = 0$, de modo que ahí se ubica otro cortocircuito en la línea.
2. Una revolución completa (360°) en el diagrama representa una distancia de $\lambda/2$ en la línea. El desplazamiento en el diagrama en la dirección de las manecillas del reloj equivale a desplazarse hacia el generador (o en dirección contraria a la carga), como lo indica la flecha G en las figuras 11.14 *(a)* y *(b)*. Por consecuencia lógica, el desplazamiento en la dirección opuesta a la de las manecillas del reloj equivale a desplazarse hacia la carga (o en dirección contraria al generador), como lo indica a su vez la flecha L en la figura 11.14. De la figura 11.14*(b)* se desprende que, en la carga, no tiene sentido moverse hacia la carga (porque ya se está en ella), y que lo mismo puede decirse respecto del extremo del generador.
3. En la figura 11.14*(a)* se detallan tres escalas en la periferia del diagrama. Incluidas para mayor utilidad, tienen sin embargo el mismo propósito, de modo que debería ser suficiente con sólo una de ellas. Su fin es determinar en grados o longitudes de onda la distancia desde la carga o el generador. Así, el de las escalas exterior e intermedia es determinar en longitudes de onda la distancia en la línea desde el extremo del generador y desde la carga, respectivamente, mientras que la escala interna es un transportador (en grados) para determinar θ_Γ y la distancia desde la carga o el generador. Puesto que una distancia de $\lambda/2$ en la línea corresponde a un desplazamiento de 360° en el diagrama, *la distancia* λ *en la línea corresponde a un desplazamiento de 720° en el diagrama*.

$$\boxed{\lambda \rightarrow 720°} \tag{11.55}$$

De esta manera, es posible ignorar las escalas externas y usar únicamente el transportador (la escala interna) para todos los cálculos de θ_Γ y distancia.

4. $V_{máx}$ ocurre en la ubicación de $Z_{ent,\,máx}$ en el diagrama [véase la ecuación (11.39*a*)], o sea, en la figura 11.14*(a)*, en el eje Γ positivo o en OP_{ca}. $V_{mín}$ se localiza por su parte en el punto con $Z_{ent,\,mín}$ en el diagrama o en la figura 11.14*(a)*, en el eje Γ_r negativo o en OP_{cc}. Nótese que $V_{máx}$ y $V_{mín}$ (o $Z_{ent,\,máx}$ y $Z_{ent,\,mín}$) están separados por $\lambda/4$ (o 180°).
5. El diagrama de Smith sirve lo mismo como diagrama de impedancia que de admitancia ($Y = 1/Z$). Como diagrama de admitancia (impedancia normalizada $y = Y/Y_o = g + jb$), los círculos g y b corresponden a los círculos r y x respectivamente.

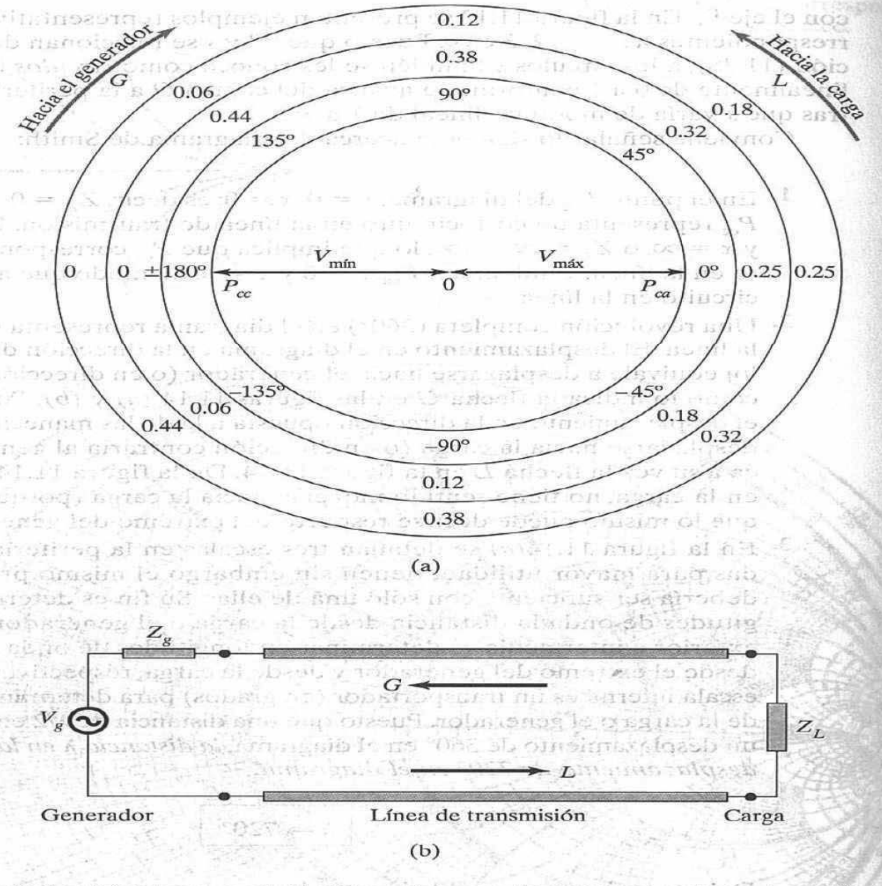


Figura 11.14. **(a)** Diagrama de Smith en el que se ilustran las escalas en la periferia y los desplazamientos alrededor; **(b)** desplazamientos correspondientes a lo largo de la línea de transmisión.

Con base en estas importantes propiedades, el diagrama de Smith puede usarse para determinar, entre otras cosas, *a)* $\Gamma = |\Gamma| \angle \theta_\Gamma$ y s; *b)* Z_{ent} o Y_{ent}, y *c)* las ubicaciones de $V_{máx}$ y $V_{mín}$, siempre que se disponga de los valores de Z_o, Z_L y la longitud de la línea. Algunos ejemplos ilustrarán claramente cómo realizar todo esto y mucho más con la ayuda del diagrama de Smith, un compás y una regla.

Ejemplo 11.4

Una línea de transmisión sin pérdidas de 30 m de largo con $Z_o = 50\ \Omega$ que opera a 2 MHz termina en una carga de $Z_L = 60 + j40\ \Omega$. Si $u = 0.6c$ en la línea, halle

a) El coeficiente de reflexión Γ.

b) La razón de onda estacionaria s.

c) La impedancia de entrada.

Solución:

Este problema se resolverá con y sin el diagrama de Smith.

Método 1 (sin el diagrama de Smith).

a) $$\Gamma = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \frac{60 + j40 - 50}{60 + j40 + 50} = \frac{10 + j40}{110 + j40}$$
$$= 0.3523\underline{/60^\circ}$$

b) $$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.3523}{1 - 0.3523} = 2.088$$

c) Puesto que $u = \omega/\beta$ o $\beta = \omega/u$,

$$\beta\ell = \frac{\omega\ell}{u} = \frac{2\pi\,(2 \times 10^6)(30)}{0.6\,(3 \times 10^8)} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

Recuérdese que $\beta\ell$ es la longitud eléctrica de la línea.

$$Z_{\text{ent}} = Z_o\left[\frac{Z_L + jZ_o \tan\beta\ell}{Z_o + jZ_L \tan\beta\ell}\right]$$
$$= \frac{50\,(60 + j40 + j50 \tan 120^\circ)}{[50 + j(60 + j40)\tan 120^\circ]}$$
$$= \frac{50\,(6 + j4 - j5\sqrt{3})}{(5 + 4\sqrt{3} - j6\sqrt{3})} = 24.01\underline{/3.22^\circ}$$
$$= 23.97 + j1.35\ \Omega$$

Método 2 (con el diagrama de Smith).

a) Se calcula la impedancia normalizada de la carga

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_o} = \frac{60 + j40}{50}$$
$$= 1.2 + j0.8$$

En el diagrama de Smith que aparece en la figura 11.15, z_L se localiza en el punto P, donde se cruzan los círculos $r = 1.2$ y $x = 0.8$. Para obtener Γ en z_L, se extiende OP hasta cruzar con el círculo $r = 0$, lo cual ocurre en Q, y se mide OP y OQ. Puesto que OQ corresponde a $|\Gamma| = 1$, en P

$$|\Gamma| = \frac{OP}{OQ} = \frac{3.2\text{ cm}}{9.1\text{ cm}} = 0.3516$$

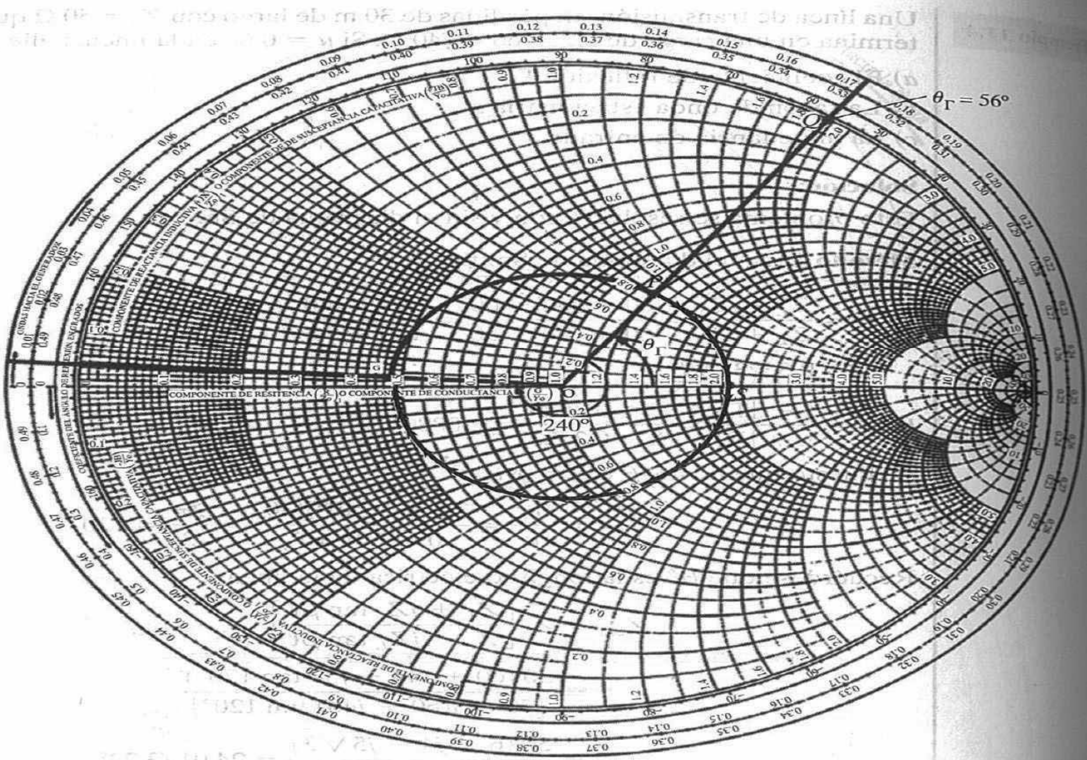


Figura 11.15. Para el ejemplo 11.4.

Cabe señalar que $OP = 3.2$ cm y $OQ = 9.1$ cm proceden del diagrama de Smith que utilizó el autor; el que aparece en la figura 11.15 es una reducción, pero mantiene la razón OP/OQ.

El ángulo θ_Γ se obtiene directamente del diagrama como el ángulo entre OS y OP; es decir,

$$\theta_\Gamma = \text{ángulo } POS = 56°$$

Así

$$\Gamma = 0.3516\underline{/56°}$$

b) Para determinar la razón de onda etacionaria s, se traza un círculo con OP como radio y centro en O. Éste es el círculo de s constante o $|\Gamma|$. Después se localiza el punto S en el que el círculo s se cruza con el eje Γ_r.

[Esto se demuestra fácilmente estableciendo $\Gamma_i = 0$ en la ecuación (11.49*a*).] El valor de r en este punto es s; esto es,

$$\begin{aligned} s &= r \text{ (cuando } r \geq 1) \\ &= 2.1 \end{aligned}$$

c) Para obtener Z_{ent}, primero se expresa ℓ en términos de λ o en grados.

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{0.6\,(3 \times 10^8)}{2 \times 10^6} = 90 \text{ m}$$

$$\ell = 30 \text{ m} = \frac{30}{90}\,\lambda = \frac{\lambda}{3} \rightarrow \frac{720^\circ}{3} = 240^\circ$$

En razón de que λ corresponde a un desplazamiento angular de 720° en el diagrama, la longitud de la línea corresponde a un desplazamiento angular de 240°. Esto equivale a desplazarse 240° hacia el generador (o en dirección contraria a la carga, en el sentido de las manecillas del reloj) en el círculo s, del punto P al punto G. En G se obtiene

$$z_{\text{ent}} = 0.47 + j0.035$$

Por tanto

$$Z_{\text{ent}} = Z_o z_{\text{ent}} = 50(0.47 + j0.035) = 23.5 + j1.75\ \Omega$$

Aunque el diagrama de Smith proporciona resultados aproximados, para los fines de la ingeniería son suficientemente cercanos a los exactos obtenidos con el método 1.

Ejercicio 11.4

Una línea sin pérdidas de 70 Ω tiene $s = 1.6$ y $\theta_\Gamma = 300°$. Si es de 0.6λ de largo, halle

a) Γ, Z_L, Z_{ent}
b) La distancia del primer voltaje mínimo desde la carga.

Respuestas: *a)* $0.228\underline{/300°}$, $80.5 - j33.6\ \Omega$, $47.6 - j17.5\ \Omega$ y *b)* $\lambda/6$.

Ejemplo 11.5

Una carga de $100 + j150\ \Omega$ está conectada a una línea sin pérdidas de 75 Ω. Halle:

a) Γ
b) s
c) La admitancia de la carga Y_L.
d) Z_{ent} en 0.4 λ desde la carga.
e) Las ubicaciones de $V_{\text{máx}}$ y $V_{\text{mín}}$ respecto de la carga si la línea es de 0.6λ de largo.
f) Z_{ent} en el generador.

Solución:

a) Este problema puede resolverse con el diagrama de Smith. La impedancia normalizada de la carga es

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_o} = \frac{100 + j150}{75} = 1.33 + j2$$

Esto equivale al punto P en el diagrama de Smith que se presenta en la figura 11.16. En P se obtiene

$$|\Gamma| = \frac{OP}{OQ} = \frac{6 \text{ cm}}{9.1 \text{ cm}} = 0.659$$

$$\theta_\Gamma = \text{ángulo } POS = 40°$$

En consecuencia,

$$\Gamma = 0.659\angle 40°$$

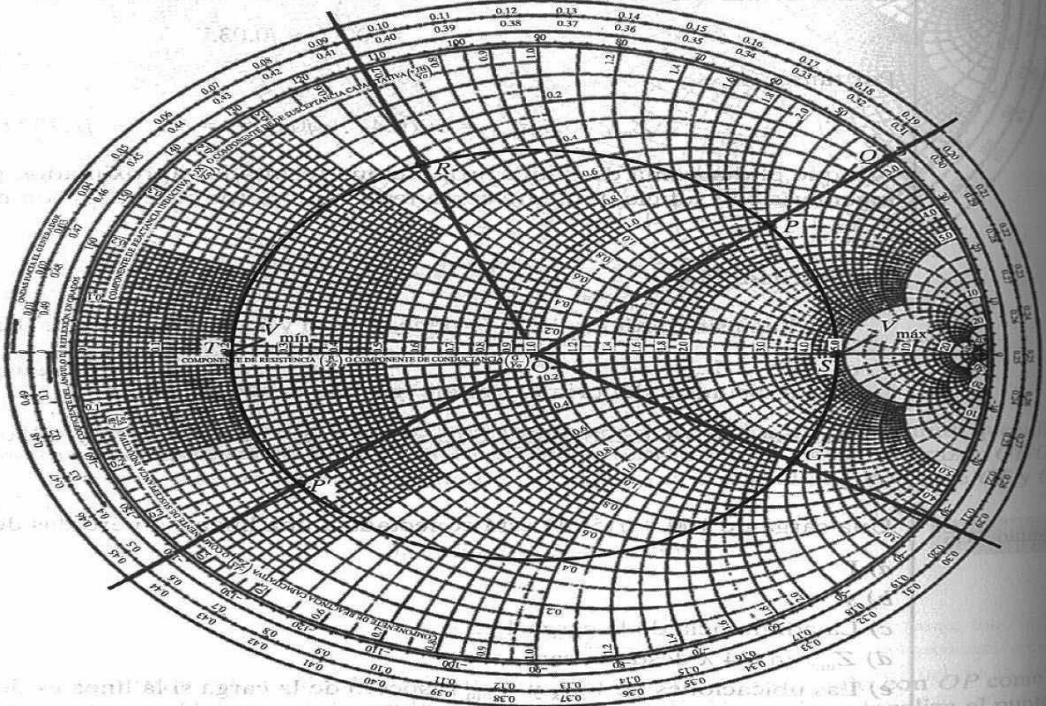


Figura 11.16. Para el ejemplo 11.5.

Comprobación:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \frac{100 + j150 - 75}{100 + j150 + 75}$$

$$= 0.659\underline{/40^\circ}$$

b) Se traza el círculo de s constante que pasa por P y se obtiene

$$s = 4.82$$

Comprobación:

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.659}{1 - 0.659} = 4.865$$

c) Para obtener Y_L, PO se prolonga a POP' y se identifica el punto P', donde el círculo de s constante se cruza con POP'. En P' se obtiene

$$y_L = 0.228 - j0.35$$

La admitancia de la carga es

$$Y_L = Y_o y_L = \frac{1}{75}(0.228 - j0.35) = 3.04 - j4.67 \text{ mS}$$

Comprobación:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{100 + j150} = 3.07 - j4.62 \text{ mS}$$

d) 0.4λ corresponde a un desplazamiento angular de $0.4 \times 720^\circ = 288^\circ$ sobre el círculo de s constante. Esto equivale a un desplazamiento de 288° desde P hacia el generador (en la dirección de las manecillas del reloj) en el círculo s, hasta llegar al punto R. En R,

$$z_{\text{ent}} = 0.3 + j0.63$$

Por tanto

$$Z_{\text{ent}} = Z_o z_{\text{ent}} = 75\ (0.3 + j0.63)$$

$$= 22.5 + j47.25\ \Omega$$

Comprobación:

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}(0.4\lambda) = 360^\circ\,(0.4) = 144^\circ$$

$$Z_{\text{ent}} = Z_o\left[\frac{Z_L + jZ_o \tan\beta\ell}{Z_o + jZ_L \tan\beta\ell}\right]$$

$$= \frac{75\,(100 + j150 + j75 \tan 144^\circ)}{[75 + j(100 + j150) \tan 144^\circ]}$$

$$= 54.41\underline{/65.25^\circ}$$

o

$$Z_{ent} = 21.9 + j47.6\ \Omega$$

e) 0.6λ corresponde a un desplazamiento angular de

$$0.6 \times 720° = 432° = 1 \text{ revolución} + 72°$$

Así, se avanza 432°, o una revolución más 72°, a lo largo del círculo s desde el punto P (extremo de la carga) hasta llegar al generador en el punto G. Obsérvese que para llegar a G desde P se pasa una vez por el punto T (la posición de $V_{mín}$) y dos veces por el punto S (la posición de $V_{máx}$). Desde la carga, entonces,

$$\text{El 1er. } V_{máx} \text{ se ubica en } \frac{40°}{720°}\lambda = 0.055\lambda$$

$$\text{El 2o. } V_{máx} \text{ se ubica en } 0.0555\lambda + \frac{\lambda}{2} = 0.555\lambda$$

en tanto que el único $V_{mín}$ se ubica en $0.055\lambda + \lambda/4 = 0.3055\lambda$.

f) En G (extremo del generador),

$$z_{ent} = 1.8 - j2.2$$

$$Z_{ent} = 75(1.8 - j2.2) = 135 - j165\ \Omega$$

Esto puede comprobarse mediante la ecuación (11.34), donde $\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}(0.6\lambda) = 216°$. Como puede verse, el diagrama de Smith ahorra mucho tiempo y esfuerzo.

Ejercicio 11.5

Una línea sin pérdidas de 60 Ω termina en una carga de 60 + j60 Ω.

a) Halle Γ y s. Si $Z_{ent} = 120 - j60\ \Omega$, ¿cuál es la distancia (en longitudes de onda) entre la carga y el generador? Resuelva este problema sin el diagrama de Smith.

b) Ahora resuelva el problema del inciso *a)* con el diagrama de Smith. Calcule $Z_{máx}$ y $Z_{ent,\,mín}$. ¿Cuál es la distancia (en λ) entre el primer voltaje máximo y la carga?

Respuestas: *a)* $0.4472\angle 63.43°$, 2.618, $\frac{\lambda}{8}(1 + 4n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y *b)* $0.4457\angle 62°$, 2.612, $\frac{\lambda}{8}(1 + 4n)$, 157.1 Ω, 22.92 Ω, 0.0861 λ.

11.6. Algunas aplicaciones de líneas de transmisión

Las líneas de transmisión se utilizan con diversos fines. Aquí nos referiremos a su uso en el acoplamiento de cargas y la medición de la impedancia.

A. Transformador de un cuarto de onda (acoplamiento)

Cuando $Z_o \neq Z_L$, se dice que la carga está *desacoplada* y que existe una onda reflejada en la línea. Para una máxima transferencia de energía, sin embargo, es deseable que la carga esté acoplada con la línea de transmisión ($Z_o = Z_L$), a fin de anular la reflexión ($|\Gamma| = 0$ o $s = 1$). El acoplamiento se consigue usando secciones en corto de líneas de transmisión.

Recuérdese que, de conformidad con la ecuación (11.34), cuando $\ell = \lambda/4$ o $\beta\ell = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$,

$$Z_{ent} = Z_o \left[\frac{Z_L + jZ_o \tan \pi/2}{Z_o + jZ_L \tan \pi/2} \right] = \frac{Z_o^2}{Z_L} \tag{11.56}$$

Es decir,

$$\frac{Z_{ent}}{Z_o} = \frac{Z_o}{Z_L}$$

o

$$z_{ent} = \frac{1}{z_L} \rightarrow y_{ent} = z_L \tag{11.57}$$

Así, mediante la incorporación de una línea de $\lambda/4$ al diagrama de Smith, se obtiene la admitancia de entrada correspondiente a una impedancia dada de la carga.

Asimismo, una carga desacoplada Z_L puede acoplarse adecuadamente con una línea (con impedancia característica Z_o) insertando previamente en la carga una línea de transmisión de $\lambda/4$ de longitud (con impedancia característica Z_o'), como se indica en la figura 11.17. Esa sección de $\lambda/4$ de la línea de transmisión se llama *transformador de un cuarto de onda*, ya que sirve para acoplar la impedancia como lo haría un transformador ordinario. Con base en la ecuación (11.56), Z_o' se selecciona de tal manera que ($Z_{ent} = Z_o$)

$$Z_o' = \sqrt{Z_o Z_L} \tag{11.58}$$

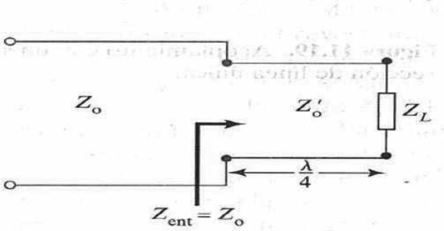


Figura 11.17. Acoplamiento de carga con un transformador de $\lambda/4$.

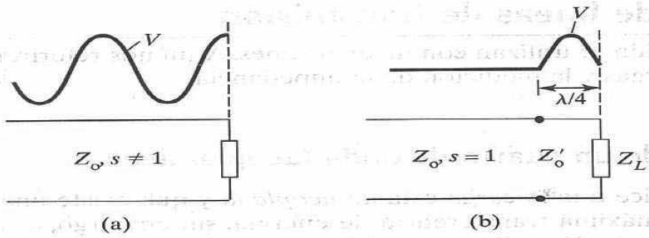


Figura 11.18. Patrón de onda estacionaria de voltaje de una carga desacoplada: **(a)** sin transformador de $\lambda/4$, **(b)** con transformador de $\lambda/4$.

donde Z_o', Z_o y Z_L son reales. Si, por ejemplo, se desea acoplar una carga de 120 Ω con una línea de 75 Ω, el transformador de un cuarto de onda debe tener una impedancia característica de $\sqrt{(75)(120)} \simeq 95\Omega$. Este transformador de un cuarto de onda de 95 Ω también acoplará una carga de 75 Ω con una línea de 120 Ω. En la figura 11.18 *(a)* y *(b)* se ilustran los patrones de onda estacionaria de voltaje sin y con el transformador de $\lambda/4$, respectivamente. En esta figura puede observarse que pese a que entre el transformador y la carga persiste una onda estacionaria, a la izquierda de aquél la onda estacionaria ha desaparecido, por efecto del acoplamiento. Sin embargo, la onda reflejada (o estacionaria) sólo se elimina en la longitud de onda (o frecuencia *f*) deseada; en una longitud de onda ligeramente diferente, habrá reflexión. Así, la principal desventaja del transformador de un cuarto de onda es que se trata de un dispositivo de banda angosta, o sensible a la frecuencia.

B. Sintonizador de sección de línea única (acoplamiento)

El mayor inconveniente del transformador de un cuarto de onda como dispositivo de acoplamiento de líneas desaparece en el sintonizador de *sección de línea única*. Este sintonizador es una sección abierta o en corto de una línea de transmisión de longitud d conectada en paralelo a la línea principal a cierta distancia ℓ de la carga, como se ilustra en la figura 11.19. La impedancia característica de la sección debe ser igual a la de la línea principal. Aunque factible en teoría, una sección en serie entraña dificultades de uso. Por su parte, una sección en circuito abierto emite cierta energía a altas frecuencias. Por tanto, es preferible emplear secciones paralelas derivadas en cortocircuito.

Puesto que el propósito es que $Z_{ent} = Z_o$, es decir que $z_{ent} = 1$ o $y_{ent} = 1$ en el punto A de la línea, primero se traza el lugar geométrico $y = 1 + jb$ (círculo $r = 1$) en el diagrama de Smith, como se indica en la figura 11.20. Si se introduce en A una sección de línea en derivación de admitancia $y_s = -jb$, entonces

$$y_{ent} = 1 + jb + y_s = 1 + jb - jb = 1 + j0 \tag{11.59}$$

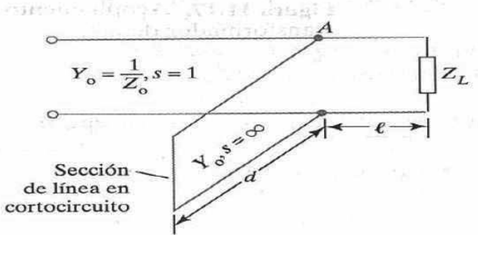


Figura 11.19. Acoplamiento con un sintonizador de sección de línea única.

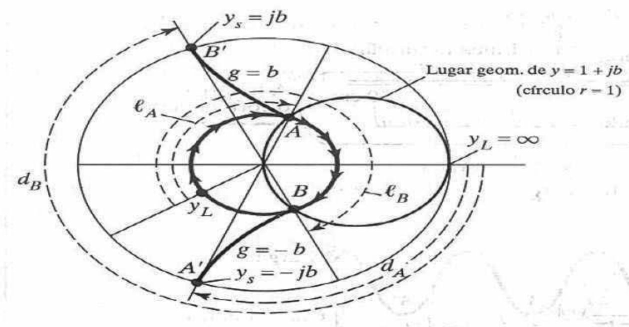


Figura 11.20. Uso del diagrama de Smith para determinar ℓ y d de un sintonizador de sección de línea única en cortocircuito y en derivación.

como es de desear. Puesto que b podría ser positiva o negativa, en la línea pueden hallarse dos posibles valores de ℓ ($<\lambda/2$). En A, $y_s = -jb$, $\ell = \ell_A$ y en B $y_s = jb$, $\ell = \ell_B$, como se muestra en la figura 11.20. En vista de que la sección de línea está en corto ($y'_L = \infty$), su longitud d se determina hallando la distancia de P_{cc} (en el cual $z'_L = 0 + j0$) a la admitancia requerida de la sección y_s. En lo que se refiere a la sección en A, $d = d_A$ se obtiene como la distancia de P a A', donde A' corresponde a $y_s = -jb$, situado en la periferia del diagrama, como se advierte en la figura. De igual manera, $d = d_B$ se obtiene como la distancia de P_{cc} a B' ($y_s = jb$).

Se obtienen así $d = d_A$ y $d = d_B$, correspondientes a A y B, respectivamente, como se observa en la figura 11.20. Repárese en que es invariable que $d_A + d_B = \lambda/2$. Entre las dos posibles secciones en derivación, normalmente se opta por acoplar la más corta o la más cercana a la carga. Cuando se opta por dos secciones en la línea en lugar de una sola sección derivada, se efectúa un acoplamiento con *doble sección de línea*, en el cual se tiene en cuenta el ajuste de la impedancia de la carga.

C. Línea ranurada (medición de la impedancia)

A altas frecuencias es muy difícil medir la corriente y el voltaje, ya que el tamaño de los dispositivos de medición aumenta excesivamente y cada circuito se convierte en una línea de transmisión. La línea ranurada es un dispositivo simple para determinar la impedancia de una carga desconocida en altas frecuencias, hasta la región de los gigahertz. Consiste en una sección de línea en el aire (sin pérdidas) con una ranura en el conductor externo, como se advierte en la figura 11.21. Una sonda en la línea a lo largo del campo **E** (fig. 11.4) muestrea este campo, lo que permite medir la diferencia de potencial entre el propio sensor y su revestimiento externo.

La línea ranurada suele emplearse junto con el diagrama de Smith para determinar la razón de onda estacionaria s (la razón del voltaje máximo al voltaje mínimo) y la impedancia de la carga Z_L. El valor de s se obtiene directamente del detector cuando está conectada la carga. Para hallar el de Z_L, la carga se reemplaza por un cortocircuito y se identifica en la escala la posición de los voltajes mínimos (cuya determinación es más precisa que la de los máximos a causa de la nitidez del punto de cambio). Puesto que las impedancias se repiten cada semilongitud de onda, cualquier voltaje mínimo puede elegirse como punto de referencia de la carga. Posteriormente se determina la

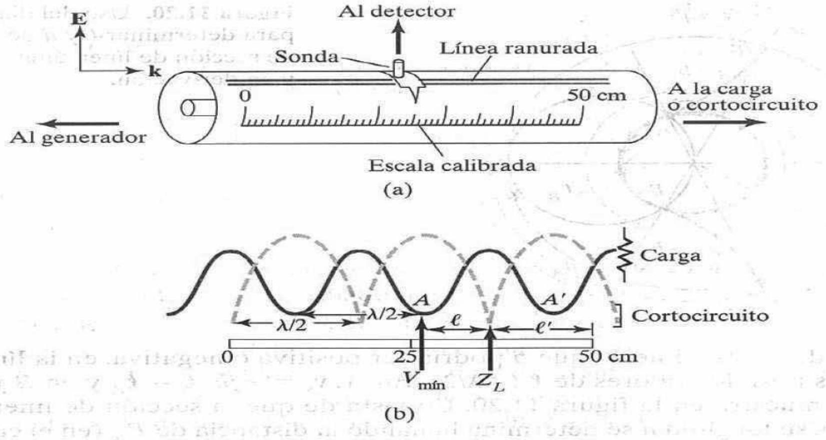


Figura 11.21. **(a)** Línea ranurada común; **(b)** determinación de la ubicación de la impedancia de la carga Z_L y de $V_{mín}$ en la línea.

distancia del punto de referencia a la carga reemplazando el cortocircuito por la carga e identificando la posición de los voltajes mínimos. La distancia ℓ (la distancia de $V_{mín}$ a la carga) en términos de λ permite ubicar la posición de la carga de un círculo s en el diagrama, como se muestra en la figura 11.22. La carga también podría localizarse mediante ℓ', la distancia de $V_{mín}$ al generador. Así, para localizar ℓ es posible utilizar ℓ' o Z_L.

En síntesis, el procedimiento de empleo de la línea ranurada es el siguiente:

1. Conectada la carga, se obtiene s en el detector, valor con el que se traza el círculo s en el diagrama de Smith.
2. Tras reemplazar la carga por un cortocircuito, se elige una posición de voltaje mínimo como punto de referencia de z_L.
3. Nuevamente conectada la carga, se identifica la posición de $V_{mín}$ y se determina ℓ.
4. En el diagrama de Smith, se avanza hacia la carga una distancia ℓ desde la ubicación de $V_{mín}$ y se halla Z_L en ese punto.

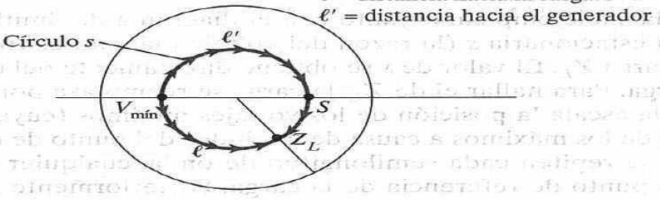


Figura 11.22. Determinación de la impedancia de la carga con base en el diagrama de Smith empleando los datos obtenidos en la línea ranurada.

Ejemplo 11.6

Un indicador de onda estacionaria registra $s = 2$ en una línea ranurada en el aire conectada a una carga desconocida, en tanto que la escala ubica los mínimos en 11 cm, 19 cm, . . . Reemplazada la carga por un cortocircuito, los mínimos se sitúan en 16 cm, 24 cm, . . . Si $Z_o = 50\ \Omega$, calcule λ, f y Z_L.

Solución:

Considérense los patrones de onda estacionaria que aparecen en la figura 11.23*(a)*. De ella se deduce que

$$\frac{\lambda}{2} = 19 - 11 = 8 \text{ cm} \qquad \text{o} \qquad \lambda = 16 \text{ cm}$$

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{16 \times 10^{-2}} = 1.875 \text{ GHz}$$

En términos eléctricos, la carga puede situarse a 16 cm o 24 cm. Si la suponemos a 24 cm, se encuentra a una distancia ℓ de $V_{mín}$, donde

$$\ell = 24 - 19 = 5 \text{ cm} = \frac{5}{16}\lambda = 0.3125\ \lambda$$

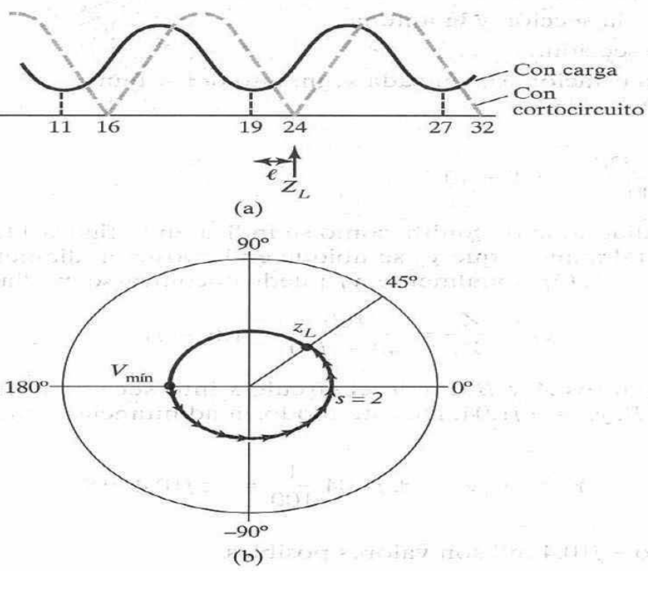


Figura 11.23. Determinación de Z_L mediante una línea ranurada: **(a)** patrón de ondas, **(b)** diagrama de Smith para el ejemplo 11.6.

Esto corresponde a un desplazamiento angular de 0.3125 × 720° = 225° en el círculo $s = 2$. Partiendo de la posición de $V_{\text{mín}}$ y avanzando 225° hacia la carga (en dirección contraria a la de las manecillas del reloj), se llega a la ubicación de z_L, como se ilustra en la figura 11.23*(b)*. Así,

$$z_L = 1.4 + j0.75$$

y

$$Z_L = Z_o z_L = 50\ (1.4 + j0.75) = 70 + j37.5\ \Omega$$

Ejercicio 11.6

Las siguientes medidas se tomaron usando la técnica de la línea ranurada: con carga, $s = 1.8$, $V_{\text{máx}}$ ocurrió en 23 cm, 33.5 cm, . . .; con cortocircuito, $s = \infty$, $V_{\max}$ ocurrió en 25 cm, 37.5 cm, . . . Si $Z_o = 50\ \Omega$, determine Z_L.

Respuesta: $32.5 - j17.5\ \Omega$.

Ejemplo 11.7

Una antena con impedancia $40 + j30\ \Omega$ debe ser acoplada con una línea sin pérdidas de 100 Ω mediante una sección de línea en corto. Determine

a) La admitancia requerida de la sección de línea.
b) La distancia entre la sección y la antena.
c) La longitud de la sección.
d) La razón de onda estacionaria en cada segmento del sistema.

Solución:

a) $$z_L = \frac{Z_L}{Z_o} = \frac{40 + j30}{100} = .04 + j0.3$$

Se localiza z_L en el diagrama de Smith, como se indica en la figura 11.24, y desde ahí se traza el círculo s de tal manera que y_L se ubique en la posición diametralmente opuesta a z_L. Así, $y_L = 1.6 - j1.2$. Opcionalmente, y_L puede encontrarse mediante

$$y_L = \frac{Z_o}{Z_L} = \frac{100}{40 + j30} = 1.6 - j1.2$$

Se determinan los puntos A y B donde el círculo s interseca con el círculo $g = 1$. En A, $y_s = -j1.04$ y en B, $y_s = +j1.04$. De este modo, la admitancia requerida de la sección de línea es

$$Y_s = Y_o y_s = \pm j1.04\,\frac{1}{100} = \pm j10.4\ \text{m}S$$

Tanto $j10.4$ mS como $-j10.4$ mS son valores posibles.

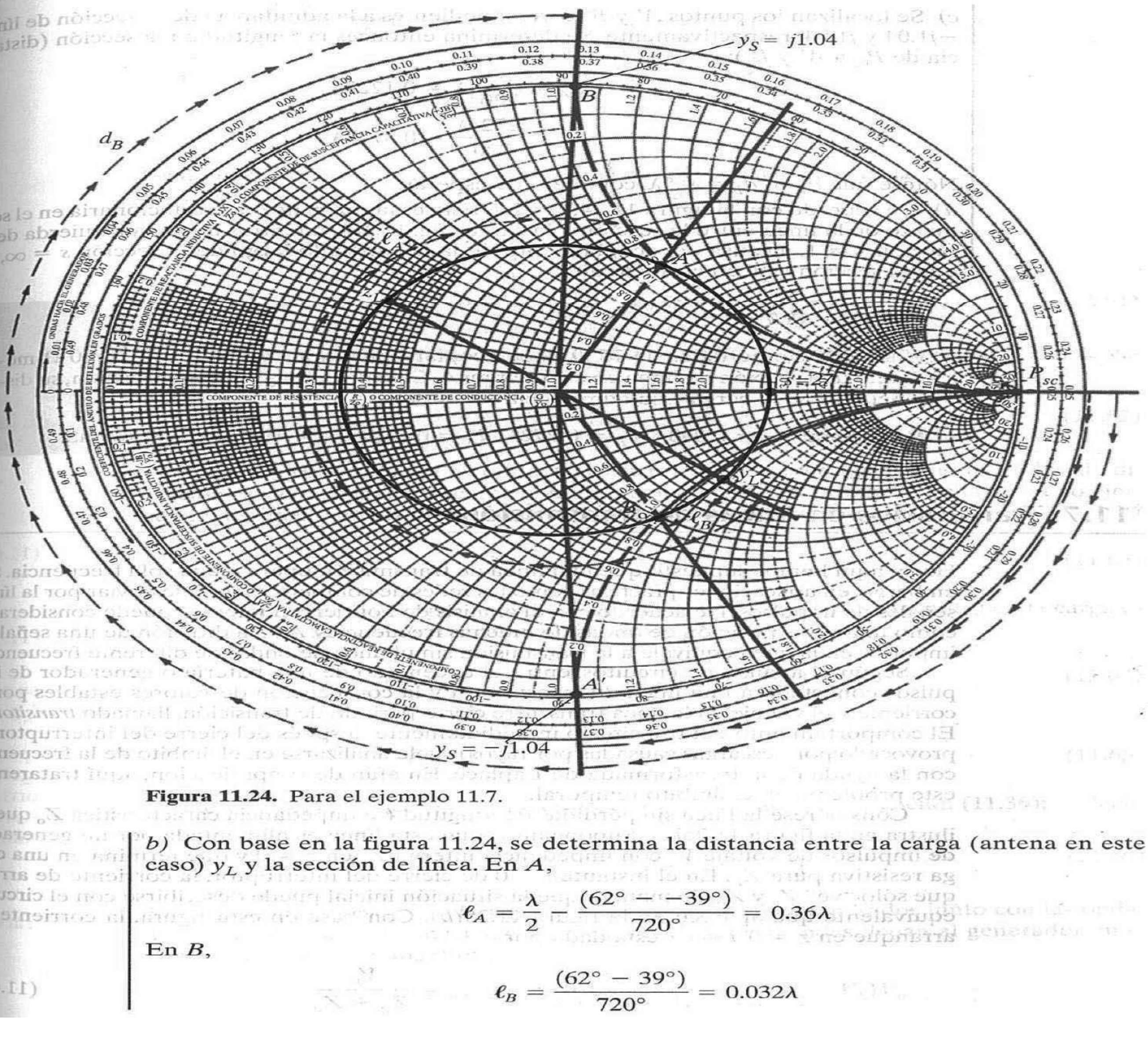


Figura 11.24. Para el ejemplo 11.7.

b) Con base en la figura 11.24, se determina la distancia entre la carga (antena en este caso) y_L y la sección de línea. En A,

$$\ell_A = \frac{\lambda}{2} - \frac{(62^\circ - 39^\circ)}{720^\circ} = 0.36\lambda$$

En B,

$$\ell_B = \frac{(62^\circ - 39^\circ)}{720^\circ} = 0.032\lambda$$

c) Se localizan los puntos A' y B' correspondientes a la admitancia de la sección de línea $-j1.04$ y $j1.04$, respectivamente. Se determina entonces la longitud de la sección (distancia de P_{cc} a A' y B'):

$$d_A = \frac{88°}{720°}\lambda = 0.1222\lambda$$

$$d_B = \frac{272°\lambda}{720°} = 0.3778\lambda$$

Nótese que $d_A + d_B = 0.5\lambda$, como era de esperar.

d) De acuerdo con la figura 11.24, $s = 2.7$. Ésta es la razón de onda estacionaria en el segmento de la línea entre la sección y la carga (fig. 11.18), mientras que a la izquierda de la sección $s = 1$, a causa del acoplamiento de la línea, y a lo largo de la sección $s = \infty$, ya que la sección está en cortocircuito.

Ejercicio 11.7

Una línea sin pérdidas de 75 Ω debe acoplarse con una carga de $100 - j80$ Ω mediante una sección de línea en cortocircuito. Calcule la longitud de la sección, su distancia desde la carga y su admitancia requerida.

Respuesta: $\ell_A = 0.093\lambda$, $\ell_B = 0.272\lambda$, $d_A = 0.126\lambda$, $d_B = 0.374\lambda$, $\pm j12.67$ mS.

†11.7. Transitorios en líneas de transmisión

Hasta aquí hemos supuesto que una línea de transmisión opera a una sola frecuencia. Sin embargo, en aplicaciones prácticas como las redes de cómputo es posible enviar por la línea señales de impulsos. De acuerdo con el análisis de Fourier, un impulso puede considerarse como una superposición de ondas de muchas frecuencias. Así, la difusión de una señal de impulsos en la línea equivale a la transmisión simultánea de ondas de diferente frecuencia.

Según el análisis de circuitos, entre el encendido de una batería o generador de impulsos conectado a una línea de transmisión y la consecución de valores estables por la corriente y el voltaje en la línea transcurre cierto periodo de transición, llamado *transitorio*. El comportamiento del transitorio inmediatamente después del cierre del interruptor (o provocado por descargas causadas por rayos) suele analizarse en el ámbito de la frecuencia con la ayuda de la transformada de Laplace. En afán de simplificación, aquí trataremos este problema en el ámbito temporal.

Considérese la línea sin pérdidas de longitud ℓ e impedancia característica Z_o que se ilustra en la figura 11.25*(a)*. Supongamos que esta línea es alimentada por un generador de impulsos de voltaje V_g con impedancia interna Z_g en $z = 0$ y que termina en una carga resistiva pura Z_L. En el instante $t = 0$ de cierre del interruptor, la corriente de arranque sólo "ve" Z_g y Z_o, de manera que la situación inicial puede describirse con el circuito equivalente que aparece en la figura 11.25*(b)*. Con base en esta figura, la corriente de arranque en $z = 0$, $t = 0^+$ está dada por

$$I(0, 0^+) = I_o = \frac{V_g}{Z_g + Z_o} \tag{11.60}$$

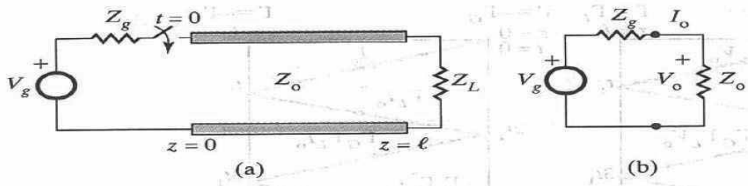


Figura 11.25. Transitorios en una línea de transmisión: **(a)** línea alimentada por un generador de impulsos, **(b)** circuito equivalente en $z = 0, t = 0^+$.

y el voltaje inicial es

$$V(0, 0^+) = V_o = I_o Z_o = \frac{Z_o}{Z_g + Z_o} V_g \tag{11.61}$$

Tras cerrar el interruptor, las ondas $I^+ = I_o$ y $V^+ = V_o$ se propagan hacia la carga a la velocidad

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.62}$$

Puesto que esta velocidad es finita, transcurre cierto tiempo hasta que las ondas, de dirección positiva, llegan a la carga e interactúan con ella. La presencia de la carga no ejerce ningún efecto en las ondas antes del periodo de transición, dado por

$$t_1 = \frac{\ell}{u} \tag{11.63}$$

Las ondas llegan a la carga luego de t_1 segundos. El voltaje (o la corriente) en la carga es la suma de los voltajes (o corrientes) incidente y reflejado. Así,

$$V(\ell, t_1) = V^+ + V^- = V_o + \Gamma_L V_o = (1 + \Gamma_L)V_o \tag{11.64}$$

y

$$I(\ell, t_1) = I^+ + I^- = I_o - \Gamma_L I_o = (1 - \Gamma_L)I_o \tag{11.65}$$

donde Γ_L es el coeficiente de reflexión de la carga, dado en la ecuación (11.36); es decir,

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \tag{11.66}$$

Las ondas reflejadas $V^- = \Gamma_L V_o$ e $I^- = -\Gamma_L I_o$ vuelven al generador junto con las ondas V_o e I_o que ya se encuentran en la línea. Las ondas reflejadas llegan al generador en el instante $t = 2t_1$, de manera que

$$V(0, 2t_1) = V^+ + V^- = \Gamma_G \Gamma_L V_o + (1 + \Gamma_L)V_o$$

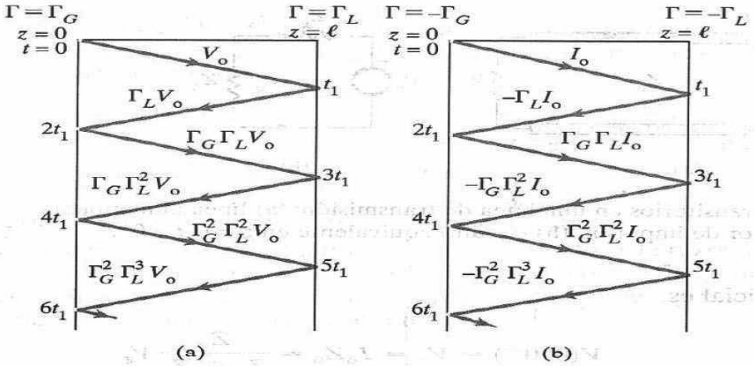


Figura 11.26. Diagrama de rebote de **(a)** una onda de voltaje y **(b)** una onda de corriente.

o

$$V(0, 2t_1) = (1 + \Gamma_L + \Gamma_G \Gamma_L)V_o \tag{11.67}$$

e

$$I(0, 2t_1) = I^+ + I^- = -\Gamma_G(-\Gamma_L I_o) + (1 - \Gamma_L)I_o$$

o

$$I(0, 2t_1) = (1 - \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_G)I_o \tag{11.68}$$

donde Γ_G es el coeficiente de reflexión del generador, dado por

$$\Gamma_G = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} \tag{11.69}$$

Las ondas reflejadas (en el extremo del generador) $V^+ = \Gamma_G \Gamma_L V_o$ e $I^+ = \Gamma_G \Gamma_L I_o$ se propagan de nuevo hacia la carga, y el proceso continúa hasta que los resistores Z_g y Z_L absorben la energía del impulso.

Rastrear los reflejos en un *diagrama de rebote* o *reticular* es más sencillo que perseguir las ondas de voltaje y corriente en su trayecto de un extremo a otro. Tal diagrama consta de una línea en zigzag que indica la posición de la onda de voltaje (o de corriente) respecto del extremo del generador, como se ilustra en la figura 11.26. Para determinar el valor del voltaje (o de la corriente) en cualquier momento, basta añadir los valores asignados en el diagrama al momento respectivo.

Ejemplo 11.8 Con referencia a la línea de transmisión que aparece en la figura 11.27, calcule y trace

a) El voltaje en los extremos de la carga y el generador en $0 < t < 6\ \mu s$.

b) La corriente en los extremos de la carga y el generador en $0 < t < 6\ \mu s$.

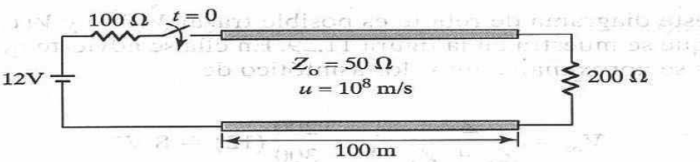


Figura 11.27. Para el ejemplo 11.8.

Solución:

a) Se calculan primero los coeficientes de reflexión por voltaje en los extremos del generador y la carga.

$$\Gamma_G = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \frac{200 - 50}{200 + 50} = \frac{3}{5}$$

El periodo de transición $t_1 = \dfrac{\ell}{u} = \dfrac{100}{10^8} = 1 \mu\text{s}$.

El voltaje inicial en el extremo del generador es

$$V_o = \frac{Z_o}{Z_o + Z_g} V_g = \frac{50}{150}(12) = 4 \text{ V}$$

Remitidos a la carga estos 4 V, la punta del impulso llega a la carga en $t = t_1 = 1\ \mu$s. Luego de ser reflejada una porción del impulso, 4(3/5) = 2.4 V, ésta llega al generador en $t = 2t_1 = 2\ \mu$s. En el generador se refleja 2.4(1/3) = 0.8 y así sucesivamente. El proceso completo se ilustra en el diagrama de rebote del voltaje que aparece en la figura 11.28.

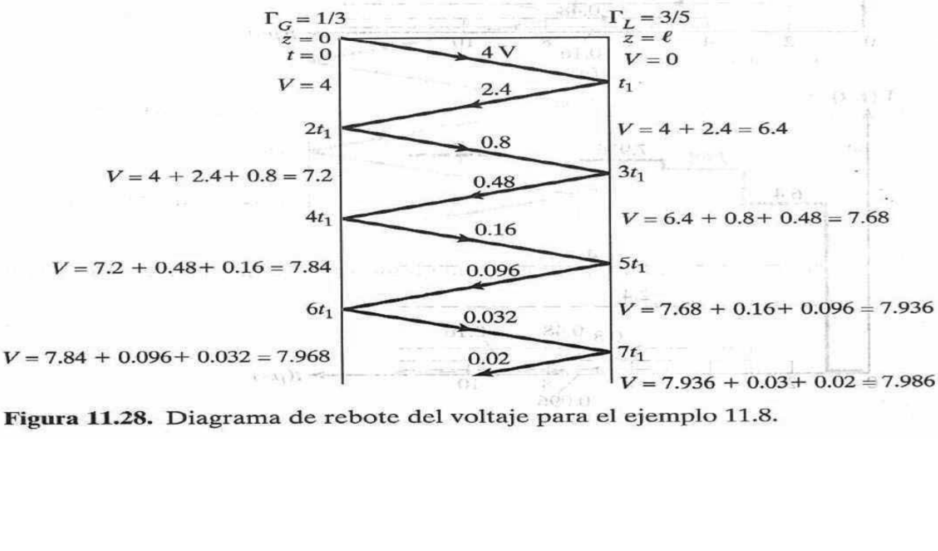


Figura 11.28. Diagrama de rebote del voltaje para el ejemplo 11.8.

Con base en este diagrama de rebote es posible trazar $V(0, t)$ y $V(\ell, t)$ como funciones de tiempo, lo que se muestra en la figura 11.29. En ella se advierte que, a medida que $t \rightarrow \infty$, los voltajes se aproximan a un valor asintótico de

$$V_\infty = \frac{Z_L}{Z_L + Z_g} V_g = \frac{200}{300}(12) = 8 \text{ V}$$

Esto era de esperar, dados los circuitos equivalentes en $t = 0$ y $t = \infty$ que se presentan en la figura 11.30 (véase el problema 11.46 para efectos de comprobación).

b) El coeficiente de reflexión por corriente en los extremos del generador y la carga es $-\Gamma_G = -1/3$ y $-\Gamma_L = -3/5$, respectivamente. La corriente inicial es

$$I_o = \frac{V_o}{Z_o} = \frac{4}{50} = 80 \text{ mA}$$

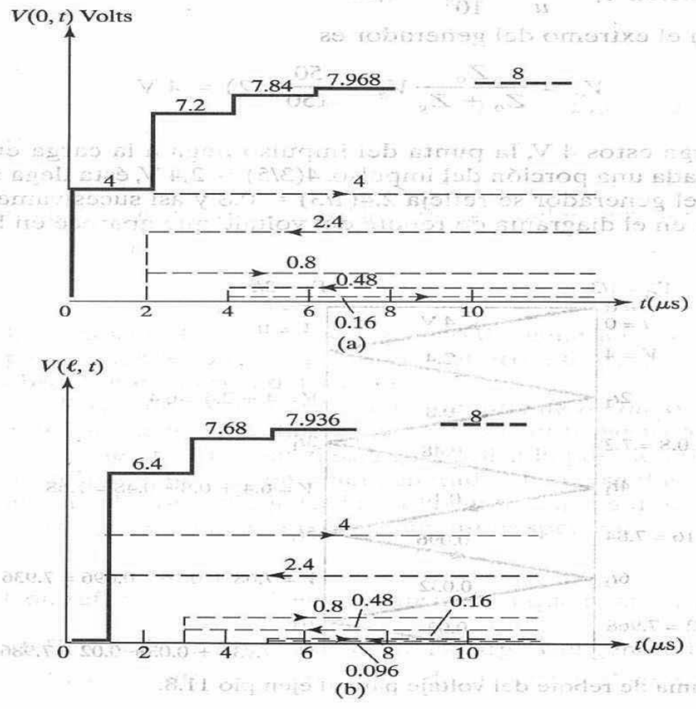


Figura 11.29. Voltaje (fuera de escala): **(a)** en el extremo del generador, **(b)** en el extremo de la carga.

Figura 11.30. Circuitos equivalentes a la línea de la figura 11.27 en **(a)** $t = 0$ y **(b)** $t = \infty$.

También $I(0, t)$ e $I(\ell, t)$ se obtienen fácilmente del diagrama de rebote, esta vez referido a la corriente, el cual se muestra en la figura 11.31, mientras que en la figura 11.32 se les diagrama como funciones de tiempo. Cabe hacer notar que $I(\ell, t) = V(\ell, t)/Z_L$. Por tanto, la figura 11.32*(b)* puede obtenerse ya sea del diagrama de rebote de la corriente de la figura 11.31 o reproduciendo a escala la figura 11.29*(b)* por un factor de $1/Z_L = 1/200$. En las figuras 11.30*(b)* y 11.32 se observa que las corrientes se aproximan a un valor asintótico de

$$I_\infty = \frac{V_g}{Z_g + Z_L} = \frac{12}{300} = 40 \text{ mA}$$

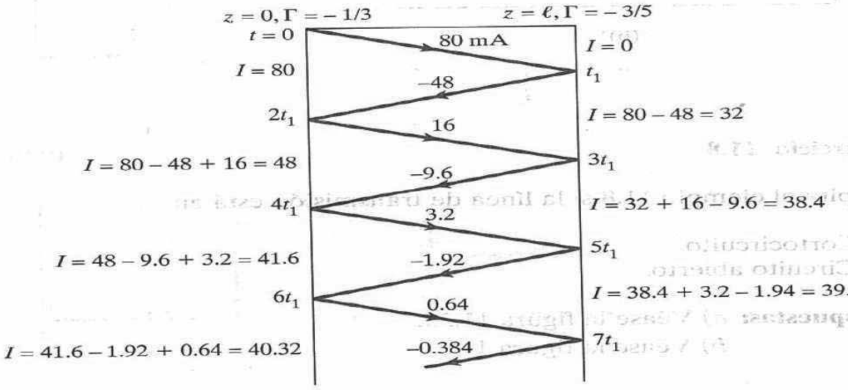


Figura 11.31. Diagrama de rebote de la corriente para el ejemplo 11.8.

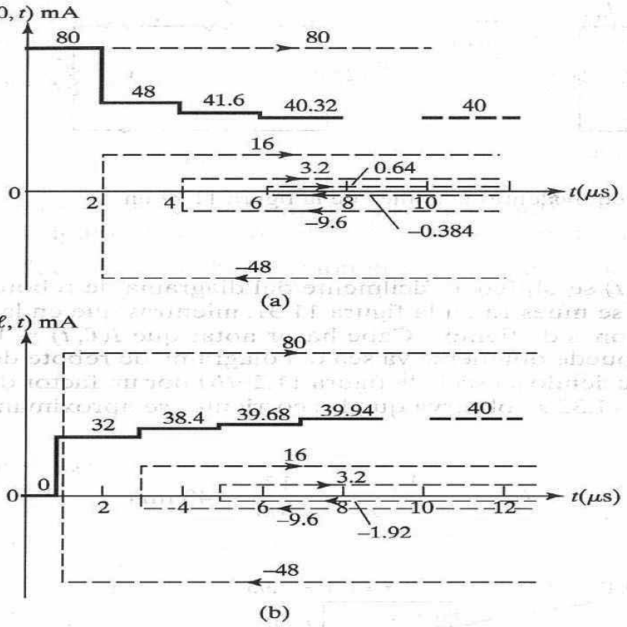


Figura 11.32. Corriente (fuera de escala): **(a)** en el extremo del generador, **(b)** en el extremo de la carga, para el ejemplo 11.8.

Ejercicio 11.8

Repita el ejemplo 11.8 si la línea de transmisión está en

a) Cortocircuito.
b) Circuito abierto.

Respuestas: *a)* Véase la figura 11.33.
b) Véase la figura 11.34.

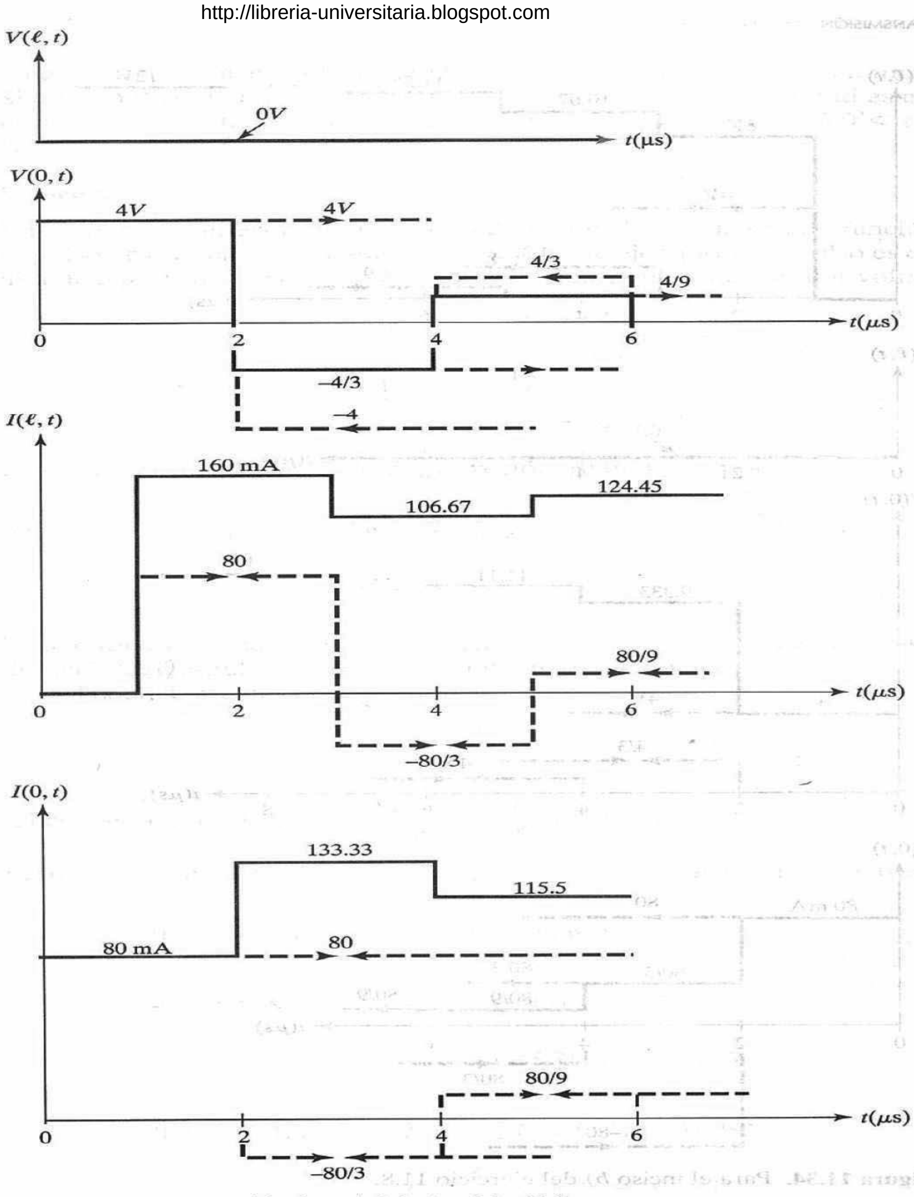


Figura 11.33. Para el inciso *a)* del ejercicio 11.8.

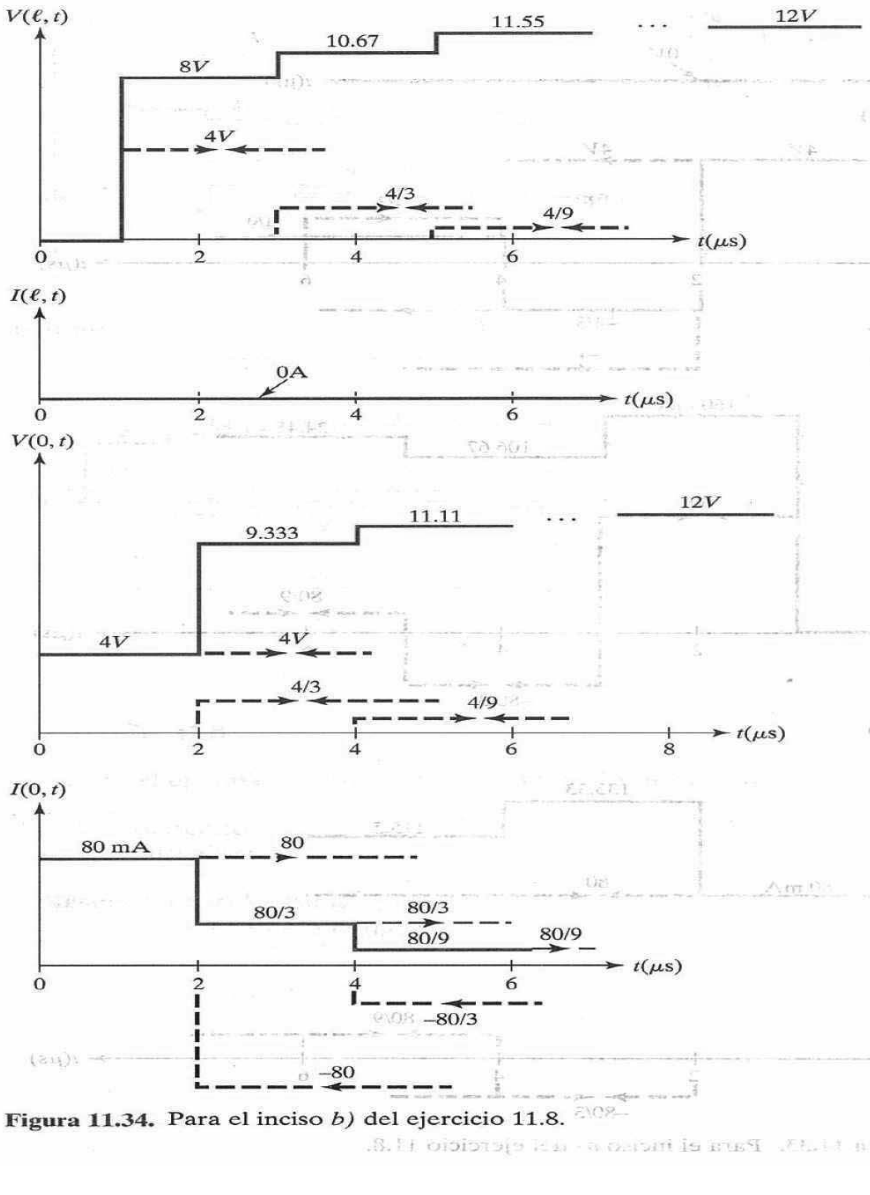


Figura 11.34. Para el inciso *b)* del ejercicio 11.8.

Ejemplo 11.9

Una línea de transmisión de 75 Ω y 60 m de longitud termina en una carga de 100 Ω. Si un impulso rectangular de 5 μs de duración y 4 V de magnitud es emitido por el generador conectado a la línea, trace $I(0, t)$ e $I(\ell, t)$ con relación a $0 < t < 15$ μs. Adopte $Z_g = 25$ Ω y $u = 0.1c$.

Solución:

En el ejemplo anterior el encendido de una batería generó una función escalonada, un impulso de duración o anchura infinita. En este ejemplo, el impulso es de una anchura finita de 5 μs. Calculemos primero los coeficientes de reflexión por voltaje:

$$\Gamma_G = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = -\frac{1}{2}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \frac{1}{7}$$

El voltaje inicial y el periodo de transición están dados por

$$V_o = \frac{Z_o}{Z_o + Z_g} V_g = \frac{75}{100}(4) = 3\ V$$

$$t_1 = \frac{\ell}{u} = \frac{60}{0.1\,(3 \times 10^8)} = 2\ \mu\text{s}$$

El tiempo que tarda V_o en su trayecto de un extremo a otro es $2t_1 = 4$ μs, menor que la duración del impulso, de 5 μs. Por tanto, habrá empalme.

El coeficiente de reflexión por corriente es

$$-\Gamma_L = -\frac{1}{7} \qquad \text{y} \qquad -\Gamma_G = \frac{1}{2}$$

La corriente inicial $I_o = \dfrac{V_g}{Z_g + Z_o} = \dfrac{4}{100} = 40$ mA.

Sean i y r los impulsos incidente y reflejado, respectivamente. En el extremo del generador:

$$0 < t < 5\ \mu\text{s}, \qquad I_r = I_o = 40\ \text{mA}$$

$$4 < t < 9, \qquad I_i = -\frac{1}{7}(40) = -5.714$$

$$I_r = \frac{1}{2}(-5.714) = -2.857$$

$$8 < t < 13, \qquad I_i = -\frac{1}{7}(-2.857) = 0.4082$$

$$I_r = \frac{1}{2}(0.4082) = 0.2041$$

$$12 < t < 17, \qquad I_i = -\frac{1}{7}(0.2041) = -0.0292$$

$$I_r = \frac{1}{2}(-0.0292) = -0.0146$$

y así sucesivamente. De esto resulta el diagrama de $I(0, t)$ contra t que aparece en la figura 11.35(a).

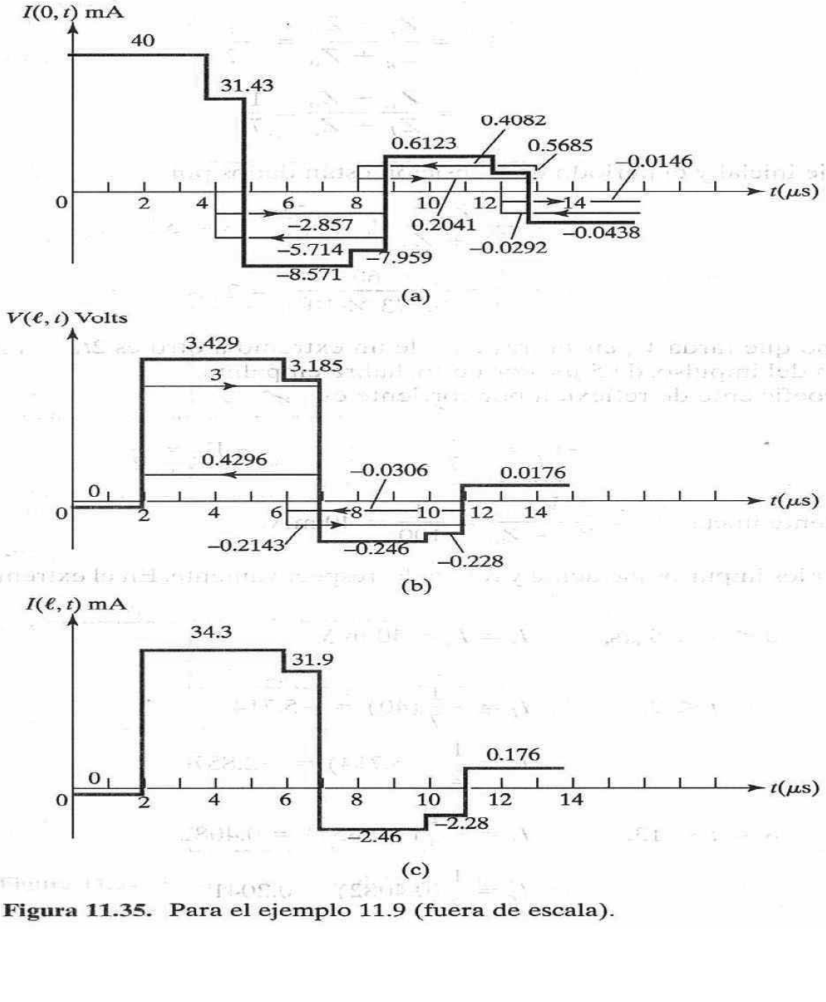


Figura 11.35. Para el ejemplo 11.9 (fuera de escala).

En el extremo de la carga:

$$0 < t < 2\ \mu\text{s}, \qquad V = 0$$

$$2 < t < 7, \qquad V_i = 3$$

$$V_r = \frac{1}{7}(3) = 0.4296$$

$$6 < t < 11, \qquad V_i = -\frac{1}{2}(0.4296) = -0.2143$$

$$V_r = \frac{1}{7}(-0.2143) = -0.0306$$

$$10 < t < 14, \qquad V_i = -\frac{1}{2}(-0.0306) = 0.0154$$

$$V_r = \frac{1}{7}(0.0154) = 0.0022$$

y así sucesivamente. De $V(\ell, t)$ puede obtenerse $I(\ell, t)$, en esta forma:

$$I(\ell, t) = \frac{V(\ell, t)}{Z_o} = \frac{V(\ell, t)}{100}$$

Los diagramas de $V(\ell, t)$ e $I(\ell, t)$ se presentan en las figuras 11.35 *(b)* y *(c)*.

Ejercicio 11.9

Repita el ejemplo 11.9 si el impulso rectangular es reemplazado por el impulso triangular que aparece en la figura 11.36.

Respuesta: $(I_o)_{\text{máx}} = 100$ mA. Véase la figura 11.37 en lo relativo a la forma de las ondas de corriente.

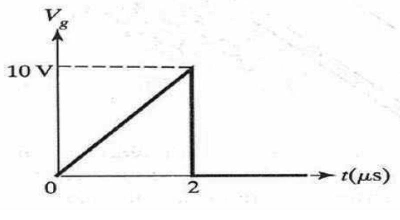


Figura 11.36. Impulso triangular para el ejercicio 11.9.

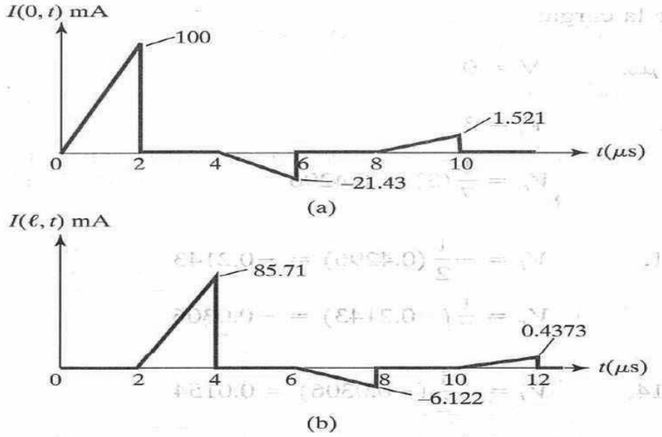


Figura 11.37. Ondas de corriente para el ejercicio 11.9.

†11.8. Líneas de transmisión de microcinta

Las líneas de microcinta pertenecen a la categoría de las líneas de transmisión de placas paralelas y son de amplio uso en la electrónica actual. Además de ser la modalidad más común en líneas de transmisión de circuitos integrados de microondas, las microcintas se utilizan en componentes de circuitos como filtros, acopladores, resonadores, antenas, etc. En comparación con las coaxiales, la líneas de microcinta son más flexibles y de diseño más compacto.

Una línea de microcinta se compone de un plano conectado a tierra y una cinta conductora descubierta separados por un sustrato dieléctrico, como se muestra en la figura 11.38. Se le produce con los mismos procesos fotográficos que se emplean en los circuitos integrados. La deducción analítica de las propiedades características de este tipo de

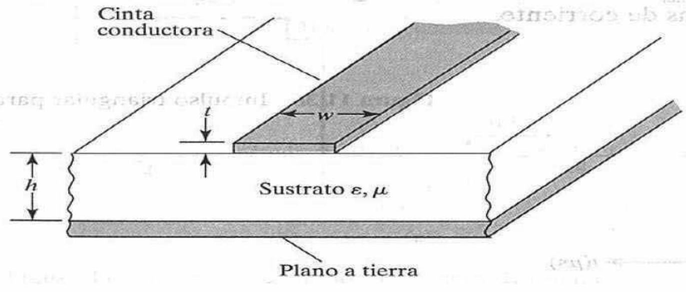


Figura 11.38. Línea de transmisión de microcinta.

líneas es muy compleja. Aquí nos restringiremos a las fórmulas básicas de validez empírica para el cálculo de su velocidad de fase, impedancia y pérdidas.

En virtud de la estructura descubierta de la línea de microcinta, el campo electromagnético no está confinado al dieléctrico, sino que se sitúa parcialmente en el aire circundante, como se observa en la figura 11.39. En tanto la frecuencia no sea demasiado alta, la onda propagada por la línea de microcinta es, para efectos prácticos, una onda ET. A causa del efecto de borde, la *permitividad relativa efectiva* ε_{ef} es menor que la permitividad relativa ε_r del sustrato. Si w es la anchura de la línea y h el grosor del sustrato, un valor aproximado de ε_{ef} está dado por

$$\boxed{\varepsilon_{ef} = \frac{(\varepsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\varepsilon_r - 1)}{2\sqrt{1 + 12h/w}}} \qquad (11.70)$$

La impedancia característica está dada a su vez por las siguientes fórmulas aproximativas:

$$\boxed{Z_o = \begin{cases} \dfrac{60}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \ln\left(\dfrac{8h}{w} + \dfrac{w}{h}\right), & w/h \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \dfrac{120\pi}{[w/h + 1.393 + 0.667 \ln (w/h + 1.444)]}, & w/h \geq 1 \end{cases}} \qquad (11.71)$$

La impedancia característica de una cinta ancha suele ser baja, mientras que la de una cinta angosta es alta.

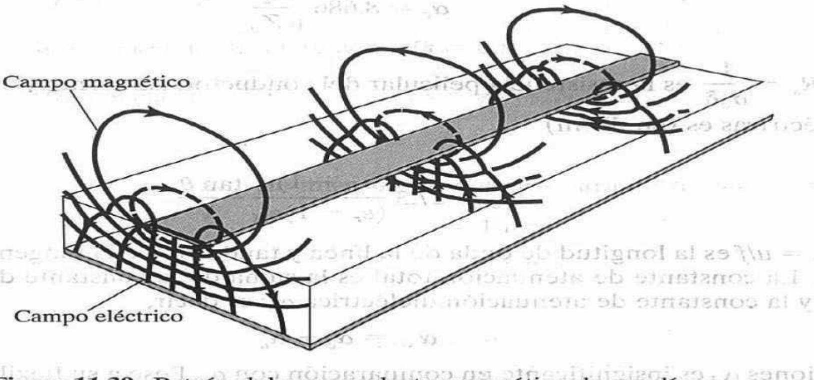


Figura 11.39. Patrón del campo electromagnético de una línea de microcinta. *Fuente*: D. Roddy, *Microwave Technology*, 1986, con autorización de Prentice-Hall.

Para fines de diseño, si ε_r y Z_o son conocidas, la razón w/h necesaria para conseguir Z_o está dada por

$$\frac{w}{h} = \begin{cases} \dfrac{8e^A}{e^{2A} - 2}, & w/h < 2 \\ \dfrac{2}{\pi}\left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) \right. \\ \left. + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r}\left[\ln(B - 1) + 0.39 - \dfrac{0.61}{\varepsilon_r} \right] \right\}, & w/h > 2 \end{cases} \tag{11.72}$$

donde

$$A = \frac{Z_o}{60}\sqrt{\frac{\varepsilon_r - 1}{2}} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left(0.23 + \frac{0.11}{\varepsilon_r}\right) \tag{11.73a}$$

$$B = \frac{60\pi^2}{Z_o\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{11.73b}$$

En conocimiento de ε_{ef} y Z_o, la constante de fase y la velocidad de fase de una onda que se propaga en la microcinta están dadas por

$$\beta = \frac{\omega\varepsilon_{ef}}{c} \tag{11.74a}$$

$$u = \frac{c}{\varepsilon_{ef}} \tag{11.74b}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. La atenuación debida a pérdidas de conducción (u óhmicas) es (en dB/m)

$$\alpha_c \simeq 8.686\,\frac{R_s}{wZ_o} \tag{11.75}$$

donde $R_s = \dfrac{1}{\sigma_c\delta}$ es la resistencia pelicular del conductor. La atenuación debida a pérdidas dieléctricas es (en dB/m)

$$\alpha_d \simeq 27.3\,\frac{(\varepsilon_{ef} - 1)\varepsilon_r}{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_{ef}}\,\frac{\tan\theta}{\lambda} \tag{11.76}$$

donde $\lambda = u/f$ es la longitud de onda de la línea y $\tan\theta = \sigma/\omega\varepsilon$ la tangente de pérdida del sustrato. La constante de atenuación total es la suma de la constante de atenuación óhmica α_c y la constante de atenuación dieléctrica α_d; es decir,

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d \tag{11.77}$$

En ocasiones α_d es insignificante en comparación con α_c. Pese a su flexibilidad y compactación, las líneas de microcinta no son útiles para la transmisión en largas distancias, a causa de su excesiva atenuación.

Ejemplo 11.10

El sustrato de cierta línea de microcinta es de cuarzo ($\varepsilon_r = 3.8$). Si la razón de la anchura de la línea al grosor del sustrato es $w/h = 4.5$, determine

a) **La permitividad relativa efectiva del sustrato.**
b) **La impedancia característica de la línea.**
c) **La longitud de onda de la línea a 10 GHz.**

Solución:

a) Puesto que $w/h = 4.5$, se trata de una cinta ancha. Con base en la ecuación (11.70),

$$\varepsilon_{ef} = \frac{4.8}{2} + \frac{2.8}{2}\left[1 + \frac{12}{4.5}\right]^{-1/2} = 3.131$$

b) A partir de la ecuación (11.71),

$$Z_o = \frac{120\pi}{\sqrt{3.131}\,[4.5 + 1.393 + 0.667\ \ln(4.5 + 1.444)]}$$
$$= 9.576\ \Omega$$

c) $$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{3 \times 10^8}{10^{10}\sqrt{3.131}}$$
$$= 1.69 \times 10^{-2}\ \text{m} = 16.9\ \text{mm}$$

Ejercicio 11.10

Repita el ejemplo 11.10 con $w/h = 0.8$.

Respuestas: *a)* 2.75, *b)* 84.03 Ω y *c)* 18.09 mm.

Ejemplo 11.11

A 10 GHz, una línea de microcinta tiene los parámetros siguientes:

$$h = 1\ \text{mm}$$
$$w = 0.8\ \text{mm}$$
$$\varepsilon_r = 6.6$$
$$\tan\theta = 10^{-4}$$
$$\sigma_c = 5.8 \times 10^7\ \text{S/m}$$

Calcule la atenuación debida a pérdidas de conducción y a pérdidas dieléctricas.

Solución:
La razón $w/h = 0.8$. Así, de acuerdo con las ecuaciones (11.70) y (11.71),

$$\varepsilon_e = \frac{7.2}{2} + \frac{5.6}{2}\left(1 + \frac{12}{0.8}\right)^{-1/2} = 4.3$$

$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{4.3}} \ln\left(\frac{8}{0.8} + \frac{0.8}{4}\right)$$
$$= 67.17\ \Omega$$

La resistencia pelicular del conductor es

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_o}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi \times 10 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}}$$
$$= 2.609 \times 10^{-2}\ \Omega/\text{m}^2$$

Mediante la ecuación (11.75), la constante de atenuación de conducción es

$$\alpha_c = 8.686 \times \frac{2.609 \times 10^{-2}}{0.8 \times 10^{-3} \times 67.17}$$
$$= 4.217\ \text{dB/m}$$

Para hallar la constante de atenuación dieléctrica se precisa de λ.

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{3 \times 10^8}{10 \times 10^9 \sqrt{4.3}}$$
$$= 1.447 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

La aplicación de la ecuación (11.76) resulta en

$$\alpha_d = 27.3 \times \frac{3.492 \times 6.6 \times 10^{-4}}{5.6 \times 4.3 \times 1.447 \times 10^{-2}}$$
$$= 0.1706\ \text{dB/m}$$

Ejercicio 11.11

Calcule la atenuación debida a pérdidas óhmicas a 20 GHz de una línea de microcinta integrada por un conductor de cobre de 2.5 mm de ancho sobre un sustrato de alúmina. Adopte 50 Ω como la impedancia característica de la línea.

Respuesta: 2.564 dB/m.

Resumen

1. Una línea de transmisión es comúnmente descrita por sus parámetros distribuidos R (en Ω/m), L (en H/m), G (en S/m) y C (en F/m). Las fórmulas para el cálculo de R, L, G y C de líneas coaxiales, de dos alambres y planas se proprocionaron en la tabla 11.1.

2. Los parámetros distribuidos se usan en un modelo de circuito equivalente para representar una longitud diferencial de la línea. Las ecuaciones de línea de transmisión se obtienen aplicando las leyes de Kirchhoff y concediendo que la longitud de la línea se aproxima a cero. Las ondas de voltaje y de corriente en la línea son

$$V(z, t) = V_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

$$I(z, t) = \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

lo que indica la existencia en la línea de dos ondas que se desplazan en direcciones opuestas.

3. La impedancia característica Z_o (análoga a la impedancia intrínseca η de las ondas planas en un medio) de una línea está dada por

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

y la constante de propagación γ (por metro) por

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

La longitud de onda y velocidad de onda son

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \qquad u = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda$$

4. El caso general es el de la línea de transmisión disipativa ($G \neq 0 \neq R$), el cual se examinó en primer término. En una línea sin pérdidas, $R = 0 = G$; en una línea sin distorsión, $R/L = G/C$. En la transmisión de energía son de desear líneas sin pérdidas, y líneas sin distorsión en la comunicación telefónica.

5. El coeficiente de reflexión por voltaje en el extremo de la carga se define como

$$\Gamma_L = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$$

en tanto que la razón de onda estacionaria es

$$s = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

donde Z_L es la impedancia de la carga.

6. En cualquier punto de la línea, la razón del voltaje en forma de fasor a la corriente en forma de fasor es la impedancia en ese punto viendo hacia la carga, y sería la impedancia de entrada a la línea si ésta fuera de tal longitud. En una línea disipativa,

$$Z(z) = \frac{V_s(z)}{I_s(z)} = Z_{\text{ent}} = Z_o \left[\frac{Z_L + Z_o \tanh \gamma \ell}{Z_o + Z_L \tanh \gamma \ell} \right]$$

donde ℓ es la distancia de la carga al punto. En una línea sin pérdidas ($\alpha = 0$), $\tanh \gamma \ell = j \tan \beta \ell$; en una línea en cortocircuito, $Z_L = 0$; en una línea en circuito abierto, $Z_L = \infty$, y en una línea acoplada, $Z_L = Z_o$.

7. El diagrama de Smith es un medio gráfico de obtener características de líneas de transmisión como Γ, s y Z_{ent}. Se le elabora dentro de un círculo de radio igual a la unidad y se basa en la fórmula para Γ_L anteriormente referida. Respecto de cada r y x cuenta con dos círculos explícitos (de resistencia y de reactancia) y uno implícito (de s constante). Permite determinar la ubicación de un sintonizador de sección de línea y su longitud, así como, en asociación con una línea ranurada, hallar el valor de la impedancia de una carga desconocida.

8. Cuando en el extremo emisor de una línea se aplica súbitamente un voltaje de corriente directa, un impulso sigue en la línea un trayecto de uno a otro extremos. Los diagramas de rebote son útiles para analizar el comportamiento del transitorio.

9. Las líneas de transmisión de microcinta se emplean en circuitos integrados de microondas. En el texto se presentaron fórmulas para crear líneas de microcinta y determinar sus pérdidas.

Preguntas de repaso

11.1. ¿Cuáles de los enunciados siguientes sobre los parámetros de líneas de transmisión R, L, G y C no son ciertos?

a) R y L son elementos en serie.
b) G y C son elementos en derivación.
c) $G = \dfrac{I}{R}$.
d) $LC = \mu\varepsilon$ y $RG = \sigma\varepsilon$.
e) Tanto R como G dependen de la conductividad de los conductores que componen la línea.
f) Sólo R depende explícitamente de la frecuencia.
g) Estos parámetros no son globales, sino distribuidos.

11.2. En una línea de transmisión disipativa, la impedancia característica no depende de

a) La frecuencia de operación de la línea.
b) La longitud de la línea.
c) La carga en la que termina la línea.
d) La conductividad de los conductores.
e) La conductividad del dieléctrico que separa a los conductores.

11.3. ¿Cuál de las condiciones siguientes no garantizará una línea de transmisión sin distorsión?

a) $R = 0 = G$.
b) $RC = GL$.
c) Un intervalo de muy bajas frecuencias ($R \gg \omega L$, $G \gg \omega C$).
d) Un intervalo de muy altas frecuencias ($R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$).

11.4. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es cierto en una línea sin pérdidas?

a) $Z_{ent} = -jZ_o$ en una línea en cortocircuito con $\ell = \lambda/8$.
b) $Z_{ent} = j\infty$ en una línea en cortocircuito con $\ell = \lambda/4$.

c) $Z_{ent} = jZ_o$ en una línea en circuito abierto con $\ell = \lambda/2$.

d) $Z_{ent} = Z_o$ en una línea acoplada.

e) En una semilongitud de onda de una carga, $Z_{ent} = Z_L$, lo que en lo sucesivo se repite a cada semilongitud de onda.

11.5. Si una línea de transmisión sin pérdidas es de 50 cm de longitud con $L = 10\ \mu$H/m, $C = 40$ pF/m y opera a 30 MHz, su longitud eléctrica es de

a) $20\ \lambda$

b) $0.2\ \lambda$

c) $108°$

d) $40\ \pi$.

e) Ninguno de los valores anteriores.

11.6. Haga coincidir las siguientes impedancias normalizadas con los puntos A, B, C, D y E del diagrama de Smith que se presenta en la figura 11.40.

i) $0 + j0$ *ii)* $1 + j0$

iii) $0 - j1$ *iv)* $0 + j1$

v) $\infty + j\infty$ *vi)* $\left[\dfrac{Z_{ent}}{Z_o}\right]_{mín}$

vii) $\left[\dfrac{Z_{ent}}{Z_o}\right]_{máx}$ *viii)* Carga acoplada ($\Gamma = 0$)

11.7. Una línea de transmisión sin pérdidas de 500 m termina en una carga situada en P en el diagrama de Smith que se presenta en la figura 11.41. Si $\lambda = 150$ m, ¿cuántos voltajes máximos existen en la línea?

a) 7

b) 6

c) 5

d) 3

e) Ninguno

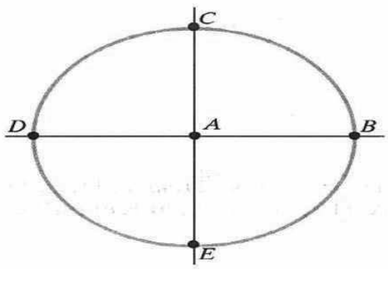


Figura 11.40. Para la pregunta de repaso 11.6.

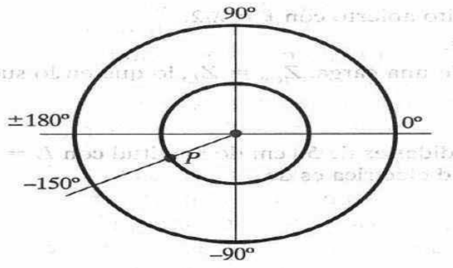


Figura 11.41. Para la pregunta de repaso 11.7.

11.8. Escriba cierto (C) o falso (F) frente a cada uno de los siguientes enunciados.

a) Todos los círculos r y x pasan por el punto $(\Gamma_r, \Gamma_i) = (1, 0)$.

b) Toda impedancia se repite cada $\lambda/4$ en el diagrama de Smith.

c) Un círculo $s = 2$ es igual a un círculo $|\Gamma| = 0.5$ en el diagrama de Smith.

d) El principio básico de cualquier método de acoplamiento es eliminar la onda reflejada entre la fuente y el dispositivo de acoplamiento.

e) Una línea ranurada sólo permite determinar Z_L.

f) En cualquier punto de una línea de transmisión, el coeficiente de reflexión por corriente es el recíproco del coeficiente de reflexión por voltaje en ese punto.

11.9. Si, en una línea en el aire, máximos adyacentes se encuentran en 12.5 cm y 37.5 cm, la frecuencia de operación es de

a) 1.5 GHz

b) 600 MHz

c) 300 MHz

d) 1.2 GHz

11.10. Dos impulsos idénticos de 12 V de magnitud y 2 μs de anchura inciden en $t = 0$ en una línea de transmisión sin pérdidas de 400 m de longitud terminada en una carga. Si están separados por 3 μs (como en el caso de la figura 11.53) y $u = 2 \times 10^8$ m/s, ¿en qué momento la contribución a $V_L(\ell, t)$ del segundo impulso comienza a empalmarse con la del primero?

a) $t = 0.5\ \mu$s

b) $t = 2\ \mu$s

c) $t = 5\ \mu$s

d) $t = 5.5\ \mu$s

e) $t = 6\ \mu$s

Respuestas: 11.1*c*, *d*, e, 11.2*b*, *c*, 11.3*c*, 11.4*a*, *c*, 11.5*c*, 11.6*i)* D, B, *ii)* A, *iii)* E, *iv)* C, *v)* B, *vi)* D, *vii)* B, *viii)* A, 11.7*a*, 11.8*a)* C, *b)* F, *c)* F, *d)* C, *e)* F, *f)* F, 11.9*b*, 11.10*e*.

Problemas

11.1. Una línea plana rellena de aire con $w = 30$ cm, $d = 1.2$ cm, $t = 3$ mm tiene placas conductoras con $\sigma_c = 7 \times 10^7$ S/m. Calcule R, L, C y G a 500 MHz.

11.2. Los conductores de cobre de un diodo, de 16 mm de largo y 0.3 mm de radio, están separados por una distancia de 2 mm, como se muestra en la figura 11.42. Halle la capacitancia entre ellos y la resistencia en corriente alterna a 10 MHz.

***11.3.** En la sección 11.3 se mencionó que el circuito equivalente de la figura 11.5 no es el único posible. Demuestre que las ecuaciones (11.4) y (11.6) mantienen validez en los circuitos equivalentes tipo II y tipo T que aparecen en la figura 11.43.

11.4. Cierta línea plana sin pérdidas de 78 Ω no cumple un requerimiento básico. ¿Qué fracción de la anchura de la cinta debería añadirse o eliminarse para obtener una impedancia característica de 75 Ω?

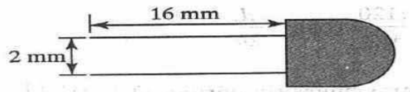


Figura 11.42. Diodo para el problema 11.2.

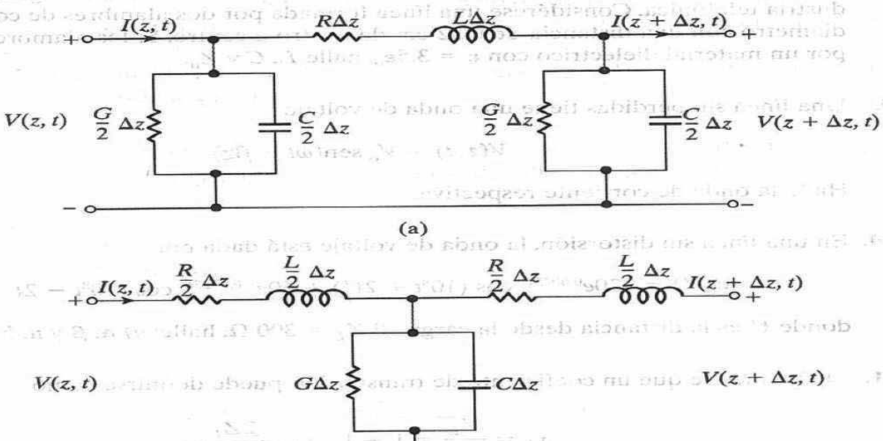


Figura 11.43. Para el problema 11.3: **(a)** circuito equivalente tipo II, **(b)** circuito equivalente tipo T.

11.5. Una línea telefónica posee los parámetros siguientes:

$$R = 40\ \Omega/\text{m}, \qquad G = 400\ \mu\text{S/m}, \qquad L = 0.2\ \mu\text{H/m}, \qquad C = 0.5\ \text{nF/m}$$

a) Si esta línea opera a 10 MHz, calcule la impedancia característica Z_o y la velocidad u.
b) ¿Después de cuántos metros el voltaje se reducirá 30 dB en la línea?

11.6. Una línea sin distorsión que opera a 120 MHz tiene $R = 20\ \Omega/\text{m}$, $L = 0.3\ \mu\text{H/m}$ y $C =$ 63 pF/m. *a)* Determine γ, u y Z_o. *b)* ¿Qué distancia recorrerá una onda de voltaje antes de reducirse a 20% de su magnitud inicial? *c)* ¿Qué distancia recorrerá antes de registrar un cambio de fase de 45°?

11.7. Con referencia a una línea de transmisión sin pérdidas de dos alambres, demuestre que

a) La velocidad de fase $u = c = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

b) La impedancia característica $Z_o = \dfrac{120}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cosh^{-1} \dfrac{d}{2a}$

¿El inciso *a)* es cierto con relación a otras líneas sin pérdidas?

11.8. Las líneas de par trenzado, semejantes a las de dos alambres, son de gran utilidad en la industria telefónica. Considérese una línea formada por dos alambres de cobre de 0.12 cm de diámetro con una distancia de 0.32 cm de centro a centro. Si los alambres están separados por un material dieléctrico con $\varepsilon = 3.5\varepsilon_o$, halle L, C y Z_o.

11.9. Una línea sin pérdidas tiene una onda de voltaje

$$V(z, t) = V_o \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

Halle la onda de corriente respectiva.

11.10. En una línea sin distorsión, la onda de voltaje está dada por

$$V(\ell') = 120e^{0.0025\ell'} \cos (10^8 t + 2\ell') + 60e^{-0.0025\ell'} \cos (10^8 t - 2\ell')$$

donde ℓ' es la distancia desde la carga. Si $Z_L = 300\ \Omega$, halle: *a)* α, β y u, *b)* Z_o e $I(\ell')$.

11.11. *a)* Demuestre que un coeficiente de transmisión puede definirse como

$$\tau_L = \frac{V_L}{V_o^+} = 1 + \Gamma_L = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_o}$$

b) Halle τ_L cuando la línea termina en: *i)* una carga cuyo valor es nZ_o, *ii)* un circuito abierto, *iii)* un cortocircuito, *iv)* $Z_L = Z_o$ (línea acoplada).

11.12. Los parámetros distribuidos de una línea coaxial de 5.6 m de largo son $R = 6.5\ \Omega/\text{m}$, $L = 3.4\ \mu\text{H/m}$, $G = 8.4$ mS/m y $C = 21.5$ pF/m. Si la línea opera a 2 MHz, calcule la impedancia característica y la duración de la propagación de extremo a extremo.

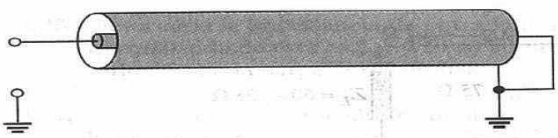


Figura 11.44. Para el problema 11.16.

11.13. Una línea de transmisión sin pérdidas que opera a 4.5 GHz tiene por parámetos $L = 2.4\ \mu$ H/m y $Z_o = 85\ \Omega$. Calcule la constante de fase β y la velocidad de fase u.

11.14. Un cable coaxial de 50 Ω alimenta a una antena de dipolo de $75 + j20\ \Omega$. Halle Γ y s.

11.15. Demuestre que una línea de transmisión disipativa de longitud ℓ tiene una impedancia de entrada $Z_{cc} = Z_o \tanh \gamma\ell$ en cortocircuito y $Z_{ca} = Z_o \coth \gamma\ell$ en circuito abierto. Confirme las ecuaciones (11.37) y (11.39).

11.16. Halle la impedancia de entrada de la línea de transmisión coaxial en cortocircuito de la figura 11.44 si $Z_o = 65 + j38\ \Omega$, $\gamma = 0.7 + j2.5$ /m, $\ell = 0.8$ m.

11.17. Remítase a la línea de transmisión sin pérdidas que aparece en la figura 11.45. *a)* Halle Γ y s. *b)* Determine Z_{ent} en el generador.

11.18. Una línea sin pérdidas de un cuarto de onda de 100 Ω termina en una carga de $Z_L = 210\ \Omega$. Si el voltaje en el extremo receptor es de 80 V, ¿cuál es el voltaje en el extremo emisor?

11.19. Una línea sin pérdidas de 500 Ω tiene $V_L = 10e^{j25°}$ V, $Z_L = 50e^{j30°}$. Halle la corriente en $\lambda/8$ desde la carga.

11.20. Una línea sin pérdidas de 60 Ω está conectada a una fuente con $V_g = 10\underline{/0°}\ V_{rms}$ y $Z_g = 50 - j40\ \Omega$ y termina en una carga de $j40\ \Omega$. Si tiene 100 m de largo y $\beta = 0.25$ rad/m, calcule Z_{ent} y V en

a) El extremo emisor.
b) El extremo receptor.
c) 4 m desde la carga.
d) 3 m desde la fuente.

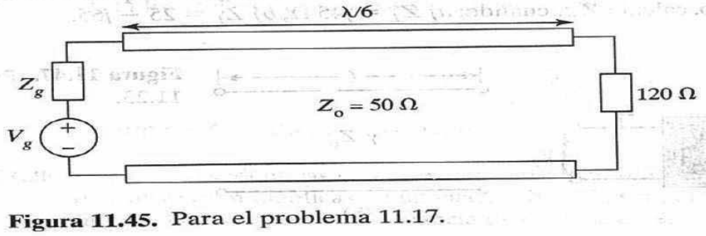


Figura 11.45. Para el problema 11.17.

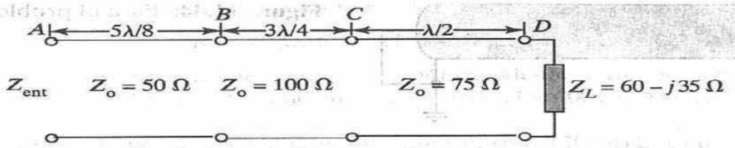


Figura 11.46. Para el problema 11.22.

11.21. Una línea de transmisión sin pérdidas con impedancia característica de 75 Ω termina en una carga de 120 Ω. La longitud de la línea es de 1.25λ. Si la línea está energizada por una fuente de 100 V (rms) con impedancia interna de 50 Ω, determine: *a)* la impedancia de entrada y *b)* la magnitud del voltaje en la carga.

***11.22.** Tres líneas sin pérdidas están conectadas como se muestra en la figura 11.46. Determine Z_{ent}.

***11.23.** Considere la red de dos puertos que se muestra en la figura 11.47*(a)*. La relación entre las variables de entrada y salida puede expresarse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Con referencia a la línea disipativa de la figura 11.47*(b)*, demuestre que la matriz *ABCD* es

$$\begin{bmatrix} \cosh \gamma\ell & Z_o \operatorname{senh} \gamma\ell \\ \dfrac{1}{Z_o} \operatorname{senh} \gamma\ell & \cosh \gamma\ell \end{bmatrix}$$

11.24. Una línea sin pérdidas de 50 Ω tiene 4.2 m de largo. A una frecuencia de operación de 300 MHz, la impedancia de entrada a la mitad de la línea es de $80 - j60\ \Omega$. Halle la impedancia de entrada en el generador y el coeficiente de reflexión por voltaje en la carga. Adopte $u = 0.8c$.

11.25. Si la impedancia de entrada de una línea en el aire de 60 Ω que opera a 20 MHz y tiene 10 m de largo es de $90 + j150\ \Omega$, calcule Z_L, Γ y *s*.

11.26. Una línea de transmisión de 75 Ω termina en una carga de $120 + j80\ \Omega$. *a)* Halle Γ y *s*. *b)* Determine a qué distancia de la carga la impedancia de entrada es puramente resistiva.

11.27. Una línea de transmisión de 75 Ω termina en una carga de impedancia Z_L. Si la línea es de 5λ/8 de largo, calcule Z_{ent} cuando: *a)* $Z_L = j45\ \Omega$, *b)* $Z_L = 25 - j65$.

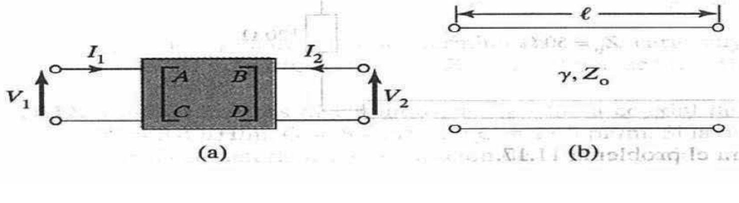


Figura 11.47. Para el problema 11.23.

11.28. Determine la impedancia de entrada normalizada en $\lambda/8$ desde la carga si: *a)* la impedancia normalizada de ésta es $2 + j$, *b)* su admitancia normalizada es $0.2 - j0.5$, *c)* el coeficiente de reflexión en la carga es $0.3 + j0.4$.

11.29. Una línea de transmisión termina en una carga con admitancia $Y_L = (0.6 + j0.8)/Z_o$. Halle la impedancia de entrada normalizada en $\lambda/6$ desde la carga.

11.30. Una línea de transmisión de 80 Ω que opera a 12 MHz termina en una carga Z_L. A 22 m de la carga, la impedancia de entrada es de $100 - j120$ Ω. Si $u = 0.8c$,

a) Calcule Γ_L, $Z_{\text{ent, máx}}$ y $Z_{\text{ent, mín}}$.

b) Halle Z_L, s y la impedancia de entrada a 28 m de la carga.

c) ¿Cuántos $Z_{\text{ent, máx}}$ y $Z_{\text{ent, mín}}$ hay entre la carga y la impedancia de entrada de $100 - j120$ Ω?

11.31. Una antena conectada a una línea sin pérdidas de 150 Ω produce una razón de onda estacionaria de 2.6. Si las mediciones indican que los voltaje máximos están separados por 120 cm y que el último máximo ocurre a 40 cm de la antena, calcule

a) La frecuencia de operación.

b) La impedancia de la antena.

c) El coeficiente de reflexión. Suponga que $u = c$.

11.32. La razón de onda estacionaria observada en una línea sin pérdidas de 100 Ω es 8. Si el primer voltaje máximo ocurre a 0.3λ de la carga, calcule la impedancia de la carga y el coeficiente de reflexión por voltaje en la carga.

11.33. Una línea de 50 Ω termina en una carga de impedancia desconocida. La razón de onda estacionaria $s = 2.4$ en la línea y un voltaje máximo ocurre a $\lambda/8$ de la carga. *a)* Determine la impedancia de la carga. *b)* ¿A qué distancia de la carga se encuentra el primer voltaje mínimo?

11.34. Una línea sin pérdidas de 75 Ω termina en una impedancia de carga Z_L desconocida. Si a una distancia de 0.2λ de la carga el voltaje es de $V_s = 2 + j$ V y la corriente de 10 mA, halle Z_L y s.

11.35. Dos transformadores de $\lambda/4$ conectarán uno tras otro una línea de 50 Ω a una carga de 75 Ω, como se ilustra en la figura 11.48.

a) Determine la impedancia característica Z_{o1} si $Z_{o2} = 30$ Ω y no hay onda reflejada a la izquierda de A.

b) Si los mejores resultados se obtienen cuando

$$\left[\frac{Z_o}{Z_{o1}}\right]^2 = \frac{Z_{o1}}{Z_{o2}} = \left[\frac{Z_{o2}}{Z_L}\right]^2$$

determine Z_{o1} y Z_{o2} para este caso.

11.36. Dos antenas idénticas con impedancia de entrada de 74 Ω son alimentadas por tres líneas de transmisión idénticas de un cuarto de onda sin pérdidas de 50 Ω, como se observa en la figura 11.49. Calcule la impedancia de entrada en el extremo de la fuente.

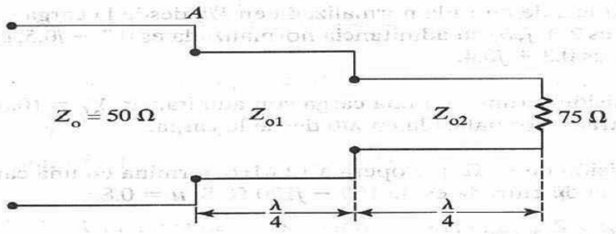


Figura 11.48. Transformador de sección doble para el problema 11.35.

11.37. Si la línea descrita en el problema anterior se conecta a una fuente con un voltaje de 120 V e impedancia interna de 80 Ω, calcule la potencia promedio que recibe cualquier antena.

11.38. Considere las tres líneas sin pérdidas que aparecen en la figura 11.50. Si $Z_o = 50\ \Omega$, calcule:

a) Z_{ent} desde la línea 1.

b) Z_{ent} desde la línea 2.

c) Z_{ent} desde la línea 3.

11.39. Una sección de línea de transmisión sin pérdidas se coloca en derivación en la línea principal, como se indica en la figura 11.51. Si $\ell_1 = \lambda/4$, $\ell_2 = \lambda/8$ y $\ell_3 = 7\lambda/8$, halle y_{ent_1}, y_{ent_2} y y_{ent_3} puesto que $Z_o = 100\ \Omega$, $Z_L = 200 + j150\ \Omega$. Repita los cálculos si la sección en corto fuera abierta.

11.40. Se desea acoplar una línea de 50 Ω con una impedancia de carga de $60 - j50\ \Omega$. Diseñe una sección de línea de 50 Ω que consiga ese acoplamiento. Halle la longitud de la línea y la distancia desde la carga.

11.41. Una sección de línea de 0.12λ de longitud se emplea para acoplar con una carga una línea sin pérdidas de 60 Ω. Si la sección se ubica a 0.3λ de la carga, calcule

a) La impedancia de la carga Z_L.

b) La longitud de una sección de línea opcional y su ubicación respecto de la carga.

c) La razón de onda estacionaria entre la sección y la carga.

11.42. Mediciones realizadas en una línea sin pérdidas indican que $s = 4.2$ con el primer voltaje máximo a $\lambda/4$ de la carga. Determine a qué distancia de la carga debería ubicarse una sección de línea en cortocircuito y calcule su longitud.

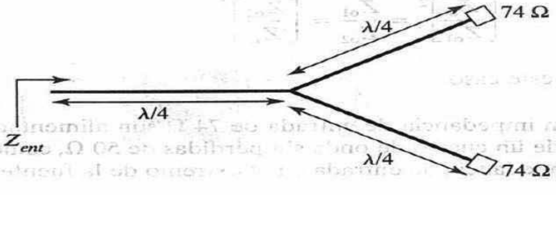


Figura 11.49. Para los problemas 11.36 y 11.37.

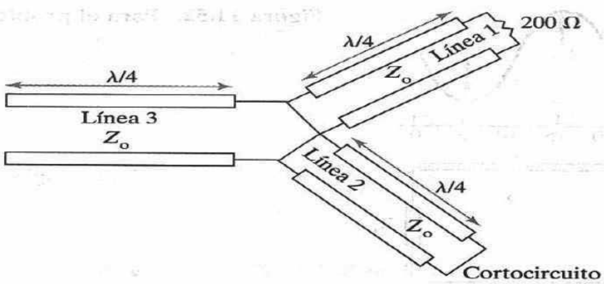


Figura 11.50. Para el problema 11.38.

11.43. Una línea sin pérdidas de 60 Ω que termina en una carga Z_L tiene una onda de voltaje como la que se muestra en la figura 11.52. Halle s, Γ y Z_L.

11.44. Las siguientes medidas procedentes de una línea ranurada corresponden a un sistema de 50 Ω. Con carga: $s = 3.2$ y $V_{\text{mín}}$ adyacentes ocurren en 12 cm y 32 cm (la cifra más alta se presenta del lado de la carga); con cortocircuito: $V_{\text{mín}}$ ocurre en 21 cm. Halle la frecuencia de operación y la impedancia de la carga.

11.45. Una línea ranurada en el aire de 50 Ω se aplica a la medición de una impedancia de carga. Los mínimos adyacentes se encuentran a 14 cm y 22.5 cm de la carga cuando la carga desconocida está conectada y $V_{\text{máx}} = 0.95$ V y $V_{\text{mín}} = 0.45$ V. Cuando la carga es reemplazada por un cortocircuito, los mínimos ocurren a 3.2 cm de la carga. Determine s, f, Γ y Z_L.

****11.46.** Demuestre que en lo relativo a un voltaje de corriente directa V_g activado en $t = 0$ (véase la figura 11.30), los valores asintóticos ($t \ll \ell/u$) de $V(\ell, t)$ e $I(\ell, t)$ son

$$V_\infty = \frac{V_g Z_L}{Z_g + Z_L} \quad \text{e} \quad I_\infty = \frac{V_g}{Z_g + Z_L}$$

11.47. Una línea sin pérdidas de 60 Ω está conectada a un generador de impulsos de 40 Ω. La línea es de 6 m de largo y termina en una carga de 100 Ω. Si un impulso rectangular de 5μ de duración y 20 V de magnitud es emitido en la línea, halle $V(0, t)$ e $I(\ell, t)$ respecto de $0 \leq t \leq 10$ μs. Adopte $u = 3 \times 10^8$ m/s.

11.48. El interruptor que aparece en la figura 11.53 se cierra en $t = 0$. Trace el voltaje y la corriente en el lado derecho del interruptor respecto de $0 < t < 6\ell/u$. Adopte $Z_o = 50$ Ω y $\ell/u = 2$ μs. Suponga una línea de transmisión sin pérdidas.

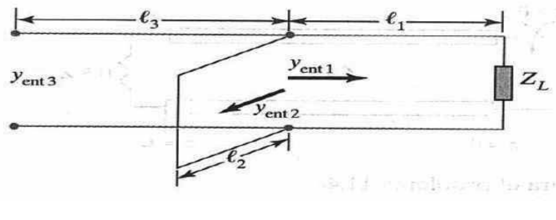


Figura 11.51. Para el problema 11.39.

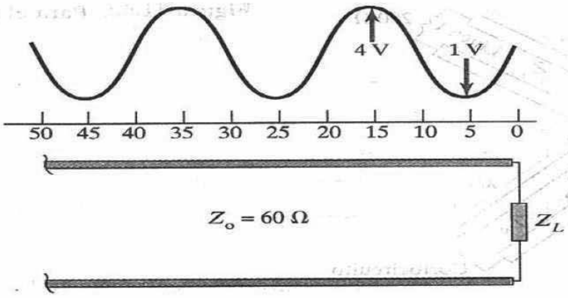


Figura 11.52. Para el problema 11.43.

11.49. Con referencia al sistema que aparece en la figura 11.54, trace $V(\ell, t)$ e $I(\ell, t)$ en el caso de $0 < t < 5\ \mu s$.

***11.50.** Remítase a la figura 11.55, donde $Z_g = 25\ \Omega$, $Z_o = 50\ \Omega$, $Z_L = 150\ \Omega$, $\ell = 150$ m, $u = c$. Si en $t = 0$ el impulso que se muestra en la figura 11.56 incide en la línea,

a) Trace los diagramas de rebote del voltaje y la corriente.

b) Determine $V(0, t)$, $V(\ell, t)$, $I(0, t)$ e $I(\ell, t)$ respecto de $0 < t < 8\ \mu s$.

11.51. Una línea de microcinta tiene 1 cm de grosor y 1.5 cm de ancho. La cinta conductora es de cobre ($\sigma_c = 1.1 \times 10^7$ S/m), mientras que el sustrato es de un material dieléctrico con $\varepsilon_r = 2.2$ y $\tan\theta = 0.002$. Si la línea opera a 2.5 GHz, halle: *a)* Z_o y ε_{ef}, *b)* α_c y α_d, *c)* la distancia que recorrerá la onda en la línea antes de reducirse 20 dB.

11.52. Una línea de microcinta de 50 Ω registra un cambio de fase de 45° a 8 GHz. Si el grosor del sustrato es de $h = 8$ mm con $\varepsilon_r = 4.6$, halle: *a)* la anchura de la cinta conductora, *b)* la longitud de la línea.

11.53. Un sustrato de alúmina ($\varepsilon = 9.6\varepsilon_o$) de 2 mm de grosor se emplea en la elaboración de un circuito de microcinta. Si el diseñador del circuito puede optar por un ancho de entre 0.4 y 8.0 mm para la línea, ¿cuál es el intervalo de la impedancia característica de ésta?

11.54. Diseñe una línea de microcinta de 75 Ω sobre un sustrato de duroide ($\varepsilon_r = 2.3$) de 1.2 mm de grosor. Halle la anchura de la cinta conductora y la velocidad de fase.

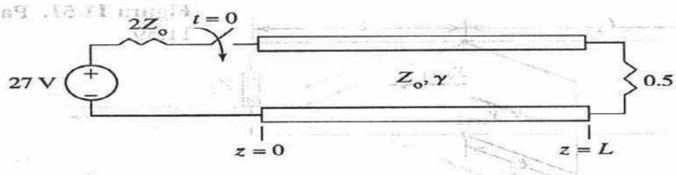


Figura 11.53. Para el problema 11.48.

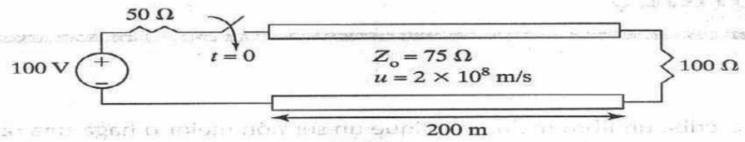


Figura 11.54. Para el problema 11.49.

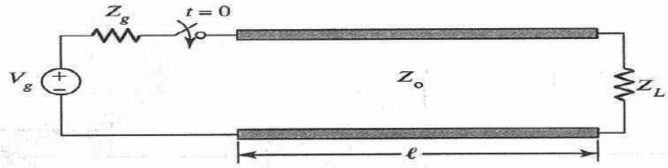


Figura 11.55. Para el problema 11.50.

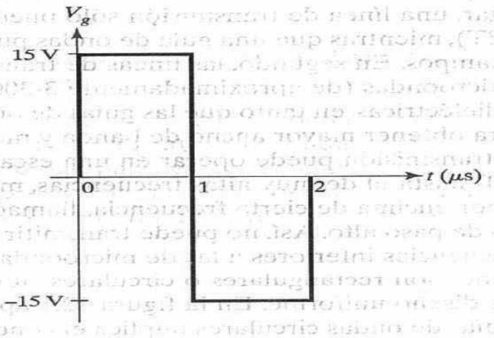


Figura 11.56. Dos impulsos rectangulares para el problema 11.50.

12 Guías de ondas

Aquel que escriba un libro mejor, predique un sermón mejor o haga una ratonera mejor que su vecino, verá llegar al mundo hasta su puerta.

RALPH WALDO EMERSON

12.1. Introducción

Como se mencionó en el capítulo anterior, una línea de transmisión se puede usar para guiar energía electromagnética de un punto (el generador) a otro (la carga). Una guía de ondas hace lo mismo, pero posee algunas diferencias con una línea de transmisión, caso especial de aquélla. En primer lugar, una línea de transmisión sólo puede tolerar ondas electromagnéticas transversales (ET), mientras que una guía de ondas puede tolerar muchas posibles configuraciones de campos. En segundo, las líneas de transmisión llegan a ser ineficientes a frecuencias de microondas (de aproximadamente 3-300 GHz), a causa del efecto pelicular y las pérdidas dieléctricas, en tanto que las guías de ondas se emplean en ese intervalo de frecuencias para obtener mayor ancho de banda y menor atenuación de señal. Por último, una línea de transmisión puede operar en una escala que va desde el nivel de corriente directa ($f = 0$) hasta el de muy altas frecuencias, mientras que una guía de ondas sólo puede operar por encima de cierta frecuencia, llamada *frecuencia de corte*, y actúa por tanto como filtro de paso alto. Así, no puede transmitir corriente directa y su tamaño sería excesivo a frecuencias inferiores a las de microondas.

Las guías de ondas más comunes son rectangulares o circulares, aunque su sección transversal podría ser de cualquier diseño uniforme. En la figura 12.1 aparecen guías de ondas usuales.[1] El análisis de las guías de ondas circulares implica el conocimiento de las funciones de Bessel, tema que rebasa el alcance de este libro.[2] En consecuencia, sólo nos ocuparemos de guías de ondas rectangulares. A partir del supuesto de guías de ondas sin pérdidas ($\sigma_c \simeq \infty, \sigma \approx 0$), aplicaremos las ecuaciones de Maxwell con las condiciones en la frontera adecuadas para obtener diferentes modos de propagación de ondas y los campos **E** y **H** correspondientes.

---

[1] Respecto de otros tipos de guías de ondas, véase J. A. Seeger, *Microwave Theory, Components and Devices*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986, pp. 128-133.

[2] Análisis de guías de ondas circulares pueden hallarse en textos avanzados de electromagnetismo o relacionados con este tema, por ejemplo, S. Y. Liao, *Microwave Devices and Circuits*, 3a. ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1990, pp. 119-141.

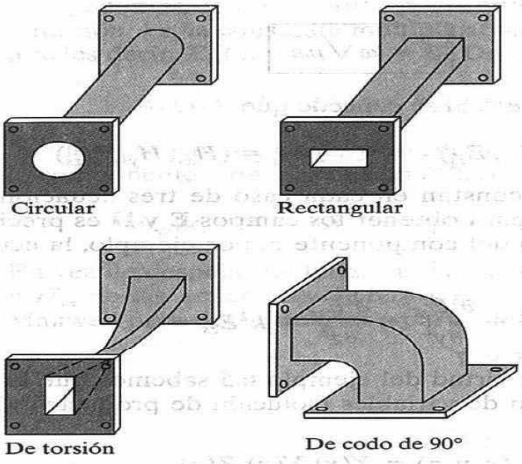


Figura 12.1. Guías de ondas usuales.

12.2. Guías de ondas rectangulares

Considérese la guía de ondas rectangular que aparece en la figura 12.2. La supondremos ocupada por un material dieléctrico sin pérdidas ($\sigma \simeq 0$) ni fuente ($\rho_v = 0, \mathbf{J} = 0$) y dotada de paredes perfectamente conductoras ($\sigma_c \simeq \infty$). Como se recordará, en las ecuaciones (10.17) y (10.19) se estableció que, en el caso de un medio sin pérdidas, las ecuaciones de Maxwell en forma de fasor se convierten en

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + k^2 \mathbf{E}_s = 0 \tag{12.1}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s + k^2 \mathbf{H}_s = 0 \tag{12.2}$$

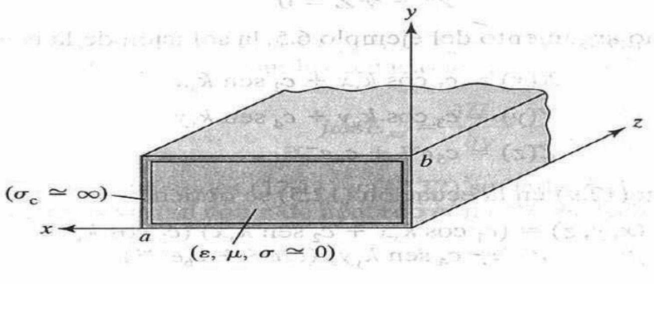


Figura 12.2. Guía de ondas rectangular con paredes perfectamente conductoras rellena de un material sin pérdidas.

donde

$$\boxed{k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{12.3}$$

y se supone el factor de tiempo $e^{j\omega t}$. Si se concede que

$$\mathbf{E}_s = (E_{xs}, E_{ys}, E_{zs}) \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_s = (H_{xs}, H_{ys}, H_{zs})$$

las ecuaciones (12.1) y (12.2) constan en cada caso de tres ecuaciones escalares de Helmholtz. En otras palabras, para obtener los campos **E** y **H** es preciso resolver seis ecuaciones escalares. Respecto del componente z, por ejemplo, la ecuación (12.1) se convierte en

$$\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial z^2} + k^2 E_{zs} = 0 \tag{12.4}$$

ecuación diferencial parcial. En virtud del ejemplo 6.5 sabemos que la ecuación (12.4) puede resolverse por separación de variables (solución de producto). Concedamos entonces que

$$E_{zs}(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \tag{12.5}$$

donde $X(x)$, $Y(y)$ y $Z(z)$ son funciones de x, y y z, respectivamente. La sustitución de la ecuación (12.5) en la ecuación (12.4) y la división entre XYZ dan como resultado

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2 \tag{12.6}$$

Puesto que estas variables son independientes, cada término de la ecuación (12.6) debe ser constante, de manera que esta ecuación puede expresarse como

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 = -k^2 \tag{12.7}$$

donde $-k_x^2$, $-k_y^2$ y γ^2 son constantes de separación. Así, la ecuación (12.6) se separa de la siguiente manera:

$$X'' + k_x^2 X = 0 \tag{12.8a}$$

$$Y'' + k_y^2 Y = 0 \tag{12.8b}$$

$$Z'' + \gamma^2 Z = 0 \tag{12.8c}$$

Continuando el mismo argumento del ejemplo 6.5, la solución de la ecuación (12.8) es

$$X(x) = c_1 \cos k_x x + c_2 \operatorname{sen} k_x x \tag{12.9a}$$

$$Y(y) = c_3 \cos k_y y + c_4 \operatorname{sen} k_y y \tag{12.9b}$$

$$Z(z) = c_5 e^{\gamma z} + c_6 e^{-\gamma z} \tag{12.9c}$$

Al sustituir la ecuación (12.9) en la ecuación (12.5) se obtiene

$$E_{zs}(x, y, z) = (c_1 \cos k_x x + c_2 \operatorname{sen} k_x x)\,(c_3 \cos k_y y + c_4 \operatorname{sen} k_y y)\,(c_5 e^{\gamma z} + c_6 e^{-\gamma z}) \tag{12.10}$$

Si suponemos, como siempre, que la onda se propaga a lo largo de la guía de ondas en la dirección $+z$, la constante multiplicativa $c_5 = 0$, ya que la onda debe ser finita en el infinito [es decir, $E_{zs}(x, y, z = \infty) = 0$]. De ahí que la ecuación (12.10) se reduzca a

$$E_{zs}(x, y, z) = (A_1 \cos k_x x + A_2 \operatorname{sen} k_x x)(A_3 \cos k_y y + A_4 \operatorname{sen} k_y y)e^{-\gamma z} \tag{12.11}$$

donde $A_1 = c_1c_6$, $A_2 = c_2c_6$ y así sucesivamente. Siguiendo pasos similares, la solución de la componente z de la ecuación (12.2) es

$$H_{zs}(x, y, z) = (B_1 \cos k_x x + B_2 \operatorname{sen} k_x x)(B_3 \cos k_y y + B_4 \operatorname{sen} k_y y)e^{-\gamma z} \tag{12.12}$$

En vez de despejar de la misma manera las demás componentes de campos E_{xs}, E_{ys}, H_{xs} y H_{ys} de las ecuaciones (12.1) y (12.2), se emplean sencillamente las ecuaciones de Maxwell para determinarlas a partir de E_{zs} y H_{zs}. De

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_s$$

se obtiene

$$\frac{\partial E_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ys}}{\partial z} = -j\omega\mu H_{xs} \tag{12.13a}$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial H_{ys}}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_{xs} \tag{12.13b}$$

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial E_{zs}}{\partial x} = j\omega\mu H_{ys} \tag{12.13c}$$

$$\frac{\partial H_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_{ys} \tag{12.13d}$$

$$\frac{\partial E_{ys}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xs}}{\partial y} = -j\omega\mu H_{zs} \tag{12.13e}$$

$$\frac{\partial H_{ys}}{\partial x} - \frac{\partial H_{xs}}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_{zs} \tag{12.13f}$$

Ahora expresemos E_{xs}, E_{ys}, H_{xs} y H_{ys} en términos de E_{zs} y H_{zs}. En el caso de E_{xs}, por ejemplo, se combinan las ecuaciones (12.13b) y (12.13c) para obtener

$$j\omega\varepsilon E_{xs} = \frac{\partial H_{zs}}{\partial y} + \frac{1}{j\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial x \partial z}\right) \tag{12.14}$$

De las ecuaciones (12.11) y (12.12) se deduce claramente que todas las componentes de campos varían con z de acuerdo con $e^{-\gamma z}$; es decir,

$$E_{zs} \sim e^{-\gamma z}, \quad E_{xs} \sim e^{-\gamma z}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial E_{zs}}{\partial z} = -\gamma E_{zs}, \qquad \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

y la ecuación (12.14) se convierte en

$$j\omega\varepsilon E_{xs} = \frac{\partial H_{zs}}{\partial y} + \frac{1}{j\omega\mu}\left(\gamma^2 E_{xs} + \gamma \frac{\partial E_{zs}}{\partial x}\right)$$

o

$$-\frac{1}{j\omega\mu}(\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon)E_{xs} = \frac{\gamma}{j\omega\mu}\frac{\partial E_{zs}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zs}}{\partial y}$$

Así, si se concede que $h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon = \gamma^2 + k^2$,

$$E_{xs} = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_{zs}}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_{zs}}{\partial y}$$

Similares manipulaciones de la ecuación (12.13) producen expresiones de E_{ys}, H_{xs} y H_{ys} en términos de E_{zs} y H_{zs}. En consecuencia,

$$\boxed{\begin{aligned} E_{xs} &= -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_{zs}}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} && (12.15a)\\ E_{ys} &= -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_{zs}}{\partial y} - \frac{j\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} && (12.15b)\\ H_{xs} &= \frac{j\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_{zs}}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} && (12.15c)\\ H_{ys} &= -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_{zs}}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} && (12.15d)\end{aligned}}$$

donde

$$h^2 = \gamma^2 + k^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{12.16}$$

De esta manera, es posible usar la ecuación (12.15) junto con las ecuaciones (12.11) y (12.12) para obtener E_{xs}, E_{ys}, H_{xs} y H_{ys}.

De las ecuaciones (12.11), (12.12) y (12.15) se deduce que hay diferentes tipos de patrones o configuraciones de campos, llamados *modos*. Existen cuatro categorías de modos, a saber:

1. $E_{zs} = 0 = H_{zs}$ (modo ET). Éste es el modo *electromagnético transversal* (ET), en el que los campos **E** y **H** son transversales a la dirección de propagación de la onda. Como se desprende de la ecuación (12.15), en esta circunstancia todas las componentes de campos tienden a cero, de tal forma que $E_{zs} = 0 = H_{zs}$. Se concluye así que una guía de ondas rectangular no puede tolerar el modo ET.

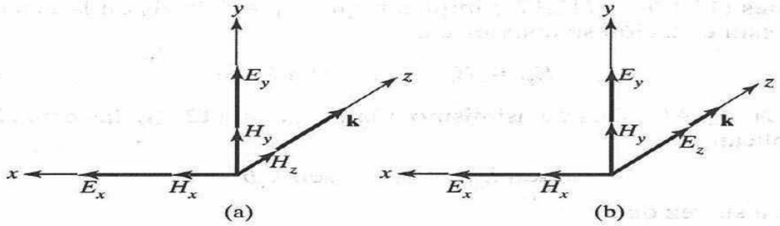


Figura 12.3. Componentes de campos electromagnéticos en una guía de ondas rectangular: **(a)** modo eT, $E_z = 0$; **(b)** modo MT, $H_z = 0$.

2. $E_{zs} = 0$, $H_{zs} \neq 0$ (modos eT). En este caso, las componentes restantes (E_{xs} y E_{ys}) del campo eléctrico son transversales a la dirección de propagación $\mathbf{a}_z$. Se dice entonces que tales campos se encuentran en modos *eléctricos transversales* (eT). Véase la figura 12.3*(a)*.
3. $E_{zs} \neq 0$, $H_{zs} = 0$ (modos MT). En este caso, el campo $\mathbf{H}$ es transversal a la dirección de propagación de la onda, de lo que resultan los modos *magnéticos transversales* (MT). Véase la figura 12.3*(b)*.
4. $E_{zs} \neq 0$, $H_{zs} \neq 0$ (modos H). En este caso, ni el campo $\mathbf{E}$ ni el campo $\mathbf{H}$ son transversales a la dirección de propagación de la onda, circunstancia a la que se le conoce como modos *híbridos* (H).

Cabe destacar la relación entre k, en la ecuación (12.3), y β, en la ecuación (10.43*a*). La constante de fase β de la ecuación (10.43*a*) se dedujo con referencia al modo ET. En este modo $h = 0$, de manera que, con base en la ecuación (12.16), $\gamma^2 = -k^2 \rightarrow \gamma = \alpha + j\beta = jk$; es decir, $\beta = k$. En los demás modos, $\beta \neq k$. En las secciones siguientes examinaremos por separado los modos de propagación MT y eT.

12.3. Modos magnéticos transversales (MT)

Las componentes del campo magnético son transversales (o normales) en este caso a la dirección de propagación de la onda. Esto implica fijar que $H_z = 0$ y determinar E_x, E_y, E_z, H_x y H_y mediante las ecuaciones (12.11) y (12.15) y las condiciones en la frontera. Despejaremos E_z y después determinaremos a partir de él las demás componentes de campos. En las paredes de la guía de ondas, las componentes tangenciales del campo $\mathbf{E}$ deben ser continuas; es decir,

$$E_{zs} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \qquad (12.17a)$$

$$E_{zs} = 0 \quad \text{en} \quad y = b \qquad (12.17b)$$

$$E_{zs} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \qquad (12.17c)$$

$$E_{zs} = 0 \quad \text{en} \quad x = a \qquad (12.17d)$$

Las ecuaciones (12.17a) y (12.17c) implican que $A_1 = 0 = A_3$ en la ecuación (12.11), de manera que esta ecuación se convierte en

$$E_{zs} = E_o \operatorname{sen} k_x x \operatorname{sen} k_y y \, e^{-\gamma z} \tag{12.18}$$

donde $E_o = A_2 A_4$. Al aplicarse asimismo a la ecuación (12.18), las ecuaciones (12.17b) y (12.17d) implican que

$$\operatorname{sen} k_x a = 0, \qquad \operatorname{sen} k_y b = 0 \tag{12.19}$$

Esto supone a su vez que

$$k_x a = m\pi, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{12.20a}$$

$$k_y b = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12.20b}$$

o

$$\boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad k_y = \frac{n\pi}{b}} \tag{12.21}$$

No se eligen enteros negativos para m y n en la ecuación (12.20a) por la razón expuesta en el ejemplo 6.5. La sustitución de la ecuación (12.21) en la ecuación (12.18) resulta en

$$\boxed{E_{zs} = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}} \tag{12.22}$$

Las demás componentes de campos se obtienen de las ecuaciones (12.22) y (12.15) teniendo en cuenta que $H_{zs} = 0$. Así,

$$E_{xs} = -\frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.23a}$$

$$E_{ys} = -\frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.23b}$$

$$H_{xs} = \frac{j\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.23c}$$

$$H_{ys} = -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.23d}$$

donde

$$\boxed{h^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2} \tag{12.24}$$

lo cual se obtiene de las ecuaciones (12.16) y (12.21). Conviene señalar en torno a las ecuaciones (12.22) y (12.23) que cada conjunto de enteros m y n produce un diferente patrón o modo de campos, llamado modo MT_{mn}, en la guía de ondas. El entero m equi-

vale al número de variaciones de medio ciclo en la dirección de x, mientras que el entero n es el número de variaciones de medio ciclo en la dirección de y. Si, con relación a esas mismas ecuaciones, (m, n) es $(0, 0)$, $(0, n)$ o $(m, 0)$, todas las componentes de campos tenderían a cero. Así, ni m ni n pueden ser iguales a cero. De esta forma, MT_{mn} es el modo de menor orden entre todos los modos MT_{11}.

Al sustituir la ecuación (12.21) en la ecuación (12.16) se obtiene la constante de propagación

$$\gamma = \sqrt{\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2 - k^2} \tag{12.25}$$

donde $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, como en la ecuación (12.3). Recuérdese que, en general, $\gamma = \alpha + j\beta$. En cuanto a la ecuación (12.25), se tienen tres posibilidades, dependiendo de k (u ω), m y n:

CASO A (de corte):

Si

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon = \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2$$

$$\gamma = 0 \qquad \text{o} \qquad \alpha = 0 = \beta$$

El valor de ω que es la causa de esto se llama *frecuencia angular de corte* ω_c; es decir,

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2} \tag{12.26}$$

CASO B (evanescente):

Si

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon < \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2$$

$$\gamma = \alpha, \qquad \beta = 0$$

En este caso no hay propagación de onda, motivo por el cual a los modos respectivos —de no propagación o atenuación— se les llama *evanescentes*.

CASO C (de propagación):

Si

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon > \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2$$

$$\gamma = j\beta, \qquad \alpha = 0$$

lo cual quiere decir que, con base en la ecuación (12.25), la constante de fase β se convierte en

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 - \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2} \tag{12.27}$$

Éste es el único caso en el que hay propagación, ya que todas las componentes de campos poseerán el factor $e^{-\gamma z} = e^{-j\beta z}$.

A cada modo, caracterizado por un conjunto de enteros m y n, le corresponde así una *frecuencia de corte* f_c.

> La **frecuencia de corte** es la frecuencia de operación por debajo de la cual ocurre atenuación y por encima de la cual ocurre propagación.

De esta manera, la guía de ondas opera como filtro de paso alto. La frecuencia de corte se obtiene de la ecuación (12.26) como

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2}$$

o

$$\boxed{f_c = \frac{u'}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{12.28}$$

donde $u' = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ = velocidad de fase de una onda plana uniforme en el medio dieléctrico sin pérdidas ($\sigma = 0, \mu, \varepsilon$) que ocupa la guía de ondas. La *longitud de onda de corte* λ_c está dada por

$$\lambda_c = \frac{u'}{f_c}$$

o

$$\boxed{\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}} \tag{12.29}$$

Cabe referir con relación a las ecuaciones (12.28) y (12.29) que MT_{11} es el modo MT con la menor frecuencia de corte (o la mayor longitud de onda de corte). La constante de fase β de la ecuación (12.27) puede expresarse en términos de f_c como

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}$$

o

$$\boxed{\beta = \beta' \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \tag{12.30}$$

donde $\beta' = \omega/u' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} =$ constante de fase de una onda plana uniforme en el medio dieléctrico. Vale señalar que γ para el modo evanescente puede expresarse en términos de f_c, de esta manera:

$$\gamma = \alpha = \beta' \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} \tag{12.30a}$$

La velocidad de fase u_p y la longitud de onda en la guía están dadas respectivamente por

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u_p}{f}} \tag{12.31}$$

La impedancia intrínseca de onda del modo se obtiene de la ecuación (12.23) como ($\lambda = j\beta$)

$$\eta_{\text{MT}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$$
$$= \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}$$

o

$$\boxed{\eta_{\text{MT}} = \eta' \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \tag{12.32}$$

donde $\eta' = \sqrt{\mu/\varepsilon} =$ impedancia intrínseca de una onda plana uniforme en el medio. Repárese en la diferencia entre u', β' y η', por una parte, y u, β y η por la otra. Las cantidades primas son características de onda del medio dieléctrico no delimitado por la guía de ondas, como se explicó en el capítulo 10 (es decir, referentes al modo ET). Por ejemplo, u' sería la velocidad de la onda si se eliminara la guía de ondas y el dieléctrico ocupara todo el espacio. Las cantidades no primas son características de onda del medio delimitado por la guía de ondas.

Como ya se mencionó, los enteros m y n indican el número de variaciones de medio ciclo en la sección transversal $x-y$ de la guía. En la figura 12.4 se presenta, por ejemplo, la configuración de campos en un momento fijo correspondiente al modo MT_{21}.

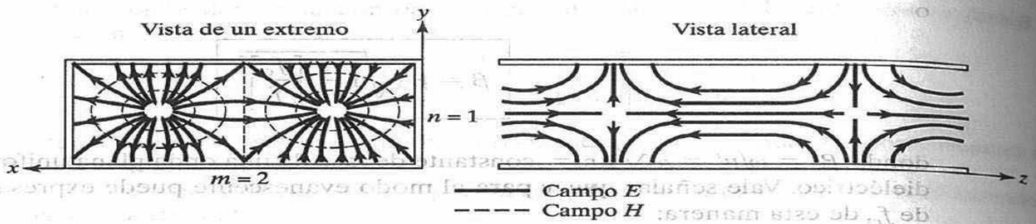


Figura 12.4. Configuración de campos correspondiente al modo MT_{21}.

12.4. Modos eléctricos transversales (eT)

En los modos eT, el campo eléctrico es transversal (o normal) a la dirección de propagación de la onda. Se fija $E_z = 0$ y se determinan las demás componentes de campos E_x, E_y, H_x, H_y y H_z a partir de las ecuaciones (12.12) y (12.15) y las condiciones en la frontera, tal como se hizo en los modos MT. Las condiciones en la frontera resultan del hecho de que las componentes tangenciales del campo eléctrico deben ser continuas en las paredes de la guía de ondas; es decir,

$$E_{xs} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{12.33a}$$

$$E_{xs} = 0 \quad \text{en} \quad y = b \tag{12.33b}$$

$$E_{ys} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \tag{12.33c}$$

$$E_{ys} = 0 \quad \text{en} \quad x = a \tag{12.33d}$$

Con base en las ecuaciones (12.15) y (12.33), las condiciones en la frontera pueden expresarse como

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{12.34a}$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = b \tag{12.34b}$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \tag{12.34c}$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = a \tag{12.34d}$$

La imposición de estas condiciones en la frontera a la ecuación (12.12) produce

$$\boxed{H_{zs} = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-\gamma z}} \tag{12.35}$$

donde $H_o = B_1 B_3$. Las demás componentes de campos se obtienen fácilmente de las ecuaciones (12.35) y (12.15), en esta forma:

$$E_{xs} = \frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.36a}$$

$$E_{ys} = -\frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.36b}$$

$$H_{xs} = \frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.36c}$$

$$H_{ys} = \frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \tag{12.36d}$$

donde $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; h y γ son como se les definió en el caso de los modos MT. También esta vez m y n denotan el número de variaciones de medio ciclo en la sección transversal $x-y$ de la guía. En la figura 12.5 aparece, por ejemplo, la configuración de campos del modo eT_{32}. La frecuencia de corte f_c, la longitud de onda de corte λ_c, la constante de fase β, la velocidad de fase u_p y la longitud de onda λ de los modos eT son iguales a las de los modos MT [véanse las ecuaciones (12.28) a (12.31)].

En el caso de los modos eT, (m, n) puede ser (0, 1) o (1, 0), pero no (0, 0); m y n no pueden equivaler a cero al mismo tiempo, porque ello forzaría a las componentes de campos de la ecuación (12.36) a tender a cero. Esto implica que eT_{10} o eT_{01} pueden ser el modo menor, dependiendo de los valores de a y b, las dimensiones de la guía. Es común que $a > b$, de manera que $1/a^2 < 1/b^2$ en la ecuación (12.28). Así, eT_{10} es el modo menor, porque $f_{c_{eT_{10}}} = \dfrac{u'}{2a} < f_{c_{eT_{01}}} = \dfrac{u'}{2b}$. Este modo se llama *modo dominante* de la guía de ondas

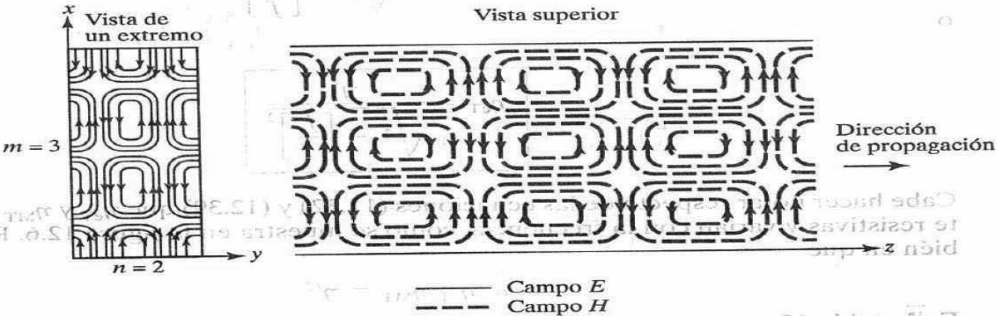


Figura 12.5. Configuración de campos correspondiente al modo eT_{32}.

y posee importancia práctica. La frecuencia de corte del modo eT_{10} se obtiene de la ecuación (12.28) como $(m = 1, n = 0)$

$$f_{c_{10}} = \frac{u'}{2a} \tag{12.37}$$

en tanto que la longitud de onda de corte del modo eT_{10} se obtiene de la ecuación (12.29) como

$$\lambda_{c_{10}} = 2a \tag{12.38}$$

Nótese que, de acuerdo con la ecuación (12.28), la frecuencia de corte de MT_{11} es

$$\frac{u'[a^2 + b^2]^{1/2}}{2ab}$$

lo cual es mayor que la frecuencia de corte de eT_{10}. En consecuencia, MT_{11} no puede considerarse el modo dominante.

El **modo dominante** es el modo con la menor frecuencia de corte (o con la mayor longitud de onda de corte).

Adviértase asimismo que en la guía no se propagará ninguna onda electromagnética con frecuencia $f < f_{c_{10}}$ (o $\lambda > \lambda_{c_{10}}$).

La impedancia intrínseca de los modos eT no es igual a la de los modos MT. De la ecuación (12.36) se deduce claramente que $(\gamma = j\beta)$

$$\eta_{eT} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}$$

o

$$\boxed{\eta_{eT} = \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}} \tag{12.39}$$

Cabe hacer notar respecto de las ecuaciones (12.32) y (12.39) que η_{eT} y η_{MT} son puramente resistivas y varían con la frecuencia, como se muestra en la figura 12.6. Repárese también en que

$$\eta_{eT}\, \eta_{MT} = \eta'^2 \tag{12.40}$$

En la tabla 12.1 aparecen importantes ecuaciones de los modos MT y eT para su rápida consulta.

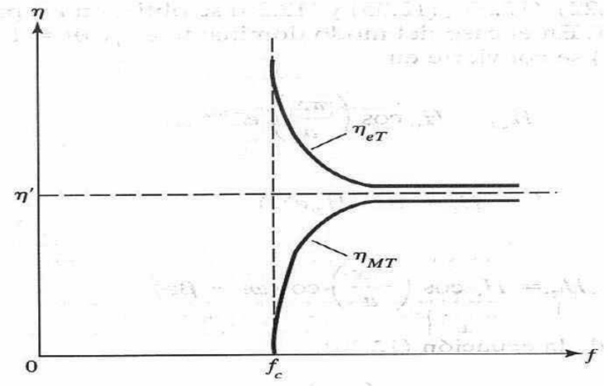


Figura 12.6. Variación de la impedancia de onda con la frecuencia en los modos eT y MT.

Tabla 12.1. Ecuaciones importantes para los modos MT y eT.

Modos MT	*Modos eT*
$E_{xs} = -\frac{j\beta}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$E_{xs} = \frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$E_{ys} = -\frac{j\beta}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$E_{ys} = -\frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$E_{zs} = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$E_{zs} = 0$
$H_{xs} = \frac{j\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$H_{xs} = \frac{j\beta}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$H_{ys} = -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$H_{ys} = \frac{j\beta}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$H_{zs} = 0$	$H_{zs} = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$\eta = \eta'\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$	$\eta = \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$

$$f_c = \frac{u'}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$\lambda_c = \frac{u'}{f_c}$$

$$\beta = \beta'\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda$$

$$\text{donde } h^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \beta' = \frac{\omega}{u'}, \eta' = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

De las ecuaciones (12.22), (12.23), (12.35) y (12.36) se obtienen los patrones de campos de los modos MT y eT. En el caso del modo dominante eT_{10}, $m = 1$ y $n = 0$, de forma que la ecuación (12.35) se convierte en

$$H_{zs} = H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \tag{12.41}$$

En el ámbito temporal,

$$H_z = \text{Re}\,(H_{zs} e^{j\omega t})$$

o

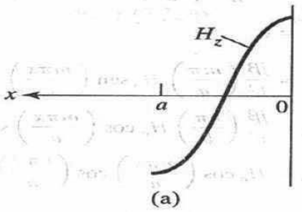
$$H_z = H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z) \tag{12.42}$$

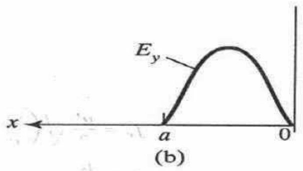
De igual manera, a partir de la ecuación (12.36),

$$E_y = \frac{\omega \mu a}{\pi} H_o \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z) \tag{12.43a}$$

$$H_x = -\frac{\beta a}{\pi} H_o \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z) \tag{12.43b}$$

$$E_z = E_x = H_y = 0 \tag{12.43c}$$





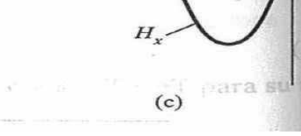
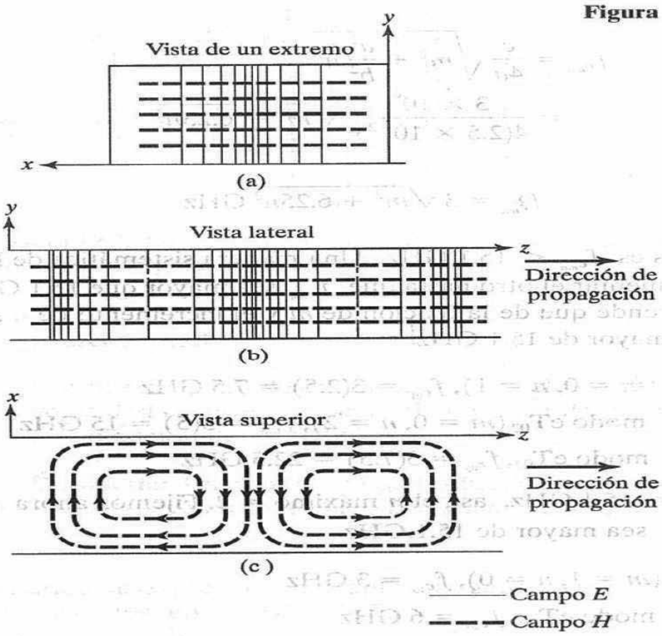


Figura 12.7. Variación de las componentes de campos con x en el modo eT_{10}.

Figura 12.8. Líneas de campos del modo eT_{10}.



En la figura 12.7 se ilustra la variación de los campos **E** y **H** con x en un plano $x-y$ —el plano $\cos(\omega t - \beta_z) = 1$ para H_z y el plano $\operatorname{sen}(\omega t - \beta z) = 1$ para E_y y H_x, por ejemplo— en el modo eT_{10}. Las correspondientes líneas de campos aparecen en la figura 12.8.

Ejemplo 12.1

Una guía de ondas rectangular con dimensiones $a = 2.5$ cm, $b = 1$ cm operará por debajo de los 15.1 GHz. ¿Cuántos modos eT y MT podrá transmitir si se le rellena con un medio caracterizado por $\sigma = 0$, $\varepsilon = 4\,\varepsilon_o$, $\mu_r = 1$? Calcule la frecuencia de corte de los modos.

Solución:

La frecuencia de corte está dada por

$$f_{c_{mn}} = \frac{u'}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

donde $a = 2.5b$ o $a/b = 2.5$ y

$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f_{c_{mn}} &= \frac{c}{4a}\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2} \\ &= \frac{3 \times 10^8}{4(2.5 \times 10^{-2})}\sqrt{m^2 + 6.25n^2} \end{aligned}$$

o

$$f_{c_{mn}} = 3\sqrt{m^2 + 6.25n^2} \text{ GHz} \tag{12.1.1}$$

Lo que buscamos es $f_{c_{mn}} < 15.1$ GHz. Una manera sistemática de hacerlo consiste en fijar m o n e incrementar el otro hasta que $f_{c_{mn}}$ sea mayor que 15.1 GHz. De la ecuación (12.1.1) se desprende que de la fijación de m y el incremento de n se obtendría rápidamente una $f_{c_{mn}}$ mayor de 15.1 GHz.

En el modo eT_{01} $(m = 0, n = 1)$, $f_{c_{01}} = 3(2.5) = 7.5$ GHz

modo eT_{02} $(m = 0, n = 2)$, $f_{c_{02}} = 3(5) = 15$ GHz

modo eT_{03}, $f_{c_{03}} = 3(7.5) = 22.5$ GHz

Con relación a $f_{c_{mn}} < 15.1$ GHz, así, el n máximo $= 2$. Fijemos ahora n e incrementemos m hasta que $f_{c_{mn}}$ sea mayor de 15.1 GHz.

En el modo eT_{10}, $(m = 1, n = 0)$, $f_{c_{10}} = 3$ GHz

modo eT_{20}, $f_{c_{20}} = 6$ GHz

modo eT_{30}, $f_{c_{30}} = 9$ GHz

modo eT_{40}, $f_{c_{40}} = 12$ GHz

modo eT_{50}, $f_{c_{50}} = 15$ GHz (igual que en el modo eT_{02})

modo eT_{60}, $f_{c_{60}} = 18$ GHz.

de esta manera, con relación a $f_{c_{mn}} < 15.1$ GHz, el m máximo $= 5$. Habiendo determinado los valores máximos de m y n, probemos posibles combinaciones entre esos valores.

En eT_{11}, MT_{11} (modos degenerados), $f_{c_{11}} = 3\sqrt{7.25} = 8.078$ GHz

eT_{21}, MT_{21}, $f_{c_{21}} = 3\sqrt{10.25} = 9.6$ GHz

eT_{31}, MT_{31}, $f_{c_{31}} = 3\sqrt{15.25} = 11.72$ GHz

eT_{41}, MT_{41}, $f_{c_{41}} = 3\sqrt{22.25} = 14.14$ GHz

eT_{12}, MT_{12}, $f_{c_{12}} = 3\sqrt{26} = 15.3$ GHz.

Serán transmitidos los modos cuya frecuencia de corte sea menor que o igual a 15.1 GHz; es decir, 11 modos eT y 4 modos MT (todos los modos aquí referidos, salvo eT_{12}, MT_{12}, eT_{60} y eT_{03}). La frecuencia de corte de estos 15 modos se ilustra en el diagrama lineal de la figura 12.9.

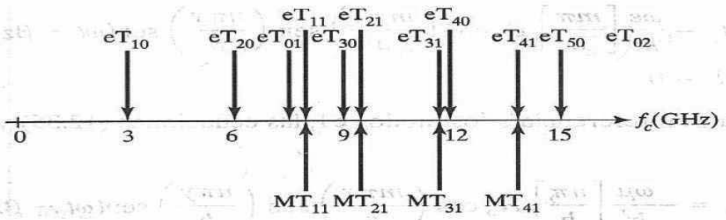


Figura 12.9. Frecuencias de corte de una guía de ondas rectangular con $a = 2.5b$; para el ejemplo 12.1.

Ejercicio 12.1

Considere la guía de ondas descrita en el ejemplo 12.1. Calcule la constante de fase, velocidad de fase e impedancia de onda de los modos eT_{10} y MT_{11} a la frecuencia de operación de 15 GHz.

Respuesta: En cuanto a eT_{10}, $\beta = 615.6$ rad/m, $u = 1.531 \times 10^8$ m/s, $\eta_{eT} = 192.4\ \Omega$. En cuanto a MT_{11}, $\beta = 529.4$ rad/m, $u = 1.78 \times 10^8$ m/s, $\eta_{MT} = 158.8\ \Omega$.

Ejemplo 12.2

Escriba las expresiones instantáneas generales de campos de los modos MT y eT. Deduzca las de los modos eT_{01} y MT_{12}.

Solución:

Las expresiones instantáneas de campos se obtienen de las formas de fasor mediante

$$\mathbf{E} = \text{Re}\,(\mathbf{E}_s e^{j\omega t}) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{H} = \text{Re}\,(\mathbf{H}_s e^{j\omega t})$$

La aplicación de estos valores a las ecuaciones (12.22) y (12.23) y el reemplazo de γ y $j\beta$ resultan en los siguientes componentes de campos en los modos MT:

$$E_x = \frac{\beta}{h^2}\left[\frac{m\pi}{a}\right] E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = \frac{\beta}{h^2}\left[\frac{n\pi}{b}\right] E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_z = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - z)$$

$$H_x = -\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\left[\frac{n\pi}{b}\right] E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{\omega\varepsilon}{h^2}\left[\frac{m\pi}{a}\right] E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = 0$$

De igual manera, con referencia a los modos eT, las ecuaciones (12.35) y (12.36) se convierten en

$$E_x = -\frac{\omega\mu}{h^2}\left[\frac{n\pi}{b}\right] H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = \frac{\omega\mu}{h^2}\left[\frac{m\pi}{a}\right] H_o \,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = -\frac{\beta}{h^2}\left[\frac{m\pi}{a}\right] H_o \,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = -\frac{\beta}{h^2}\left[\frac{n\pi}{b}\right] H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

En cuanto al modo eT_{01}, se fija $m = 0, n = 1$ para obtener

$$h^2 = \left[\frac{\pi}{b}\right]^2$$

$$E_x = -\frac{\omega\mu b}{\pi} H_o \,\text{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = 0 = E_z = H_x$$

$$H_y = \frac{\beta b}{\pi} H_o \,\text{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = H_o \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

En cuanto al modo MT_{12}, se fija $m = 1, n = 2$ para obtener

$$E_x = \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{2\pi}{b}\right) E_o \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_z = E_o \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_x = -\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{2\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = 0$$

donde

$$h^2 = \left[\frac{\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{2\pi}{b}\right]^2$$

Ejercicio 12.2

Una guía de ondas rellena de aire y de 5 por 2 cm tiene

$$E_{zs} = 20 \operatorname{sen} 40\pi x \operatorname{sen} 50\pi y \, e^{-j\beta z} \text{ V/m}$$

a 15 GHz.

a) ¿Cuál es el modo propagado?
b) Halle β.
c) Determine E_y/E_x.

Respuestas: *a)* MT_{21}, *b)* 241.3 rad/m y *c)* 1.25 tan $40\pi x$ cot $50\pi y$.

Ejemplo 12.3 En una guía de ondas rectangular con $a = 1.5$ cm, $b = 0.8$ cm, $\sigma = 0$, $\mu = \mu_o$ y $\varepsilon = 4\varepsilon_o$,

$$H_x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\pi \times 10^{11} t - \beta z) \text{ A/m}$$

Determine

a) El modo de operación.
b) La frecuencia de corte.
c) La constante de fase β.
d) La constante de propagación γ.
e) La impedancia intrínseca de onda η.

Solución:

a) De la expresión de H_x dada y las expresiones de campos del ejemplo anterior se desprende claramente que $m = 1, n = 3$; es decir, que la guía opera en MT_{13} o eT_{13}. Elijamos el modo MT_{13} (la elección del modo eT_{13} se analizará en el ejercicio 12.3).

b)
$$f_{c_{mn}} = \frac{u'}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$
$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{2}$$

Por tanto,

$$f_{c_{13}} = \frac{c}{4}\sqrt{\frac{1}{[1.5 \times 10^{-2}]^2} + \frac{9}{[0.8 \times 10^{-2}]^2}}$$
$$= \frac{3 \times 10^8}{4}(\sqrt{0.444 + 14.06}) \times 10^2 = 28.57 \text{ GHz}$$

c)
$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r}}{c}\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}$$
$$\omega = 2\pi f = \pi \times 10^{11} \quad \text{o} \quad f = \frac{100}{2} = 50 \text{ GHz}$$
$$\beta = \frac{\pi \times 10^{11}(2)}{3 \times 10^8}\sqrt{1 - \left[\frac{28.57}{50}\right]^2} = 1718.81 \text{ rad/m}$$

d) $\gamma = j\beta = j1718.81\text{rad/m}$

e)
$$\eta_{\text{MT}_{13}} = \eta'\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2} = \frac{377}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{1 - \left[\frac{28.57}{50}\right]^2}$$
$$= 154.7\ \Omega$$

Ejercicio 12.3

Repita el ejemplo 12.3 adoptando esta vez el modo eT_{13}. Determine las demás componentes de campos de este modo.

Respuesta: $f_c = 28.57$ GHz, $\beta = 1718.81$ rad/m, $\mu = j\beta$, $\eta_{\text{eT}_{13}} = 229.69\ \Omega$

$$E_x = 2584.1 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z) \text{ V/m}$$
$$E_y = -459.4 \text{ sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z) \text{ V/m}, \qquad E_z = 0$$
$$H_y = 11.25 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z) \text{ A/m}$$
$$H_z = -7.96 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z) \text{ A/m}$$

12.5. Propagación de ondas en la guía

El examen de la ecuación (12.23) o (12.36) revela que todas las componentes de campos incluyen los términos seno o coseno de $(m\pi/a)x$ o $(n\pi/b)y$ por $e^{-\gamma z}$. Puesto que

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2j}\,(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \tag{12.44a}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\,(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \tag{12.44b}$$

una onda en una guía de ondas puede descomponerse en una combinación de ondas planas reflejadas en las paredes de la guía. En el caso del modo eT_{10}, por ejemplo,

$$\begin{aligned} E_{ys} &= -\frac{j\omega\mu a}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \\ &= -\frac{\omega\mu a}{2\pi}\,(e^{j\pi x/a} - e^{-j\pi x/a})\,e^{-j\beta z} \\ &= \frac{\omega\mu a}{2\pi}\left[e^{-j\beta(z+\pi x/\beta a)} - e^{-j\beta(z-\pi x/\beta a)}\right] \end{aligned} \tag{12.45}$$

El primer término de la ecuación (12.45) representa a una guía que se desplaza en la dirección z positiva en un ángulo

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{\beta a}\right) \tag{12.46}$$

con el eje z. El segundo representa una onda que se desplaza en la dirección z positiva en un ángulo $-\theta$. Así, este campo puede describirse como la suma de dos ondas ET planas que se propagan a lo largo de trayectorias en zigzag entre las paredes de la guía en $x = 0$ y $x = a$, como se ilustra en la figura 12.10*(a)*. La descomposición del modo eT_{10} en dos ondas planas puede prolongarse a cualquier modo eT y MT. Cuando n y m difieren de cero, la descomposición produce cuatro ondas planas.

La componente de ondas en la dirección de z tiene una longitud de onda diferente que las ondas planas. Esta longitud de onda a lo largo del eje de la guía se llama *longitud de onda de la guía de ondas* y está dada por (véase el problema 12.13)

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \left[\dfrac{f_c}{f}\right]^2}} \tag{12.47}$$

donde $\lambda' = u'/f$.

De las trayectorias en zigzag surgen tres tipos de velocidad: la *velocidad del medio* u', la *velocidad de fase* u_p y la *velocidad de grupo* u_g. En la figura 12.10*(b)* se ilustra la relación entre ellas. La velocidad del medio $u' = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ es como se explicó en las secciones

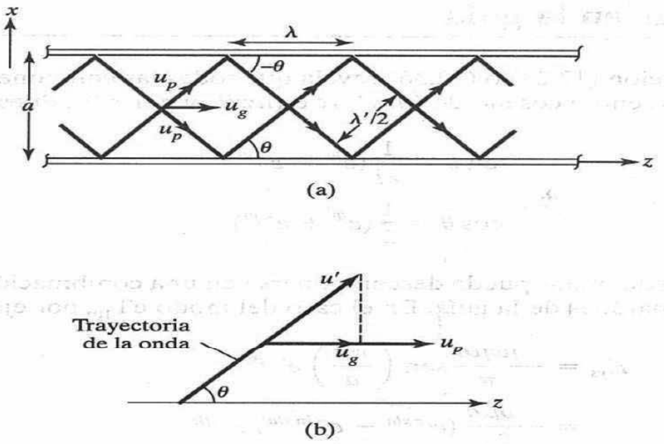


Figura 12.10. **(a)** Descomposición del modo eT_{10} en dos ondas planas; **(b)** relación entre u', u_p y u_g.

anteriores. La velocidad de fase u_p es la velocidad a la cual los lugares geométricos de la fase constante se propagan por la guía y está dada por la ecuación (12.31); esto es,

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{12.48a}$$

o

$$u_p = \frac{u'}{\cos\theta} = \frac{u'}{\sqrt{1 - \left[\dfrac{f_c}{f}\right]^2}} \tag{12.48b}$$

Esto indica que $u_p \geq u'$, ya que $\cos\theta \leq 1$. Si $u' = c$, entonces u_p es mayor que la velocidad de la luz en el vacío. ¿Esto contradice la teoría de la relatividad de Einstein, según la cual un mensaje no puede desplazarse a mayor velocidad que la de la luz? En realidad no, porque la información (o energía) en una guía de ondas no suele desplazarse a la velocidad de fase. La información viaja a la velocidad de grupo, la cual debe ser inferior a la velocidad de la luz. La velocidad de grupo u_g es la velocidad con la que las resultantes ondas reflejadas repetidas se desplazan por la guía y está dada por

$$\boxed{u_g = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega}} \tag{12.49a}$$

o

$$u_g = u'\cos\theta = u'\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2} \tag{12.49b}$$

En vista de que el concepto de velocidad de grupo es muy complejo y rebasa los alcances de este capítulo, baste decir que se trata en esencia de la velocidad de propagación del envolvente de paquete de ondas de un grupo de frecuencias. Es la velocidad de propagación de energía en la guía, siempre menor que o igual a u'. Las ecuaciones (12.48) y (12.49) revelan que

$$u_p u_g = u'^2 \tag{12.50}$$

relación similar a la ecuación (12.40). De ahí que la variación de u_p y u_g con la frecuencia sea semejante a la que se mostró en la figura 12.6 respecto de η_{eT} y η_{MT}.

Ejemplo 12.4

Una guía de ondas rectangular estándar rellena de aire con dimensiones $a = 8.636$ cm, $b = 4.318$ cm es alimentada por un portador a 4 GHz desde un cable coaxial. Determine si por ella se propagará el modo eT_{10}. De ser así, calcule la velocidad de fase y la velocidad de grupo.

Solución:

En el modo eT_{10}, $f_c = u'/2a$. Puesto que la guía de ondas está rellena de aire, $u' = c = 3 \times 10^8$. Por tanto,

$$f_c = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 8.636 \times 10^{-2}} = 1.737 \text{ GHz}$$

Como $f = 4$ GHz $> f_c$, el modo eT_{10} sí se propagará por la guía.

$$u_p = \frac{u'}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1 - (1.737/4)^2}}$$

$$= 3.33 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$u_g = \frac{u'^2}{u_p} = \frac{9 \times 10^{16}}{3.33 \times 10^8} = 2.702 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Ejercicio 12.4

Repita el ejemplo 12.4 en referencia al modo MT_{11}.

Respuesta: 12.5×10^8 m/s, 7.203×10^7 m/s.

12.6. Transmisión y atenuación de potencia

Para determinar el flujo de potencia en la guía de ondas, se halla primero el vector de Poynting promedio [a partir de la ecuación (10.68)]:

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \tag{12.51}$$

En este caso, el vector de Poynting se encuentra a lo largo de la dirección de z, de manera que

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{1}{2}\text{Re}\,(E_{xs}H_{ys}^* - E_{ys}H_{xs}^*)\mathbf{a}_z = \frac{|E_{xs}|^2 + |E_{ys}|^2}{2\eta}\,\mathbf{a}_z \tag{12.52}$$

donde $\eta = \eta_{\text{eT}}$ en los modos eT y $\eta = \eta_{\text{MT}}$ en los modos MT. La potencia total promedio transmitida por la sección transversal de la guía de ondas es

$$P_{\text{prom}} = \int \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot d\mathbf{S} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \frac{|E_{xs}|^2 + |E_{ys}|^2}{2\eta}\,dy\,dx \tag{12.53}$$

La atenuación en una guía de ondas disipativa posee importancia práctica. Hasta aquí hemos supuesto guías de ondas sin pérdidas ($\sigma = 0$, $\sigma_c \simeq \infty$) en las cuales $\alpha = 0$, $\gamma = j\beta$. Pero cuando el medio dieléctrico es disipativo ($\sigma \neq 0$) y las paredes de la guía no son perfectamente conductoras ($\sigma_c \neq \infty$), ocurre una continua pérdida de potencia conforme una onda se propaga por la guía. De acuerdo con las ecuaciones (10.69) y (10.70), el flujo de potencia en la guía es de la forma

$$P_{\text{prom}} = P_o e^{-2\alpha z} \tag{12.54}$$

Para conservar esa potencia, el índice de decremento de P_{prom} debe ser igual a la pérdida de potencia promedio temporal P_L por unidad de longitud; es decir,

$$P_L = -\frac{dP_{\text{prom}}}{dz} = 2\alpha P_{\text{prom}}$$

o

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_{\text{prom}}} \tag{12.55}$$

En general,

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d \tag{12.56}$$

donde α_c y α_d son constantes de atenuación debidas a pérdidas óhmicas o de conducción ($\sigma_c \neq \infty$) y a pérdidas dieléctricas ($\sigma \neq 0$), respectivamente.

Para determinar α_d, recuérdese que en la ecuación (12.1) se partió del supuesto de un medio dieléctrico sin pérdidas ($\sigma = 0$). Con referencia a un dieléctrico disipativo es preciso incorporar el hecho de que $\sigma \neq 0$. Todas nuestras ecuaciones anteriores siguen siendo válidas en este caso, salvo que $\gamma = j\beta$ debe modificarse. Para hacerlo, se reemplaza ε en la ecuación (12.25) por la permitividad compleja de la ecuación (10.40), de lo que se obtiene

$$\gamma = \alpha_d + j\beta_d = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon_c} \tag{12.57}$$

donde

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \tag{12.58}$$

La sustitución de la ecuación (12.58) en la ecuación (12.57) y la elevación al cuadrado de ambos miembros de la ecuación resulta en

$$\gamma^2 = \alpha_d^2 - \beta_d^2 + 2j\alpha_d\beta_d = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma$$

Al igualar las partes real e imaginaria,

$$\alpha_d^2 - \beta_d^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon \tag{12.59a}$$

$$2\alpha_d\beta_d = \omega\mu\sigma \qquad \text{o} \qquad \alpha_d = \frac{\omega\mu\sigma}{2\beta_d} \tag{12.59b}$$

Si se supone que, $\alpha_d^2 \ll \beta_d^2$, $\alpha_d^2 - \beta_d^2 \simeq -\beta_d^2$, de la ecuación (12.59*a*) se obtiene

$$\begin{aligned} \beta_d &= \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \\ &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \end{aligned} \tag{12.60}$$

lo cual es lo mismo que β en la ecuación (12.30). La sustitución de la ecuación (12.60) en la ecuación (12.59*b*) produce

$$\boxed{\alpha_d = \frac{\sigma\eta'}{2\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}} \tag{12.61}$$

donde $\eta' = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

La determinación de α_c en los modos MT_{mn} y eT_{mn} es larga y tediosa. Ilustraremos el procedimiento hallando α_c en el modo eT_{10}. En este modo sólo existen E_y, H_x y H_z. La sustitución de la ecuación (12.43*a*) en la ecuación (12.53) da como resultado

$$\begin{aligned} P_{\text{prom}} &= \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \frac{|E_{ys}|^2}{2\eta}\,dx\,dy = \frac{\omega^2\mu^2a^2H_o^2}{2\pi^2\eta}\int_0^b dy\int_0^a \operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}\,dx \\ P_{\text{prom}} &= \frac{\omega^2\mu^2a^3H_o^2b}{4\pi^2\eta} \end{aligned} \tag{12.62}$$

La pérdida de potencia total por unidad de longitud en las paredes es

$$\begin{aligned} P_L &= P_L|_{y=0} + P_L|_{y=b} + P_L|_{x=0} + P_L|_{x=a} \\ &= 2(P_L|_{y=0} + P_L|_{x=0}) \end{aligned} \tag{12.63}$$

ya que en las paredes $y = 0$ y $y = b$ o $x = 0$ y $x = a$ se disipa el mismo monto de potencia. En cuanto a la pared $y = 0$,

$$
\begin{aligned}
P_L\,|_{y=0} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\eta_c \int (|H_{xs}|^2 + |H_{zs}|^2)\,dx\right]\bigg|_{y=0} \\
&= \frac{1}{2} R_s \left[\int_0^a \frac{\beta^2 a^2}{\pi^2} H_o^2 \,\mathrm{sen}^2 \frac{\pi x}{a}\,dx + \int_0^a H_o^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a}\,dx\right] \\
&= \frac{R_s a H_o^2}{4}\left(1 + \frac{\beta^2 a^2}{\pi^2}\right)
\end{aligned}
\tag{12.64}
$$

donde R_s es la parte real de la impedancia intrínseca η_c de la pared conductora. Con base en la ecuación (10.56),

$$
R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta}
\tag{12.65}
$$

donde δ es la profundidad pelicular. R_s es la resistencia pelicular de la pared; puede considerársele como la resistencia de 1 m por δ por 1 m del material conductor. En cuanto a la pared $x = 0$,

$$
\begin{aligned}
P_L\,|_{x=0} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\eta_c \int (|H_{zs}|^2)\,dy\right]\bigg|_{x=0} = \frac{1}{2} R_s \int_0^b H_o^2\,dy \\
&= \frac{R_s b H_o^2}{2}
\end{aligned}
\tag{12.66}
$$

La sustitución de las ecuaciones (12.64) y (12.66) en la ecuación (12.63) resulta en

$$
P_L = R_s H_o^2 \left[b + \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\beta^2 a^2}{\pi^2}\right)\right]
\tag{12.67}
$$

Por último, al sustituir las ecuaciones (12.62) y (12.67) en la ecuación (12.55) se obtiene

$$
\alpha_c = \frac{R_s H_o^2\left[b + \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{\beta^2 a^2}{\pi^2}\right)\right] 2\pi^2 \eta}{\omega^2 \mu^2 a^3 H_o^2 b}
\tag{12.68a}
$$

Es conveniente expresar α_c en términos de f y f_c. Tras ciertas manipulaciones, respecto del modo eT_{10} se obtiene

$$
\boxed{\alpha_c = \frac{2R_s}{b\eta' \sqrt{1 - \left[\dfrac{f_c}{f}\right]^2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{a}\left[\frac{f_c}{f}\right]^2\right)}
\tag{12.68b}
$$

Siguiendo el mismo procedimiento, la constante de atenuación en los modos eT_{mn} ($n \neq 0$) es

$$\boxed{\alpha_c|_{eT} = \frac{2R_s}{b\eta'\sqrt{1-\left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)\left[\frac{f_c}{f}\right]^2 + \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2+n^2\right)}{\frac{b^2}{a^2}m^2+n^2}\left(1-\left[\frac{f_c}{f}\right]^2\right)\right]} \quad (12.69)$$

y en los modos MT_{mn}

$$\boxed{\alpha_c|_{MT} = \frac{2R_s}{b\eta'\sqrt{1-\left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}\,\frac{(b/a)^3\,m^2+n^2}{(b/a)^2\,m^2+n^2}} \quad (12.70)$$

La constante de atenuación total α se obtiene al sustituir las ecuaciones (12.61) y (12.69) o (12.70) en la ecuación (12.56).

†12.7. Corriente en la guía de ondas y excitación de modos

En lo que respecta a los modos tanto MT como eT, la densidad de corriente superficial **K** en las paredes de la guía de ondas puede hallarse mediante

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H} \quad (12.71)$$

donde $\mathbf{a}_n$ es el vector unitario de salida normal a la pared y **H** la intensidad de campo evaluada en la pared. El flujo de corriente en las paredes de la guía para la propagación en el modo eT_{10} puede hallarse mediante la ecuación (12.71) en combinación con las ecuaciones (12.42) y (12.43). El resultado se describe gráficamente en la figura 12.11.

La densidad de carga superficial ρ_S en las paredes está dada por

$$\rho_S = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{D} = \mathbf{a}_n \cdot \varepsilon\mathbf{E} \quad (12.72)$$

donde **E** es la intensidad de campo eléctrico evaluada en la pared de la guía.

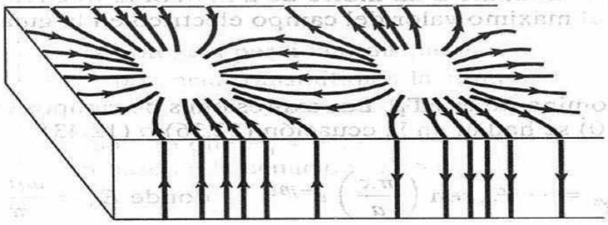


Figura 12.11. Corriente superficial en las paredes de una guía en el caso del modo eT_{10}.

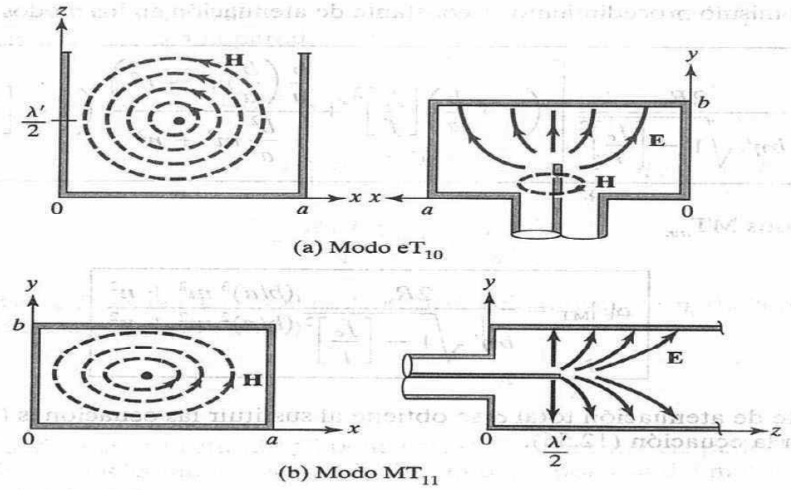


Figura 12.12. Excitación de modos en una guía de ondas rectangular.

Una guía de ondas suele ser alimentada o excitada por una línea coaxial u otra guía de ondas. En la mayor parte de los casos se utiliza una sonda (conductor central de una línea coaxial) para establecer la intensidad de campo del modo deseado y conseguir la máxima transferencia de energía. La sonda se coloca de tal manera que se produzcan campos **E** y **H** aproximadamente paralelos a las líneas de los campos **E** y **H** del modo deseado. Para excitar el modo eT_{10}, por ejemplo, se parte del hecho de que, de acuerdo con la ecuación (12.43a), E_y alcanza su máximo valor en $x = a/2$. Por tanto, la sonda se coloca en $x = a/2$ para excitar el modo eT_{10}, como se muestra en la figura 12.12*(a)*, cuyas líneas de campos son similares a las de la figura 12.8. De igual forma, para excitar el modo MT_{11}, la sonda se coloca a lo largo de la dirección de z, como se indica en la figura 12.12*(b)*.

Ejemplo 12.5

Una guía de ondas rectangular rellena de aire con dimensiones $a = 4$ cm, $b = 2$ cm transporta energía en el modo dominante a un índice de 2 mW. Si la frecuencia de operación es de 10 GHz, determine el máximo valor del campo eléctrico en la guía.

Solución:

Cuando $a > b$, el modo dominante es eT_{10}. Las expresiones de campos correspondientes a este modo ($m = 1, n = 0$) se hallan en la ecuación (12.36) o (12.43):

$$E_{xs} = 0, \qquad E_{ys} = -jE_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}, \qquad \text{donde } E_o = \frac{\omega\mu a}{\pi} H_o$$

$$f_c = \frac{u'}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2(4 \times 10^{-2})} = 3.75 \text{ GHz}$$

$$\eta = \eta_{\text{eT}} = \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} = \frac{377}{\sqrt{1 - \left[\frac{3.75}{10}\right]^2}} = 406.7 \ \Omega$$

A partir de la ecuación (12.53), la potencia promedio transmitida es

$$P_{\text{prom}} = \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} \frac{|E_{ys}|^2}{2\eta} \, dx \, dy = \frac{E_o^2}{2\eta} \int_0^b dy \int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dz$$

$$= \frac{E_o^2 ab}{4\eta}$$

Por tanto,

$$E_o^2 = \frac{4\eta P_{\text{prom}}}{ab} = \frac{4(406.7) \times 2 \times 10^{-3}}{8 \times 10^{-4}} = 4067$$

$$E_o = 63.77 \text{ V/m}$$

Ejercicio 12.5

En el ejemplo 12.5, calcule el máximo valor de H_o en el campo magnético en la guía si $a = 2$ cm, $b = 4$ cm mientras las demás condiciones permanecen sin cambios.

Respuesta: 63.34 mA/m.

Ejemplo 12.6

Una guía de ondas con revestimiento de cobre ($\sigma_c = 5.8 \times 10^7$ S/m) que opera a 4.8 GHz debe alimentar una antena con una potencia mínima de 1.2 kW. Si la guía está ocupada por poliestireno ($\sigma = 10^{-17}$ S/m, $\varepsilon = 2.55\varepsilon_o$) y sus dimensiones son $a = 4.2$ cm, $b = 2.6$ cm, calcule la potencia disipada en una longitud de 60 cm de la guía en el modo eT_{10}.

Solución:

Sea

P_d = potencia perdida o disipada
P_a = potencia transmitida a la antena
P_o = potencia de entrada de la guía

de manera que $P_o = P_d + P_a$
Con base en la ecuación (12.54),

$$P_a = P_o e^{-2\alpha z}$$

En consecuencia,

$$P_a = (P_d + P_a)\, e^{-2\alpha z}$$

o

$$P_d = P_a(e^{2\alpha z} - 1)$$

Ahora es preciso determinar α a partir de

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c$$

De acuerdo con la ecuación (12.61),

$$\alpha_d = \frac{\sigma\eta'}{2\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}$$

Puesto que la tangente de pérdida

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{10^{-17}}{2\pi \times 4.8 \times 10^9 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 2.55}$$

$$= 1.47 \times 10^{-17} \ll 1 \text{ (medio dieléctrico sin pérdidas)}$$

entonces

$$\eta' \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 236.1$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 1.879 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$f_c = \frac{u'}{2a} = \frac{1.879 \times 10^8}{2 \times 4.2 \times 10^{-2}} = 2.234 \text{ GHz}$$

$$\alpha_d = \frac{10^{-17} \times 236.1}{2\sqrt{1 - \left[\frac{2.234}{4.8}\right]^2}}$$

$$\alpha_d = 1.334 \times 10^{-15} \text{ Np/m}$$

En cuanto al modo eT_{10}, la ecuación (12.68b) resulta en

$$\alpha_c = \frac{2R_s}{b\eta'\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}\left(0.5 + \frac{b}{a}\left[\frac{f_c}{f}\right]^2\right)$$

donde

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi \times 4.8 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}}$$

$$= 1.808 \times 10^{-2}\ \Omega$$

Por consiguiente,

$$\alpha_c = \frac{2 \times 1.808 \times 10^{-2}\left(0.5 + \frac{2.6}{4.2}\left[\frac{2.234}{4.8}\right]^2\right)}{2.6 \times 10^{-2} \times 236.1\sqrt{1 - \left[\frac{2.234}{4.8}\right]^2}}$$

$$= 4.218 \times 10^{-3}\ \text{Np/m}$$

Obsérvese que $\alpha_d \ll \alpha_c$, lo que indica que la pérdida debida a la conductividad finita de las paredes de la guía es más importante que la debida al medio dieléctrico. Así,

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c \simeq \alpha_c = 4.218 \times 10^{-3}\ \text{Np/m}$$

y la potencia disipada es

$$P_d = P_a\,(e^{2\alpha z} - 1) = 1.2 \times 10^3(e^{2 \times 4.218 \times 10^{-3} \times 0.6} - 1)$$

$$= 6.089\ \text{W}$$

Ejercicio 12.6

Una guía de ondas de cobre ($\sigma_c = 1.1 \times 10^7$ mhos/m) de dimensiones $a = 4.2$ cm, $b = 1.5$ cm está rellena de teflón ($\varepsilon_r = 2.6, \sigma = 10^{-15}$ mhos/m). La frecuencia de operación es de 9 GHz. En relación con el modo eT_{10},

a) Calcule α_d y α_c.

b) ¿Cuál es la pérdida en decibeles en la guía si ésta es de 40 cm de largo?

Respuestas: *a)* 1.206×10^{-13} Np/m, 1.744×10^{-2} Np/m y *b)* 0.0606 dB.

Ejemplo 12.7

Trace las líneas de campos del modo MT_{11}. Deduzca las expresiones instantáneas de la densidad de corriente superficial de este modo.

Solución:

Del ejemplo 12.2 se obtienen los campos relativos al modo MT_{11} ($m = 1, n = 1$), en esta forma:

$$E_x = \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{\pi}{b}\right) E_o \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$E_z = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_x = -\frac{\omega \varepsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{\omega \varepsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = 0$$

Respecto de las líneas del campo eléctrico,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{a}{b} \tan\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cot\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Respecto de las líneas del campo magnético,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x} = -\frac{b}{a} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Repárese en que $(E_y/E_x)(H_y/H_x) = -1$, lo que indica que las líneas de los campos eléctrico y magnético son mutuamente ortogonales. Esto debe observarse asimismo en la figura 12.13, en la que aparecen las líneas de los campos.

La densidad de corriente superficial en las paredes de la guía de ondas está dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H} = \mathbf{a}_n \times (H_x, H_y, 0)$$

En $x = 0$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_x$, $\mathbf{K} = H_y(0, y, z, t)\, \mathbf{a}_z$, esto es,

$$\mathbf{K} = \frac{\omega \varepsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\, \mathbf{a}_z$$

En $x = a$, $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_x$, $\mathbf{K} = -H_y(a, y, z, t)\, \mathbf{a}_z$
o

$$\mathbf{K} = \frac{\omega \varepsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\, \mathbf{a}_z$$

Figura 12.13. Líneas de campos del modo MT_{11}; para el ejemplo 12.7.

En $y = 0$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_y$, $\mathbf{K} = -H_x(x, 0, z, t)\,\mathbf{a}_z$

o

$$\mathbf{K} = \frac{\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_z$$

En $y = b$, $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_y$, $\mathbf{K} = H_x(x, b, z, t)\,\mathbf{a}_z$

o

$$\mathbf{K} = \frac{\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_z$$

Ejercicio 12.7

Trace las líneas de campos correspondientes al modo eT_{11}.

Respuesta: Véase la figura 12.14. La densidad de las líneas indica la intensidad de campo en cualquier punto; el campo es más (o menos) intenso donde las líneas están más unidas (o más separadas).

12.8. Resonadores de guías de ondas

Los resonadores sirven principalmente para almacenar energía. A altas frecuencias (de 100 MHz y superiores), los elementos de circuitos *RLC* son ineficientes como resonadores, ya que las dimensiones de los circuitos resultan comparables con la longitud de onda de operación, lo que produce una radiación indeseable. A altas frecuencias, así, los circuitos resonantes *RLC* son reemplazados por cavidades resonadoras electromagnéticas, de

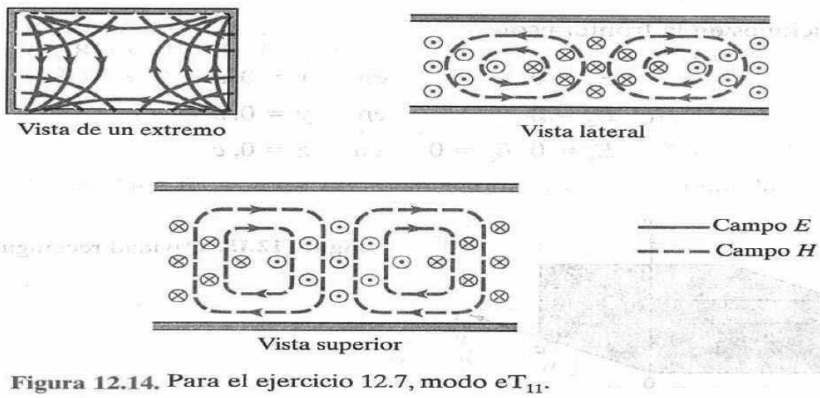


Figura 12.14. Para el ejercicio 12.7, modo eT_{11}.

uso común en tubos de clistrón, filtros de pasabanda y ondímetros. El horno de microondas se compone en esencia de una fuente de potencia, una guía de ondas alimentadora y una cavidad (el horno propiamente dicho).

Considérese la cavidad rectangular (o caja conductora cerrada) que aparece en la figura 12.15. Como puede verse, se trata simplemente de una guía de ondas rectangular acortada en ambos extremos. Es de esperar entonces la presencia de una onda estacionaria, así como de modos MT y eT de propagación de ondas. Según la forma de excitación de la cavidad, las ondas pueden propagarse en la dirección de x, y o z. Optaremos por la dirección $+z$ como "dirección de propagación de ondas" pese a que, en realidad, en estas circunstancias no hay propagación, sino ondas estacionarias. Como se recordará, en la sección 10.8 se explicó que una onda estacionaria es una combinación de dos ondas que se desplazan en dirección opuesta.

A. Modo MT a z

En este caso $H_z = 0$ y concedamos que

$$E_{zs}(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \tag{12.73}$$

es la solución de producto de la ecuación (12.1). Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección 12.2 se obtiene

$$X(x) = c_1 \cos k_x x + c_2 \operatorname{sen} k_x x \tag{12.74a}$$

$$Y(y) = c_3 \cos k_y y + c_4 \operatorname{sen} k_y y \tag{12.74b}$$

$$Z(z) = c_5 \cos k_z z + c_6 \operatorname{sen} k_z z \tag{12.74c}$$

donde

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \tag{12.75}$$

Las condiciones en la frontera son:

$$E_z = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, a \tag{12.76a}$$

$$E_z = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, b \tag{12.76b}$$

$$E_y = 0, E_x = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, c \tag{12.76c}$$

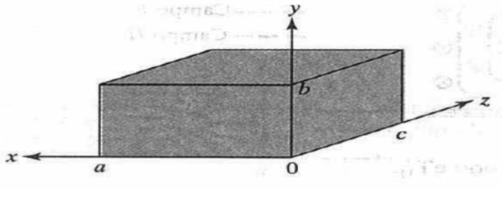


Figura 12.15. Cavidad rectangular.

Como se demostró en la sección 12.3, las condiciones de las ecuaciones (12.7*a* y *b*) se satisfacen cuando $c_1 = 0 = c_3$ y

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad k_y = \frac{n\pi}{b} \tag{12.77}$$

donde $m = 1, 2, 3, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots$ Para invocar las condiciones de la ecuación (12.76*c*), adviértase que la ecuación (12.14) (con $H_{zs} = 0$) produce

$$j\omega\varepsilon E_{xs} = \frac{1}{j\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial z\,\partial x}\right) \tag{12.78}$$

De igual manera, la combinación de las ecuaciones (12.13*a*) y (12.13*d*) (con $H_{zs} = 0$) resulta en

$$j\omega\varepsilon E_{ys} = \frac{1}{-j\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial z^2}\right) \tag{12.79}$$

De las ecuaciones (12.78) y (12.79) se desprende que la ecuación (12.76*c*) se satisface si

$$\frac{\partial E_{zs}}{\partial z} = 0 \qquad \text{en} \qquad z = 0, c \tag{12.80}$$

Esto implica que $c_6 = 0$ y sen $k_z c = 0 =$ sen $p\pi$. Por tanto,

$$k_z = \frac{p\pi}{c} \tag{12.81}$$

donde $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ La sustitución de las ecuaciones (12.77) y (12.81) en la ecuación (12.74) produce

$$\boxed{E_{zs} = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{c}\right)} \tag{12.82}$$

donde $E_o = c_2 c_4 c_5$. Los demás componentes de campos se obtienen de las ecuaciones (12.82) y (12.13). La constante de fase β se obtiene a su vez de las ecuaciones (12.75), (12.77) y (12.81), en esta forma:

$$\beta^2 = k^2 = \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2 + \left[\frac{p\pi}{c}\right]^2 \tag{12.83}$$

Puesto que $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$, de la ecuación (12.83) se obtiene la *frecuencia resonante* f_r

$$2\pi f_r = \omega_r = \frac{\beta}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \beta u'$$

o

$$\boxed{f_r = \frac{u'}{2}\sqrt{\left[\frac{m}{a}\right]^2 + \left[\frac{n}{b}\right]^2 + \left[\frac{p}{c}\right]^2}} \tag{12.84}$$

La correspondiente longitud de onda resonante es

$$\boxed{\lambda_r = \frac{u'}{f_r} = \frac{2}{\sqrt{\left[\frac{m}{a}\right]^2 + \left[\frac{n}{b}\right]^2 + \left[\frac{p}{c}\right]^2}}} \tag{12.85}$$

Con fundamento en la ecuación (12.84), es de hacer notar que el modo MT de menor orden es MT_{110}.

B. Modo eT a z

En este caso $E_z = 0$ y

$$H_{zs} = (b_1 \cos k_x x + b_2 \operatorname{sen} k_x x)(b_3 \cos k_y y + b_4 \operatorname{sen} k_y y)(b_5 \cos k_z z + \operatorname{sen} k_z z) \tag{12.86}$$

En combinación con la ecuación (12.13), las condiciones en la frontera de la ecuación (12.76*c*) producen

$$H_{zs} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, c \tag{12.87a}$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, a \tag{12.87b}$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, b \tag{12.87c}$$

De igual manera que en el modo MT a z, la imposición de las condiciones de la ecuación (12.87) a la ecuación (12.86) resulta en

$$\boxed{H_{zs} = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi z}{c}\right)} \tag{12.88}$$

donde $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y $p = 1, 2, 3, \ldots$. Las demás componentes de campos pueden obtenerse de las ecuaciones (12.13) y (12.88). La frecuencia resonante es igual a la de la ecuación (12.84), salvo que m o n (pero no ambos al mismo tiempo) pueden equivaler a cero en los modos eT. El motivo de que no puedan equivaler a cero al mismo tiempo es que las componentes de campos serán iguales a cero si m y n lo son. El modo con menor frecuencia resonante en un tamaño de cavidad dado (a, b, c) es el *modo dominante*. Si $a > b < c$, esto implica que $1/a < 1/b > 1/c$, y de ahí que el modo dominante sea eT_{101}. Nótese que cuando $a > b < c$, la frecuencia resonante del modo MT_{110} es mayor que la del modo eT_{101}; por tanto, eT_{101} es el modo dominante. A modos diferentes con igual frecuencia resonante se les llama modos *degenerados*; un modo dominará a los demás según la forma de excitación de la cavidad.

Una cavidad resonante práctica tiene paredes de conductividad finita σ_c y, por tanto, puede perder energía almacenada. El *factor de calidad Q* permite determinar esa pérdida.

El factor de calidad es asimismo una medida del ancho de banda de la cavidad resonadora.

Se le puede definir como

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Energía promedio temporal almacenada}}{\text{Pérdida de energía por ciclo de oscilación}}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{W}{P_L T} = \omega \frac{W}{P_L} \tag{12.89}$$

donde $T = 1/f$ = el periodo de oscilación, P_L es la pérdida de potencia promedio temporal en la cavidad y W es la energía total promedio temporal almacenada en los campos eléctrico y magnético dentro de la cavidad. El Q de una cavidad resonadora suele ser muy grande en comparación con el de un circuito resonante RLC. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en la deducción de α_c en la sección 12.6, es posible demostrar que el factor de calidad del modo dominante eT_{101} está dado por[3]

$$\boxed{Q_{\text{eT}_{101}} = \frac{(a^2 + c^2)abc}{\delta[2b(a^3 + c^3) + ac(a^2 + c^2)]}} \tag{12.90}$$

donde $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi f_{101}\mu_o\sigma_c}}$ es la profundidad pelicular de las paredes de la cavidad.

Ejemplo 12.8

En el caso de una cavidad resonante de cobre ($\sigma_c = 5.8 \times 10^7$ mhos/m) rellena de aire y con dimensiones $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 10$ cm, halle

a) Los cinco modos de menor orden.

b) El factor de calidad del modo eT^{101}.

Solución:

a) La frecuencia resontante está dada por

$$f_r = \frac{u'}{2}\sqrt{\left[\frac{m}{a}\right]^2 + \left[\frac{n}{b}\right]^2 + \left[\frac{p}{c}\right]^2}$$

donde

$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c$$

[3] Para efectos de comprobación, véase S. V. Marshall y G. G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, 3a. ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1990, pp. 440-442.

Por tanto,

$$f_r = \frac{3 \times 10^8}{2}\sqrt{\left[\frac{m}{5 \times 10^{-2}}\right]^2 + \left[\frac{n}{4 \times 10^{-2}}\right]^2 + \left[\frac{p}{10 \times 10^{-2}}\right]^2}$$
$$= 15\sqrt{0.04m^2 + 0.0625n^2 + 0.01p^2}\ \text{GHz}$$

Puesto que $c > a > b$ o $1/c < 1/a < 1/b$, el modo de menor orden es eT_{101}. Adviértase que MT_{101} y eT_{100} no existen, ya que $m = 1, 2, 3, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots$ y $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en los modos MT y $m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots$ y $p = 1, 2, 3, \ldots$ en los modos eT. La frecuencia resonante del modo eT_{101} es

$$f_{r_{101}} = 15\sqrt{0.04 + 0 + 0.01} = 3.335\ \text{GHz}$$

El modo menor inmediatamente siguiente es eT_{011} (MT_{011} no existe), con

$$f_{r_{011}} = 15\sqrt{0 + 0.0625 + 0.01} = 4.04\ \text{GHz}$$

El modo siguiente es eT_{102} (MT_{102} no existe), con

$$f_{r_{102}} = 15\sqrt{0.04 + 0 + 0.04} = 4.243\ \text{GHz}$$

El modo siguiente es MT_{110} (eT_{110} no existe), con

$$f_{r_{110}} = 15\sqrt{0.04 + 0.0625 + 0} = 4.8\ \text{GHz}$$

Los dos modos siguientes son eT_{111} y MT_{111} (modos degenerados), con

$$f_{r_{111}} = 15\sqrt{0.04 + 0.0625 + 0.01} = 5.031\ \text{GHz}$$

El modo siguiente es MT_{103}, con

$$f_{r_{103}} = 15\sqrt{0.04 + 0 + 0.09} = 5.408\ \text{GHz}$$

De menor a mayor, así, los cinco modos de menor orden son

eT_{101}	(3.35 GHz)
eT_{011}	(4.04 GHz)
eT_{102}	(4.243 GHz)
MT_{110}	(4.8 GHz)
eT_{111} o MT_{111}	(5.031 GHz)

b) El factor de calidad de eT_{101} está dado por

$$Q_{eT_{101}} = \frac{(a^2 + c^2)\,abc}{\delta[2b(a^3 + c^3) + ac(a^2 + c^2)]}$$
$$= \frac{(25 + 100)\,200 \times 10^{-2}}{\delta[8(125 + 1000) + 50(25 + 100)]}$$
$$= \frac{1}{61\delta} = \frac{\sqrt{\pi f_{101}\,\mu_o \sigma_c}}{61}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi (3.35 \times 10^9)\, 4\pi \times 10^{-7}\,(5.8 \times 10^7)}}{61}$$
$$= 14\,358$$

Ejercicio 12.8

Si la cavidad resonante del ejemplo 12.8 está rellena de un material sin pérdidas ($\mu_r = 1, \varepsilon_r = 3$), halle la frecuencia resonante f_r y el factor de calidad del modo eT$_{101}$.

Respuesta: 1.936 GHz, 1.093×10^4.

Resumen

1. Las guías de ondas son estructuras para encauzar ondas electromagnéticas a altas frecuencias. En el análisis de la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de ondas rectangular sin pérdidas ($\sigma_c = \infty, \sigma = 0$) se aplican las ecuaciones de Maxwell. La resultante ecuación diferencial parcial se resuelve con el método de separación de variables. De la aplicación de las condiciones en la frontera a las paredes de la guía se obtienen las fórmulas básicas para la guía según el modo de operación.
2. MT$_{mn}$ y eT$_{mn}$, donde m y n son enteros positivos, son dos modos de propagación (o patrones de campos). En los modos MT, $m = 1, 2, 3, \ldots$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$ y en los modos eT, $m = 0, 1, 2, \ldots$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$, $n = m \neq 0$.
3. Con cada modo de propagación se asocian una constante de propagación y una frecuencia de corte. La constante de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$ depende no sólo de los parámetros constitutivos (ε, μ, σ) del medio, como en el caso de ondas planas en un espacio no delimitado, sino también de la dimensiones de la sección transversal (a, b) de la guía. La frecuencia de corte es la frecuencia en la que γ pasa de puramente real (atenuación) a puramente imaginaria (propagación). El modo dominante de operación es el menor modo posible, aquel con la menor frecuencia de corte. Si $a > b$, el modo dominante es eT$_{10}$.
4. Las ecuaciones básicas para calcular la frecuencia de corte f_c, la constante de fase β y la velocidad de fase u se resumieron en la tabla 12.1. También se proporcionaron fórmulas para calcular las constantes de atenuación debidas a un medio dieléctrico disipativo y a paredes imperfectamente conductoras.
5. La velocidad de grupo (o velocidad del flujo de energía) u_g se relaciona con la velocidad de fase u_p de la propagación de onda de acuerdo con

$$u_p u_g = u'^2$$

donde $u' = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ es la velocidad del medio, es decir, la velocidad de la onda en el medio dieléctrico no delimitado por la guía. Aunque u_p es mayor que u', u_p no excede de u_g.
6. El modo de operación de una guía de ondas está determinado por el método de excitación.
7. Una cavidad resonante de una guía de ondas sirve para almacenar energía a altas frecuencias. No es sino una guía de ondas acortada en ambos extremos, de ahí que su análisis sea similar al de aquélla. La frecuencia resonante de los modos tanto eT como MT a z está dada por

$$f_r = \frac{u'}{2}\sqrt{\left[\frac{m}{a}\right]^2 + \left[\frac{n}{b}\right]^2 + \left[\frac{p}{c}\right]^2}$$

En los modos MT, $m = 1, 2, 3, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots$ y $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y en los modos eT, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y $p = 1, 2, 3, \ldots, m = n \neq 0$. Si $a > b < c$, el modo dominante (aquel con menor frecuencia resonante) es eT_{101}.

8. El factor de calidad, el cual mide la pérdida de energía en la cavidad, está dado por

$$Q = \omega \frac{W}{P_L}$$

Preguntas de repaso

12.1. En frecuencias de microondas las guías de ondas son preferibles a las líneas de transmisión para transportar energía electromagnética por las causas siguientes, *excepto*

a) Las pérdidas en las líneas de transmisión son prohibitivamente grandes.
b) Las guías de ondas son de mayor ancho de banda y menor atenuación de señal.
c) Las líneas de transmisión son de mayor tamaño.
d) Las líneas de transmisión sólo toleran el modo ET.

12.2. Un modo evanescente ocurre cuando

a) En una onda se presenta atenuación, no propagación.
b) La constante de propagación es puramente imaginaria.
c) $m = 0 = n$, de manera que todas las componentes de campos tienden a cero.
d) La frecuencia de onda es igual a la frecuencia de corte.

12.3. El modo dominante en las guías de ondas rectangulares es

a) eT_{11}
b) MT_{11}
c) eT_{101}
d) eT_{10}

12.4. El modo MT_{10} puede existir en una guía de ondas rectangular.

a) Cierto.
b) Falso.

12.5. ¿Cuáles de las siguientes componentes de campos existen en el modo eT_{30}?

a) E_x
b) E_y
c) E_z
d) H_x
e) H_y

12.6. En una guía de ondas rectangular en la que $a = 2b$ y en la que la frecuencia de corte del modo eT_{02} es de 12 GHz, la frecuencia de corte del modo MT_{11} es de

a) 3 GHz
b) $3\sqrt{5}$ GHz
c) 12 GHz
d) $6\sqrt{5}$ GHz
e) Ninguna de las anteriores.

12.7. Dentro de un túnel con sección transversal de 4 por 7 m, un automóvil no recibirá una señal de radio AM ($f = 10$ MHz, por ejemplo).

a) Cierto.
b) Falso.

12.8. Cuando el campo eléctrico alcanza su máximo valor, la energía magnética de una cavidad se encuentra en

a) Su máximo valor.
b) $\sqrt{2}$ de su máximo valor.
c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ de su máximo valor.
d) 1/2 de su máximo valor.
e) Cero.

12.9. ¿Cuál de los modos siguientes no existe en una cavidad resonante rectangular?

a) eT_{110}
b) eT_{011}
c) MT_{110}
d) MT_{111}

12.10. ¿Cuántos modos dominantes degenerados existen en una cavidad resonante rectangular en la que $a = b = c$?

a) 0
b) 2
c) 3
d) 5
e) ∞

Respuestas: 12.1*c*, 12.2*a*, 12.3*d*, 12.4*b*, 12.5*b*, *d*, 12.6*b*, 12.7*a*, 12.8*e*, 12.9*a*, 12.10*c*.

Problemas

12.1. *a)* Demuestre que una guía de ondas rectangular no tolera los modos MT_{10} y MT_{01}.
b) Explique la diferencia entre los modos eT_{mn} y MT_{mn}.

12.2. Si una guía de ondas de 2 por 3 cm rellena de un material dieléctrico con $\varepsilon_r = 4$ opera a 20 GHz en el modo MT_{11}, halle: *a)* la frecuencia de corte, *b)* la constante de fase, *c)* la velocidad de fase.

12.3. Una guía de ondas de 1×2 cm está ocupada por agua desionizada con $\varepsilon_r = 81$. Si la frecuencia de operación es de 4.5 GHz, determine: *a)* todos los posibles modos de propagación y sus frecuencias de corte, *b)* la impedancia intrínseca del modo mayor, *c)* la velocidad de grupo del modo menor.

12.4. Diseñe una guía de ondas rectangular con proporción dimensional de 3 a 1 para usarla en la banda k (18-26.5 GHz). Suponga que está rellena de aire.

12.5. Determine si por túnel diseñado como una guía de ondas metálica rectangular rellena de aire y con dimensiones $a = 8$ m y $b = 16$ m pasará *a)* una señal de radio AM de 1.5 MHz, *b)* una señal de radio FM de 120 MHz.

12.6. En una guía de ondas rectangular rellena de aire, la frecuencia de corte del modo eT_{10} es de 5 GHz, mientras que la del modo eT_{01} es de 12 GHz. Calcule

a) Las dimensiones de la guía.

b) La frecuencia de corte de los tres modos eT mayores.

c) La frecuencia de corte del modo eT_{11} si la guía estuviera ocupada por un material sin pérdidas con $\varepsilon_r = 2.25$ y $\mu_r = 1$.

12.7. Una guía de ondas rectangular hueca rellena de aire tiene 150 m de largo y está cubierta en un extremo con una placa de metal. Si en su entrada se introduce un impulso en corto de 7.2 GHz de frecuencia, ¿cuánto tiempo tardará el impulso en volver al mismo punto? Atribuya a la guía una frecuencia de corte de 6.5 GHz.

12.8. Calcule las dimensiones de una guía de ondas rectangular rellena de aire en la que la frecuencia de corte de los modos MT_{11} y eT_{03} es de 12 GHz. Determine si a 8 GHz se propagará o desvanecerá el modo dominante.

12.9. Las dimensiones de la sección transversal de una guía de ondas rectangular rellena de aire son $a = 6$ cm y $b = 3$ cm. Puesto que

$$E_z = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \cos\left(10^{12}t - \beta z\right) \text{ V/m}$$

calcule la impedancia intrínseca del modo correspondiente y el flujo de potencia promedio en la guía.

12.10. En una guía de ondas rectangular rellena de aire, un modo eT que opera a 6 GHz tiene

$$E_y = 5 \operatorname{sen}(2\pi x/a) \cos(\pi y/b) \operatorname{sen}(\omega t - 12z) \text{ V/m}$$

Determine: *a)* el modo de operación, *b)* la frecuencia de corte, *c)* la impedancia intrínseca, *d)* H_x.

12.11. En una guía de ondas rectangular rellena de aire con $a = 2.286$ cm y $b = 1.016$ cm, la componente y del modo eT está dada por

$$E_y = \text{sen}(2\pi x/a)\cos(3\pi y/b)\,\text{sen}(10\pi \times 10^{10}t - \beta z)\ \text{V/m}$$

Halle: *a)* el modo de operación, *b)* la constante de propagación γ, *c)* la impedancia intrínseca η.

12.12. Deduzca la fórmula aplicable al modo MT_{11} para calcular la potencia promedio transmitida por la guía.

12.13. *a)* Demuestre que en una guía de ondas rectangular

$$u_p = \frac{u'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \qquad \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}$$

b) Con relación a una guía de ondas rellena de aire con $a = 2b = 2.5$ cm y que opera a 20 GHz, calcule u_p y λ en los modos eT_{11} y eT_{21}.

12.14. Una guía de ondas rectangular de 1×3 cm rellena de aire opera en el modo eT_{12} a una frecuencia 20% más alta que la de corte. Determine: *a)* la frecuencia de operación, *b)* la velocidad de fase y de grupo.

12.15. Un transmisor de microondas está conectado con una antena a través de una guía de ondas rellena de aire con sección transversal de 2.5×1 cm. Respecto de una transmisión a 11 GHz, halle la razón de *a)* la velocidad de fase a la velocidad del medio y *b)* la velocidad de grupo a la velocidad del medio.

12.16. Una guía de ondas rectangular está rellena de polietileno ($\varepsilon = 2.25\varepsilon_o$) y opera a 24 GHz. Si la frecuencia de corte de cierto modo eT es de 16 GHz, halle la velocidad de grupo y la impedancia intrínseca del modo.

12.17. La guía de ondas rectangular cuya sección transversal se muestra en la figura 12.16 presenta discontinuidad dieléctrica. Calcule la razón de onda estacionaria si la guía opera a 8 GHz en el modo dominante.

***12.18.** El análisis de guías de ondas circulares implica resolver la ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas cilíndricas; es decir,

$$\nabla^2 E_{zs} + k^2 E_{zs} = 0$$

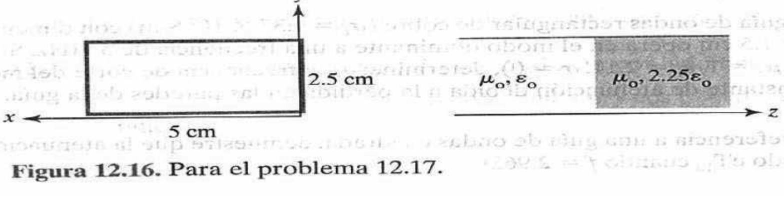


Figura 12.16. Para el problema 12.17.

o

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_{zs}}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial z^2}+k^2E_{zs}=0$$

Suponiendo la solución de producto

$$E_{zs}(\rho,\phi,z)=R(\rho)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$$

demuestre que las ecuaciones separadas son:

$$Z''-k_z^2 Z=0$$

$$\Phi''+k_\phi^2\,\Phi=0$$

$$\rho^2R''+\rho R'+(k_\rho^2\rho^2-k_\phi^2)\,R=0$$

donde

$$k_\rho^2=k^2+k_z^2$$

12.19. En el modo eT_{01},

$$E_{xs}=\frac{j\omega\mu\pi}{bh^2}H_o\,\text{sen}(\pi y/b)e^{-\gamma z},\qquad E_{ys}=0$$

Halle $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ y P_{prom}.

12.20. Si una guía de ondas de cobre ($\sigma_c = 5.8\times10^7$ S/m), 1×2 cm y rellena de un material dieléctrico con $\varepsilon = 2.6\varepsilon_o$, $\mu=\mu_o$, $\sigma_d = 10^{-4}$ S/m opera a 9 GHz, evalúe α_c y α_d de *a)* eT_{10} y *b)* MT_{11}.

12.21. Una guía de ondas cuadrada de 4 cm por lado rellena de un dieléctrico con permitividad compleja $\varepsilon_c = 16\varepsilon_o(1-j10^{-4})$ es excitada con el modo MT_{21}. Si opera a una frecuencia 10% superior a la de corte, calcule la atenuación α_d. ¿Qué distancia recorrerá la onda en la guía antes de que su magnitud se reduzca 20%?

12.22. Si las paredes de la guía de ondas cuadrada del problema anterior son de cobre ($\sigma_c = 1.5\times10^7$ S/m), halle α_c y la distancia que recorre la onda antes de atenuarse 30%.

12.23. Una guía de ondas rectangular con $a = 2b = 4.8$ cm está rellena de teflón con $\varepsilon_r = 2.11$ y tangente de pérdida de 3×10^{-4}. Suponga que sus paredes están recubiertas de oro ($\sigma_c = 4.1\times10^7$ S/m) y que por ella se propaga una onda eT_{10} a 4 GHz. Halle: *a)* α_d y *b)* α_c

***12.24.** Una guía de ondas rectangular de cobre ($\sigma_c = 1.37\times10^7$ S/m) con dimensiones $a = 2.25$ cm y $b = 1.5$ cm opera en el modo dominante a una frecuencia de 5 GHz. Si está rellena de teflón ($\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 2.11$, $\sigma \simeq 0$), determine: *a)* la frecuencia de corte del modo dominante, *b)* la constante de atenuación debida a la pérdida en las paredes de la guía.

***12.25.** Con referencia a una guía de ondas cuadrada, demuestre que la atenuación α_c es mínima en el modo eT_{10} cuando $f = 2.962 f_c$.

12.26. La constante de atenuación de un modo MT está dada por

$$\alpha = \frac{2}{\eta_o}\sqrt{\frac{\pi f \mu/\sigma}{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)}}$$

¿A qué frecuencia alcanzará α su máximo valor?

***12.27.** Demuestre que en el modo eT a z en una cavidad rectangular,

$$E_{ys} = -\frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi z}{c}\right)$$

Halle H_{xs}.

***12.28.** Con relación a una cavidad rectangular, demuestre que

$$H_{xs} = \frac{j\omega\varepsilon}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{c}\right)$$

en el modo MT a z. Determine E_{ys}.

12.29. Cuál es el modo dominante en una cavidad resonante rectangular cuando

a) $a < b < c$
b) $a > b > c$
c) $a = c > b$

12.30. Respecto de una cavidad rectangular rellena de aire con dimensiones $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm, determine la frecuencia resonante de los modos siguientes: eT_{011}, eT_{101}, MT_{110} y MT_{111}. Enumere las frecuencias resonantes en orden ascendente.

12.31. Si una cavidad resonante rectangular con dimensiones $a = 3$ cm, $b = 6$ cm y $c = 9$ cm está ocupada por polietileno ($\varepsilon = 2.5\varepsilon_o$), halle la frecuencia resonante de los cinco primeros modos de menor orden.

12.32. Una cavidad cúbica rellena de aire opera a una frecuencia resonante de 2 GHz cuando se le excita en el modo eT_{101}. Determine sus dimensiones.

12.33. Respecto de una cavidad cúbica de cobre ($\sigma_c = 1.37 \times 10^7$ S/m) rellena de aire y de 3.2 cm por lado calcule: *a)* la frecuencia resonante del modo eT_{101}, *b)* el factor de calidad de ese modo.

12.34. Diseñe una cavidad cúbica rellena de aire cuya frecuencia resonante dominante sea de 3 GHz.

12.35. Una cavidad cúbica rellena de aire de 10 cm por lado tiene

$$\mathbf{E} = 200 \operatorname{sen} 30\pi x \operatorname{sen} 30\pi y \cos 6 \times 10^9 t\, \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Halle **H**.

13 Antenas

Los diez mandamientos del éxito

1. Trabaja con ahínco: el trabajo intenso es la mejor inversión.
2. Estudia con esmero: el conocimiento permite trabajar más inteligente y eficazmente.
3. Toma iniciativas: los caminos trillados se convierten en tumbas.
4. Ama tu trabajo: después derivarás placer de dominarlo.
5. Sé exigente: los métodos desaliñados dan resultados desaliñados.
6. Ten espíritu de conquista: así podrás combatir y vencer toda dificultad.
7. Cultiva tu personalidad: ésta es a un individuo lo que el perfume a la flor.
8. Ayuda a los demás: la verdadera prueba de la grandeza en los negocios es dar oportunidades.
9. Sé democrático: si no respetas a tus compañeros, jamás serás un líder de éxito.
10. Haz siempre tu mejor esfuerzo: quien ha hecho su mejor esfuerzo lo ha hecho todo. Hacer menos es hacer nada.

CHARLES M. SCHWAB

13.1. Introducción

Hasta este momento no nos hemos preguntado aún cómo se producen ondas electromagnéticas. Como se recordará, los campos electromagnéticos son producto de cargas eléctricas. Si la fuente varía en el tiempo, las ondas electromagnéticas se propagan y ocurre radiación. La radiación puede percibirse como el proceso de transmisión de energía eléctrica. La radiación o emisión de ondas en el espacio se cumple eficientemente con la ayuda de estructuras conductoras o dieléctricas llamadas *antenas*. En teoría, cualquier estructura puede emitir ondas electromagnéticas, pero no todas son mecanismos de radiación eficientes.

Una antena también puede concebirse como un transductor para el acoplamiento de la línea de transmisión o guía de ondas (vías de encauzamiento de la onda por emitir) con el medio circundante o viceversa. En la figura 13.1 se ilustra esta función. Las antenas son indispensables para una radiación eficiente y el acoplamiento de impedancias de onda a fin de minimizar la reflexión. Se sirven del voltaje y la corriente de la línea de transmisión (o de los campos electromagnéticos de la guía de ondas) para emitir una onda electromagnética en dirección al medio. Pueden usarse para transmitir o recibir energía electromagnética.

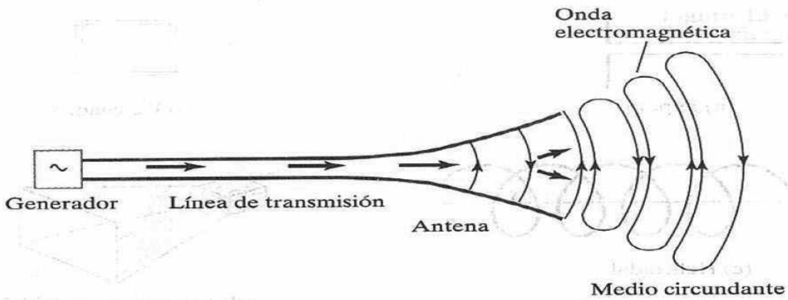


Figura 13.1. Antena como dispositivo de acoplamiento entre la estructura de guía y el medio circundante.

En la figura 13.2 aparecen antenas de uso común. La antena de dipolo de la figura 13.2*(a)* consta de dos alambres rectos tendidos a lo largo del mismo eje. La antena de cuadro de la figura 13.2*(b)* se compone a su vez de una o más vueltas de alambre. La antena helicoidal de la figura 13.2*(c)* consta de un alambre en forma de hélice sostenido en un plano conectado a tierra. A todas estas antenas se les conoce como *antenas de alambre*; se usan en automóviles, edificios, aviones, barcos, etc. La antena de bocina de la figura 13.2*(d)*, ejemplo de *antena de abertura*, es una sección piramidal de una guía de ondas que sirve de transición entre la guía y el medio circundante. Dada la facilidad para instalarla al ras, resulta útil en varias aplicaciones, como en aviones. En el reflector de disco parabólico de la figura 13.2*(e)* se aprovecha el hecho de que las ondas electromagnéticas son reflejadas por una lámina conductora. Cuando se le emplea como antena transmisora, en el punto focal se coloca una antena de alimentación, ya sea de dipolo o de bocina. La radiación que procede de la fuente se refleja en el disco (a la manera de un espejo), de lo que resulta un haz de rayos paralelos. Este último tipo de antenas se utilizan en las comunicaciones, como radares y en la astronomía.

El fenómeno de la radiación es complejo, de ahí que su análisis se haya pospuesto a este capítulo. No se intentará una amplia exposición de la teoría de antenas; limitaremos nuestro estudio a los tipos básicos: dipolo hertciano, dipolo de media onda, monopolo de un cuarto de onda y antena de cuadro pequeña. Los campos de radiación de cada tipo se determinarán siguiendo estos pasos:

1. Se elige el sistema de coordenadas adecuado y se determina el potencial magnético vectorial **A**.
2. Se halla **H** a partir de $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$.
3. Se determina **E** a partir de $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ o $\mathbf{E} = \eta\mathbf{H} \times \mathbf{a}_k$, suponiendo un medio sin pérdidas ($\sigma = 0$).
4. Se calcula el campo remoto y se determina la potencia radiada promedio temporal mediante

$$P_{\text{rad}} = \int \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot d\mathbf{S}, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\,(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \tag{13.1}$$

Conviene advertir que, en este capítulo, P_{rad} equivale a la P_{prom} de la ecuación (10.70).

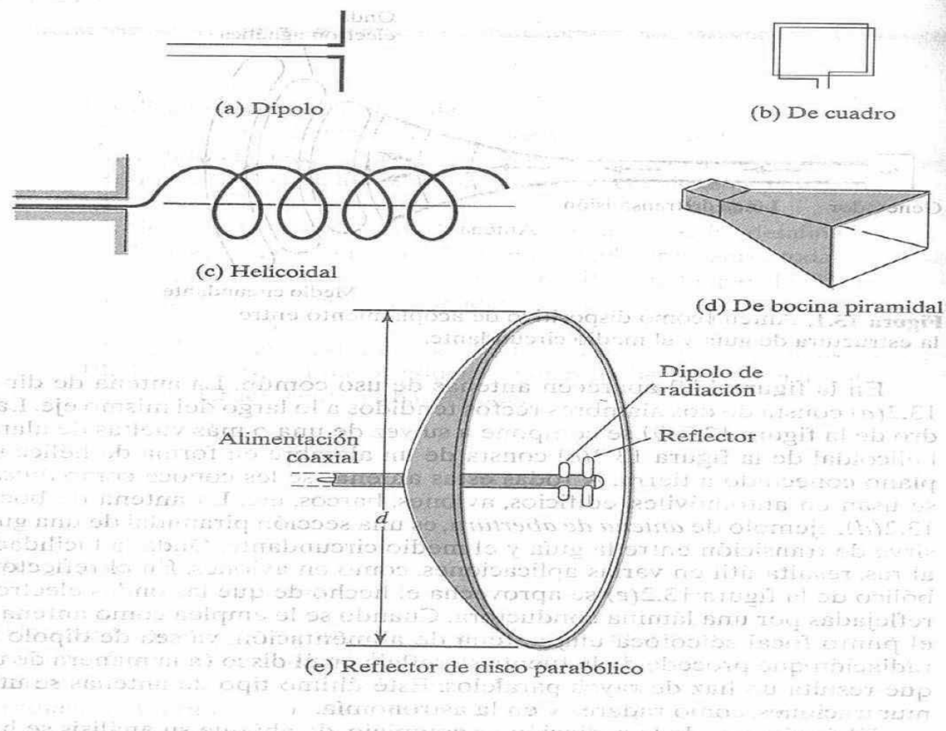


Figura 13.2. Antenas comunes.

.2. Dipolo hertciano

Por *dipolo hertciano* se entiende un elemento de corriente infinitesimal $I\,dl$. Aunque tal elemento de corriente no existe en la realidad, es esencial para calcular por integración el campo de una antena práctica.

Considérese el dipolo hertciano que aparece en la figura 13.3. Supongamos que se ubica en el origen de un sistema de coordenadas y que porta una corriente uniforme (constante a todo lo largo del dipolo) $I = I_o \cos \omega t$. De acuerdo con la ecuación (9.54), el potencial magnético vectorial retardado debido al dipolo en el punto del campo P está dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu[I]\,dl}{4\pi r}\,\mathbf{a}_z \tag{13.1}$$

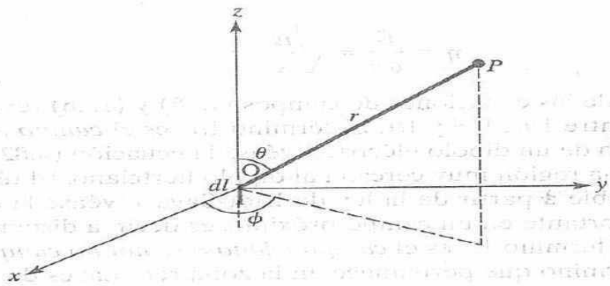


Figura 13.3. Dipolo hertciano portador de corriente $I = I_o \cos \omega t$.

donde $[I]$ es la corriente retardada dada por

$$[I] = I_o \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) = I_o \cos (\omega t - \beta r) \quad (13.2)$$
$$= \mathrm{Re}\,[I_o e^{j(\omega t - \beta r)}]$$

donde $\beta = \omega/u = 2\pi/\lambda$ y $u = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Se dice que la corriente en el punto P es *retardada* a causa de un retardo de propagación r/u o retardo de fase βr de O a P. Al sustituir la ecuación (13.2) en la ecuación (13.1) es posible expresar $\mathbf{A}$ en forma de fasor como

$$A_{zs} = \frac{\mu I_o dl}{4\pi r} e^{-j\beta r} \quad (13.3)$$

La transformación de este vector de coordenadas cartesianas en esféricas produce

$$\mathbf{A}_s = (A_{rs}, A_{\theta s}, A_{\phi s})$$

donde

$$A_{rs} = A_{zs} \cos \theta, \qquad A_{\theta s} = -A_{zs} \operatorname{sen} \theta, \qquad A_{\phi s} = 0 \quad (13.4)$$

Sin embargo, $\mathbf{B}_s = \mu \mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$; así, el campo $\mathbf{H}$ se obtiene como

$$H_{\phi s} = \frac{I_o dl}{4\pi} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.5a)$$

$$H_{rs} = 0 = H_{\theta s} \quad (13.5b)$$

El campo $\mathbf{E}$ se halla mediante $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon\, \partial \mathbf{E}/\partial t$ o $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_s$,

$$E_{rs} = \frac{\eta I_o dl}{2\pi} \cos \theta \left[\frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.6a)$$

$$E_{\theta s} = \frac{\eta I_o dl}{4\pi} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.6b)$$

$$E_{\phi s} = 0 \quad (13.6c)$$

donde

$$\eta = \frac{\beta}{\omega e} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

El detenido examen de las ecuaciones de campos (13.5) y (13.6) revela la presencia de términos que varían entre $1/r^3$, $1/r^2$ y $1/r$. El término $1/r^3$ es el *campo electrostático*, ya que corresponde al campo de un dipolo eléctrico [véase la ecuación (4.82)]. Este término domina a los demás en una región muy cercana al dipolo hertciano. El término $1/r^2$ es el *campo inductivo*, predecible a partir de la ley de Biot-Savart [véase la ecuación (7.3)]. Este término sólo es importante en un campo próximo, es decir, a distancias cercanas al elemento de corriente. El término $1/r$ es el *campo lejano o remoto* o *campo de radiación*, puesto que es el único término que permanece en la zona remota; es decir, en un punto muy alejado del elemento de corriente. Aquí nos ocuparemos primordialmente del campo lejano o zona de radiación ($\beta r \gg 1$ o $2\pi r \gg \lambda$), donde los términos en $1/r^3$ y $1/r^2$ pueden ignorarse en favor del término $1/r$. Así, en un campo lejano,

$$\boxed{H_{\phi s} = \frac{jI_o \beta dl}{4\pi r} \operatorname{sen} \theta \, e^{-j\beta r}, \qquad E_{\theta s} = \eta \, H_{\phi s}} \tag{13.7a}$$

$$H_{rs} = H_{\theta s} = E_{rs} = E_{\phi s} = 0 \tag{13.7b}$$

Cabe señalar respecto de la ecuación (13.7*a*) que los términos de radiación de $H_{\phi s}$ y $E_{\theta s}$ se hallan en la misma fase temporal y son ortogonales, al igual que los campos de una onda plana uniforme. Asimismo, que los campos de la zonas próxima y lejana están condicionados a ser las desigualdades $\beta r \ll 1$ y $\beta r \gg 1$, respectivamente. De manera más específica, la frontera entre las zonas próxima y remota (o lejana) está definida por el valor de r, dado por

$$r = \frac{2d^2}{\lambda} \tag{13.8}$$

donde d es la mayor dimensión de la antena.

La densidad de potencia promedio temporal se obtiene de esta forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{prom}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_S \times \mathbf{H}_s^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_{\theta s} H_{\phi s}^* \, \mathbf{a}_r) \\ &= \frac{1}{2} \, \eta \, |H_{\phi s}|^2 \, \mathbf{a}_r \end{aligned} \tag{13.9}$$

La sustitución de la ecuación (13.7) en la ecuación (13.9) produce a su vez la potencia radiada promedio temporal:

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} &= \int \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{I_o^2 \eta \beta^2 \, dl^2}{32\pi^2 \, r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \, r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{I_o^2 \eta \beta^2 \, dl^2}{32\pi^2} \, 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta \end{aligned} \tag{13.10}$$

No obstante,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \, d(-\cos \theta)$$

$$= \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

y $\beta^2 = 4\pi^2/\lambda^2$. De ahí que la ecuación (13.10) se convierta en

$$P_{rad} = \frac{I_o^2 \pi \eta}{3} \left[\frac{dl}{\lambda}\right]^2 \tag{13.11a}$$

Si el vacío es el medio de propagación, $\eta = 120\pi$ y

$$P_{rad} = 40\pi^2 \left[\frac{dl}{\lambda}\right]^2 I_o^2 \tag{13.11b}$$

Esta potencia equivale a la potencia disipada por la corriente $I = I_o \cos \omega t$ en una resistencia ficticia R_{rad}; es decir,

$$P_{rad} = I_{rms}^2 \, R_{rad}$$

o

$$\boxed{P_{rad} = \frac{1}{2} I_o^2 \, R_{rad}} \tag{13.12}$$

donde I_{rms} es el valor de raíz media cuadrática [rms, *root mean square*] de I. De las ecuaciones (13.11) y (13.12) se obtiene

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_o^2} \tag{13.13a}$$

o

$$\boxed{R_{rad} = 80\pi^2 \left[\frac{dl}{\lambda}\right]^2} \tag{13.13b}$$

La resistencia R_{rad}, llamada *resistencia de radiación*, es una propiedad característica de la antena de dipolo hertciano. De las ecuaciones (13.12) y (13.13) se deduce la necesidad de antenas con gran resistencia de radiación para emitir grandes montos de potencia al espacio. Si, por ejemplo, $dl = \lambda/20$, $R_{rad} \simeq 2\ \Omega$, bajo valor que indica una capacidad de emisión de montos de potencia relativamente reducidos. Cabe hacer notar que la R_{rad} de la ecuación (13.13*b*) se refiere a un dipolo hertciano en el vacío. En el caso de un dipolo en un medio distinto sin pérdidas, se sustituye $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ en la ecuación (13.11*a*) y R_{rad} se determina mediante la ecuación (13.13*a*).

Adviértase que se ha supuesto al dipolo hertciano como infinitesimalmente pequeño ($\beta\, dl \ll 1$ o $dl \leq \lambda/10$). Así, su resistencia de radiación es muy reducida, de manera que en la práctica es difícil acoplarlo con una línea de transmisión real. También se ha

supuesto una corriente uniforme en el dipolo, lo que implica que la corriente en sus extremos no es igual a cero, algo prácticamente imposible a causa de que el medio circundante no es conductor. Sin embargo, nuestro análisis demostrará ser una aproximación válida y útil de una antena con $dl \leq \lambda/10$. Una antena más práctica (y tal vez la más importante de todas) es el dipolo de media onda, tema de la siguiente sección.

13.3. Antena de dipolo de media onda

El dipolo de media onda debe su nombre a que su longitud equivale a la mitad de una longitud de onda ($\ell = \lambda/2$). Como se observa en la figura 13.4*(a)*, consta de un hilo delgado alimentado o excitado en su centro por una fuente de voltaje conectada a través de una línea de transmisión (una línea de dos alambres, por ejemplo). El campo debido al dipolo puede obtenerse fácilmente si se considera que consiste en una cadena de dipolos hertcianos. El potencial magnético vectorial en P debido a una longitud diferencial dl (= dz) del dipolo portador de una corriente de fasor $I_s = I_o \cos \beta z$ es

$$dA_{zs} = \frac{\mu I_o \cos \beta z \, dz}{4\pi r'} e^{-j\beta r'} \tag{13.14}$$

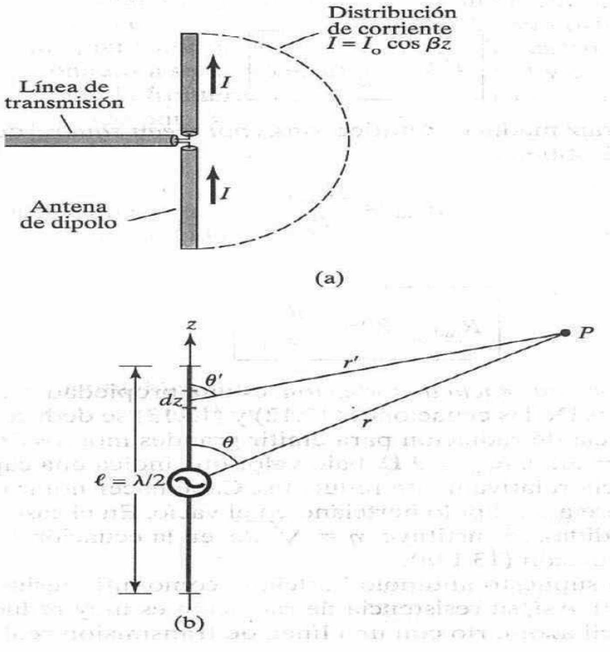


Figura 13.4. Dipolo de media onda.

Nótese que para obtener la ecuación (13.14) hemos supuesto una distribución sinusoidal de corriente, puesto que la corriente debe tender a cero en los extremos del dipolo; aunque también sería posible una distribución triangular de corriente (véase el problema 13.4), los resultados serían menos exactos. La distribución real de corriente en la antena no se conoce con precisión; se determina resolviendo las ecuaciones de Maxwell sujetas a las condiciones en la frontera en la antena, procedimiento matemático complejo. Sin embargo, el supuesto de la corriente sinusoidal aproxima la distribución obtenida mediante la resolución del problema con valor en la frontera y es de uso frecuente en la teoría de antenas.

Si $r \gg \ell$, como se explicó en la sección 4.9, dedicada al dipolo eléctrico (fig. 4.21), entonces

$$r - r' = z\cos\theta \quad \text{o} \quad r' = r - z\cos\theta$$

Así, puede sustituirse $r' = r$ en el denominador de la ecuación (13.14), donde es necesaria la magnitud de la distancia. En cuanto al término de fase en el numerador de la misma ecuación, la diferencia entre βr y $\beta r'$ es significativa, de manera que r' se reemplaza por $r - z\cos\theta$, no por r. En otras palabras, el término del coseno se mantiene en el exponente y se ignora en el denominador, pues el primero implica la constante de fase y el segundo no. De este modo,

$$\begin{aligned} A_{zs} &= \frac{\mu I_o}{4\pi r}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{-j\beta(r - z\cos\theta)}\cos\beta z\, dz \\ &= \frac{\mu I_o}{4\pi r}e^{-j\beta r}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{j\beta z\cos\theta}\cos\beta z\, dz \end{aligned} \tag{13.15}$$

Con base en las tablas de integrales del apéndice A.8,

$$\int e^{az}\cos bz\, dz = \frac{e^{az}(a\cos bz + b\,\text{sen}\, bz)}{a^2 + b^2}$$

Al aplicar esta expresión a la ecuación (13.15) se obtiene

$$A_{zs} = \frac{\mu I_o e^{-j\beta r}\, e^{j\beta z\cos\theta}}{4\pi r}\frac{(j\beta\cos\theta\cos\beta z + \beta\,\text{sen}\,\beta z)}{-\beta^2\cos^2\theta + \beta^2}\Bigg|_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \tag{13.16}$$

Puesto que $\beta = 2\pi/\lambda$ o $\beta\lambda/4 = \pi/2$ y $-\cos^2\theta + 1 = \text{sen}^2\,\theta$, la ecuación (13.16) se convierte en

$$A_{zs} = \frac{\mu I_o e^{-j\beta r}}{4\pi r\beta^2\text{sen}^2\,\theta}\left[e^{j(\pi/2)\cos\theta}(0 + \beta) - e^{-j(\pi/2)\cos\theta}(0 - \beta)\right] \tag{13.17}$$

Del uso de la identidad $e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$ resulta

$$A_{zs} = \frac{\mu I_o e^{-j\beta r}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r\beta\,\text{sen}^2\,\theta} \tag{13.18}$$

Del empleo de la ecuación (13.4) junto con el hecho de que $\mathbf{B}_s = \mu\mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$ y $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_s$, los campos magnético y eléctrico en la zona lejana (descartando los términos $1/r^3$ y $1/r^2$) se obtienen de esta forma:

$$\boxed{H_{\phi s} = \frac{jI_o e^{-j\beta r} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r \operatorname{sen}\theta}, \quad E_{\theta s} = \eta H_{\phi s}} \tag{13.19}$$

Adviértase de nuevo que los términos de radiación de $H_{\phi s}$ y $E_{\theta s}$ se encuentran en la misma fase temporal y son ortogonales.

De la aplicación de las ecuaciones (13.9) y (13.19), la densidad de potencia promedio temporal se obtiene de este modo:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{prom}} &= \frac{1}{2}\eta\,|H_{\phi s}|^2\,\mathbf{a}_r \\ &= \frac{\eta I_o^2 \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{8\pi^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,\mathbf{a}_r\end{aligned} \tag{13.20}$$

La potencia radiada promedio temporal puede determinarse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \int \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\eta I_o^2 \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{8\pi^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= \frac{\eta I_o^2}{8\pi^2} 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta \\ &= 30\, I_o^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta\end{aligned} \tag{13.21}$$

donde se ha sustituido $\eta = 120\pi$ suponiendo el vacío como medio de propagación. Dada la naturaleza del integrando de la ecuación (13.21),

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

Esto podría ilustrarse fácilmente con un diagrama elemental de la variación del integrando con θ. Por tanto,

$$P_{\text{rad}} = 60 I_o^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)\, d\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{13.22}$$

Al cambiar variables, $u = \cos\theta$, y el empleo de la fracción parcial reduce la ecuación (13.22) a

$$P_{\text{rad}} = 60I_o^2 \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\pi u}{1-u^2}\,du \tag{13.23}$$

$$= 30I_o^2 \left[\int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\pi u}{1+u}\,du + \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\pi u}{1-u}\,du \right]$$

El reemplazo de $1 + u$ por v en el primer integrando y de $1 - u$ por v en el segundo resulta en

$$P_{\text{rad}} = 30I_o^2 \left[\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\pi v}{v}\,dv + \int_1^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\pi v}{v}\,dv \right] \tag{13.24}$$

$$= 30I_o^2 \int_0^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\pi v}{v}\,dv$$

El cambio de variables $w = \pi v$ produce

$$P_{\text{rad}} = 30I_o^2 \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}w}{w}\,dw$$

$$= 15I_o^2 \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos w)}{w}\,dw \tag{13.25}$$

$$= 15I_o^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{w}{2!} - \frac{w^3}{4!} + \frac{w^5}{6!} - \frac{w^7}{8!} + \cdots \right] dw$$

puesto que $\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \frac{w^8}{8!} - \cdots$. La integración de la ecuación (13.25) término por término y la evaluación en el límite conducen a

$$P_{\text{rad}} = 15I_o^2 \left[\frac{(2\pi)^2}{2(2!)} - \frac{(2\pi)^4}{4(4!)} + \frac{(2\pi)^6}{6(6!)} - \frac{(2\pi)^8}{8(8!)} + \cdots \right] \tag{13.26}$$

$$\simeq 36.56\ I_o^2$$

La resistencia de radiación R_{rad} de la antena de dipolo de media onda se obtiene fácilmente de las ecuaciones (13.12) y (13.26), así:

$$\boxed{R_{\text{rad}} = \frac{2P_{\text{rad}}}{I_o^2} = 73\ \Omega} \tag{13.27}$$

Obsérvese el significativo incremento de la resistencia de radiación del dipolo de media onda en comparación con la del dipolo hertciano. En consecuencia, aquél puede emitir al espacio mayores montos de potencia que éste.

La impedancia de entrada total Z_{ent} de la antena es la impedancia registrada en las terminales de la antena y está dada por

$$Z_{ent} = R_{ent} + jX_{ent} \tag{13.28}$$

donde $R_{ent} = R_{rad}$ en el caso de una antena sin pérdidas. La deducción del valor de la reactancia X_{ent} implicaría un procedimiento muy complicado que rebasa el alcance de este texto. Baste saber que $X_{ent} = 42.5\ \Omega$, de modo que $Z_{ent} = 73 + j42.5\ \Omega$ cuando la longitud del dipolo es $\ell = \lambda/2$. La reactancia inductiva cae rápidamente a cero al reducirse ligeramente esa longitud. Cuando $\ell = 0.485\ \lambda$, el dipolo es resonante, con $X_{ent} = 0$. En la práctica, así, un dipolo $\lambda/2$ se diseña de tal forma que X_{ent} se acerque a cero y $Z_{ent} \simeq 73$ Ω. Este valor de la resistencia de radiación de la antena de dipolo $\lambda/2$ explica la existencia del cable coaxial estándar de 75 Ω. De igual manera, tal valor es fácil de acoplar con líneas de transmisión. Junto con la propiedad de resonancia, estos factores son la razón del extendido uso de la antena de dipolo.

.4. Antena monopolar de un cuarto de onda

La antena monopolar de un cuarto de onda consta básicamente en la mitad de una antena de dipolo de media onda situada en un plano conductor a tierra, como se ilustra en la figura 13.5. La antena es perpendicular al plano, habitualmente supuesto como infinito y perfectamente conductor. La alimenta un cable coaxial conectado a su base.

De acuerdo con la teoría de las imágenes expuesta en la sección 6.6, es posible reemplazar el plano infinito perfectamente conductor a tierra por la imagen del monopolo. El campo debido al monopolo $\lambda/4$ con su imagen en la región sobre el plano a tierra es igual al campo debido a un dipolo $\lambda/2$. Así, la ecuación (13.19) también es aplicable al monopolo $\lambda/4$. No obstante, la integración de la ecuación (13.21) sólo cubre la superficie hemisférica sobre el plano a tierra (es decir, $0 \leq \theta \leq \pi/2$), puesto que el monopolo irradia únicamente a través de esa superficie. Esto quiere decir que sólo irradia la mitad de la potencia que el dipolo con igual corriente. En el caso, así, de una antena monopolar $\lambda/4$,

$$P_{rad} \simeq 18.28\, I_o^2 \tag{13.29}$$

y

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_o^2}$$

Figura 13.5. Antena monopolar.

o

$$\boxed{R_{rad} = 36.5\ \Omega} \tag{13.30}$$

Por la misma razón, la impedancia de entrada total de un monopolo $\lambda/4$ es $Z_{ent} = 36.5 + j21.25\ \Omega$.

13.5. Antena de cuadro pequeño

La antena de cuadro posee importancia práctica. Se le usa como antena indicadora de dirección (o cuadro de exploración) en la detección por radiación y como antena de televisión para frecuencias ultraaltas. El término *pequeño* implica que las dimensiones del cuadro (como ρ_o) son mucho menores que λ.

Considérese la pequeña espira (o cuadro) filamentosa circular de radio ρ_o portadora de una corriente uniforme $I_o \cos \omega t$ que se muestra en la figura 13.6. Esta espira podría equivaler a un dipolo magnético elemental. El potencial magnético vectorial en el punto del campo P debido a la espira es

$$\mathbf{A} = \oint_L \frac{\mu[I]\, d\mathbf{l}}{4\pi r'} \tag{13.31}$$

donde $[I] = I_o \cos(\omega t - \beta r') = \text{Re}\,[I_o e^{j(\omega t - \beta r')}]$. Al sustituir $[I]$ en la ecuación (13.31) se obtiene $\mathbf{A}$ en forma de fasor:

$$\mathbf{A}_s = \frac{\mu I_o}{4\pi} \oint_L \frac{e^{-j\beta r'}}{r'}\, d\mathbf{l} \tag{13.32}$$

La evaluación de esta integral supondría un largo procedimiento. Es posible demostrar que, en el caso de un cuadro pequeño ($\rho_o \ll \lambda$), r' puede ser reemplazada por r en el denominador de la ecuación (13.32) y $\mathbf{A}_s$ sólo posee la componente ϕ, dado por

$$A_{\phi s} = \frac{\mu I_o S}{4\pi r^2}(1 + j\beta r)e^{-j\beta r} \operatorname{sen}\theta \tag{13.33}$$

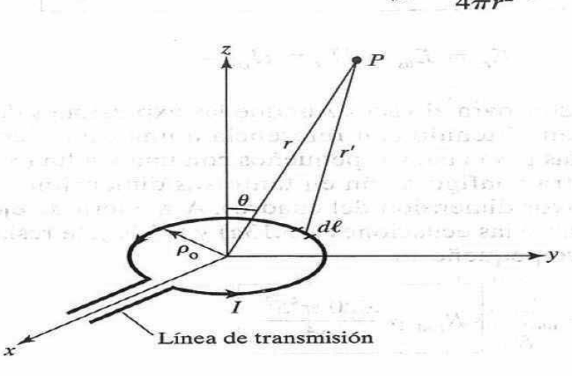


Figura 13.6. Antena de cuadro pequeño.

donde $S = \pi\rho_o^2$ = área de la espira. En el caso de una espira con N vueltas, $S = N\pi\rho_o^2$. A partir del hecho de que $\mathbf{B}_s = \mu\mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$ y $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_s$, de la ecuación (13.33) se obtienen los campos eléctrico y magnético en esta forma:

$$E_{\phi s} = \frac{-j\omega\mu I_o S}{4\pi} \operatorname{sen}\theta \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right] e^{-j\beta r} \tag{13.34a}$$

$$H_{rs} = \frac{j\omega\mu I_o S}{2\pi\eta} \cos\theta \left[\frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3}\right] e^{-j\beta r} \tag{13.34b}$$

$$H_{\theta s} = \frac{j\omega\mu I_o S}{4\pi\eta} \operatorname{sen}\theta \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3}\right] e^{-j\beta r} \tag{13.34c}$$

$$E_{rs} = E_{\theta s} = H_{\phi s} = 0 \tag{13.34d}$$

Al comparar las ecuaciones (13.5) y (13.6) con la ecuación (13.34) es posible advertir la naturaleza dual del campo debido al dipolo eléctrico de la figura 13.3 y al dipolo magnético de la figura 13.6 (véase también la tabla 8.2). En el campo lejano (o remoto) sólo permanece el término (de radiación) $1/r$ de la ecuación (13.34). Así, en el campo lejano,

$$E_{\phi s} = \frac{\omega\mu I_o S}{4\pi r} \beta \operatorname{sen}\theta\, e^{-j\beta r}$$

$$= \frac{\eta\pi I_o S}{r\lambda^2} \operatorname{sen}\theta\, e^{-j\beta r}$$

o

$$\boxed{E_{\phi s} = \frac{120\pi^2 I_o}{r}\frac{S}{\lambda^2} \operatorname{sen}\theta\, e^{-j\beta r}, \qquad H_{\theta s} = -\frac{E_{\phi s}}{\eta}} \tag{13.35a}$$

$$E_{rs} = E_{\theta s} = H_{rs} = H_{\phi s} = 0 \tag{13.35b}$$

donde se ha supuesto $\eta = 120\pi$ para el vacío. Aunque las expresiones de campo remoto de la ecuación (13.35) se han obtenido con referencia a una espira circular pequeña, también es posible emplearlas para cuadros pequeños con una vuelta ($S = a^2$), N vueltas ($S = Na^2$) o de cualquier otra configuración en tanto sus dimensiones sean reducidas ($d \leq \lambda/10$, donde d es la mayor dimensión del cuadro). A manera de ejercicio, el lector podría demostrar que, mediante las ecuaciones (13.13a) y (13.35), la resistencia de radiación de una antena de cuadro pequeño es

$$\boxed{R_{\text{rad}} = \frac{320\,\pi^4 S^2}{\lambda^4}} \tag{13.36}$$

Ejemplo 13.1

En un punto en $\theta = \mu/2$, a 2 km de una antena en aire, se precisa de una intensidad de campo magnético de 5 μA/m. Sin considerar las pérdidas óhmicas, ¿cuánta potencia debe transmitir la antena si se trata de

a) **Un dipolo hertciano de $\lambda/25$ de longitud?**

b) **Un dipolo de media onda?**

c) **Un monopolo de un cuarto de onda?**

d) **Una antena de cuadro con 10 vueltas y radio $\rho_o = \lambda/20$?**

Solución:

a) En un dipolo hertciano,

$$|H_{\phi s}| = \frac{I_o \beta\, dl \operatorname{sen}\theta}{4\pi r}$$

donde $dl = \lambda/25$ o $\beta\, dl = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{25} = \dfrac{2\pi}{25}$. Por tanto,

$$5 \times 10^{-6} = \frac{I_o \cdot \dfrac{2\pi}{25}(1)}{4\pi\,(2 \times 10^3)} = \frac{I_o}{10^5}$$

o

$$I_o = 0.5 \text{ A}$$

$$P_{rad} = 40\pi^2 \left[\frac{dl}{\lambda}\right]^2 I_o^2 = \frac{40\pi^2 (0.5)^2}{(25)^2}$$

$$= 158 \text{ mW}$$

b) En un dipolo $\lambda/2$,

$$|H_{\phi s}| = \frac{I_o \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r \operatorname{sen}\theta}$$

$$5 \times 10^{-6} = \frac{I_o \cdot 1}{2\pi\,(2 \times 10^3)\cdot (1)}$$

o

$$I_o = 20\pi \text{ mA}$$

$$P_{rad} = 1/2 I_o^2 R_{rad} = 1/2(20\pi)^2 \times 10^{-6}(73)$$

$$= 144 \text{ mW}$$

c) En un monopolo $\lambda/4$,

$$I_o = 20\pi \text{ mA}$$

como en el inciso *b)*.

$$\begin{aligned} P_{rad} &= 1/2 I_o{}^2 R_{rad} = 1/2(20\pi)^2 \times 10^{-6}(36.56) \\ &= 72 \text{ mW} \end{aligned}$$

d) En una antena de cuadro,

$$|H_{\theta s}| = \frac{\pi I_o}{r} \frac{S}{\lambda^2} \text{sen } \theta$$

En el caso de una vuelta, $S = \pi \rho_o{}^2$. En el de N vueltas, $S = N\pi\rho_o{}^2$. Así,

$$5 \times 10^{-6} = \frac{\mu I_o 10\pi}{2 \times 10^3} \left[\frac{\rho_o}{\lambda}\right]^2$$

o

$$\begin{aligned} I_o &= \frac{10}{10\pi^2} \left[\frac{\lambda}{\rho_o}\right]^2 \times 10^{-3} = \frac{20^2}{\pi^2} \times 10^{-3} \\ &= 40.53 \text{ mA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{rad} &= \frac{320\ \pi^4 S^2}{\lambda^4} = 320\ \pi^6\ N^2 \left[\frac{\rho_o}{\lambda}\right]^4 \\ &= 320\ \pi^6 \times 100 \left[\frac{1}{20}\right]^4 = 192.3\ \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \frac{1}{2} I_o^2 R_{rad} = \frac{1}{2}(40.53)^2 \times 10^{-6}(192.3) \\ &= 158 \text{ mW} \end{aligned}$$

Ejercicio 13.1

Un dipolo hertciano de longitud $\lambda/100$ se ubica en el origen y es alimentado por una corriente de 0.25 sen $10^8 t$ A. Determine el campo magnético en

a) $r = \lambda/5, \theta = 30°$

b) $r = 200\lambda, \theta = 60°$

Respuestas: *a)* 0.2119 sen $(10^8 t - 20.5°)$ $\mathbf{a}_\phi$ mA/m y *b)* 0.2871 sen $(10^8 t + 90°)$ $\mathbf{a}_\phi$ μA/m

Ejemplo 13.2

Una intensidad de campo eléctrico de 10 μV/m se medirá en un punto de observación $\theta = \pi/2$, a 500 km de una antena de dipolo (resonante) de media onda que opera en aire a 50 MHz.

a) ¿Cuál es la longitud del dipolo?

b) Calcule la corriente con la que debe ser alimentada la antena.

c) Halle la potencia promedio radiada por la antena.

d) Si a la antena se conecta una línea de transmisión con $Z_o = 75\ \Omega$, determine la razón de onda estacionaria.

Solución:

a) La longitud de onda $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3 \times 10^8}{50 \times 10^6} = 6$ m.

De este modo, la longitud del medio dipolo es $\ell = \dfrac{\lambda}{2} = 3$ m.

b) A partir de la ecuación (13.19),

$$|E_{\phi s}| = \frac{\eta_o I_o \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r \operatorname{sen}\theta}$$

o

$$\begin{aligned} I_o &= \frac{|E_{\theta s}|\, 2\pi r \operatorname{sen}\theta}{\eta_o \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)} \\ &= \frac{10 \times 10^{-6}\, 2\pi\, (500 \times 10^3) \cdot (1)}{120\pi\, (1)} \\ &= 83.33 \text{ mA} \end{aligned}$$

c)

$$R_{\text{rad}} = 73\ \Omega$$

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} &= \frac{1}{2} I_o^2 R_{\text{rad}} = \frac{1}{2}(83.33)^2 \times 10^{-6} \times 73 \\ &= 253.5 \text{ mW} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \quad (Z_L = Z_{\text{ent}} \text{ en este caso}) \\ &= \frac{73 + j42.5 - 75}{73 + j42.5 + 75} = \frac{-2 + j42.5}{148 + j42.5} \\ &= \frac{42.55\angle 92.69^\circ}{153.98\angle 16.02^\circ} = 0.2763\angle 76.67^\circ \end{aligned}$$

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.2763}{1 - 0.2763} = 1.763$$

Ejercicio 13.2

Repita el ejemplo 13.2 si la antena de dipolo es reemplazada por un monopolo $\lambda/4$.

Respuestas: *a)* 1.5 m, *b)* 83.33 mA, *c)* 126.8 mW y *d)* 2.265.

13.6. Características de las antenas

Habiendo considerado los tipos elementales de antenas, examinemos ahora algunas importantes características de una antena como radiador de energía electromagnética. Estas características son: *a)* patrón de antena, *b)* intensidad de radiación, *c)* ganancia directiva y *d)* ganancia de potencia.

A. Patrones de antena

Un **patrón de antena** (o **patrón de radiación**) es un diagrama tridimensional de la radiación de la antena en un campo lejano.

El diagrama de la amplitud de un componente especificado del campo **E** es un *patrón de campo* o *patrón de voltaje*; el del cuadrado de la amplitud de **E**, un *patrón de potencia*. Para evitar el trazado del diagrama tridimensional del patrón de antena, se trazan por separado el $|\mathbf{E}_s|$ normalizado contra θ con ϕ constante (*patrón del plano E* o *patrón vertical*) y el $|\mathbf{E}_s|$ normalizado contra ϕ con $\theta = \pi/2$ (*patrón del plano H* o *patrón horizontal*). La normalización de $|\mathbf{E}_s|$ se realiza respecto del valor máximo del $|\mathbf{E}_s|$, de modo que el valor máximo del $|\mathbf{E}_s|$ normalizado es la unidad.

En el caso del dipolo hertciano, por ejemplo, el $|\mathbf{E}_s|$ normalizado se obtiene de la ecuación (13.7) como

$$f(\theta) = |\text{sen}\ \theta| \tag{13.37}$$

lo cual es independiente de ϕ. De la ecuación (13.37) se obtiene el patrón del plano E, un diagrama polar de $f(\theta)$ en el que θ varía de 0° a 180°, como se muestra en la figura 13.7*(a)*. Nótese que el diagrama es simétrico en torno al eje z ($\theta = 0$). En cuanto al patrón del plano H, se fija $\theta = \pi/2$ para que $f(\theta) = 1$, lo cual equivale a un círculo de radio 1, como se ilustra en la figura 13.7*(b)*. De la combinación de los diagramas en las figuras 13.7 *(a)* y *(b)* resulta el patrón de campos tridimensional de la figura 13.7*(c)*, en forma de dona.

El patrón de potencia de la antena es un diagrama de la potencia promedio temporal, $|\mathcal{P}_{\text{prom}}| = \mathcal{P}_{\text{prom}}$, con relación a una distancia fija r. Esta vez se trazan por separado $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ contra θ con ϕ constante y $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ contra ϕ con θ constante.

Con referencia al dipolo hertciano, el patrón de potencia normalizado se obtiene fácilmente de la ecuación (13.37) o (13.9), en esta forma:

$$f^2(\theta) = \text{sen}^2\ \theta \tag{13.38}$$

lo cual se representa gráficamente en la figura 13.8. Obsérvese que en las figuras 13.7*(b)* y 13.8*(b)* aparecen círculos, ya que $f(\theta)$ es independiente de ϕ, y que el valor de OP en la

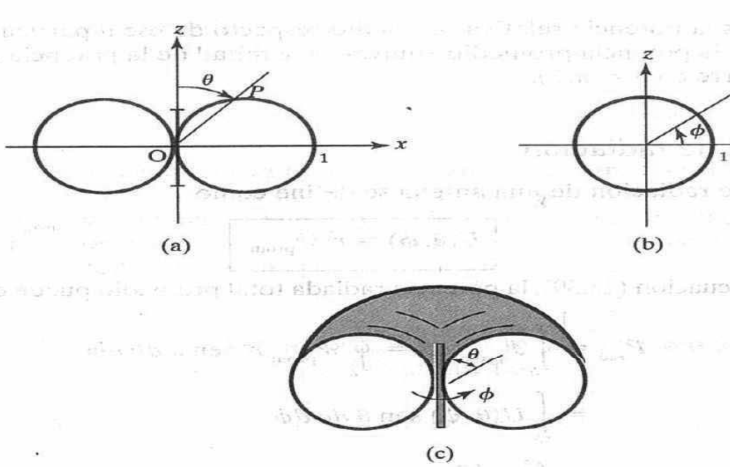


Figura 13.7. Patrones de campo del dipolo hertciano: **(a)** patrón del plano E normalizado o vertical (ϕ = constante = 0); **(b)** patrón del plano H normalizado u horizontal ($\theta = \pi/2$); **(c)** patrón tridimensional.

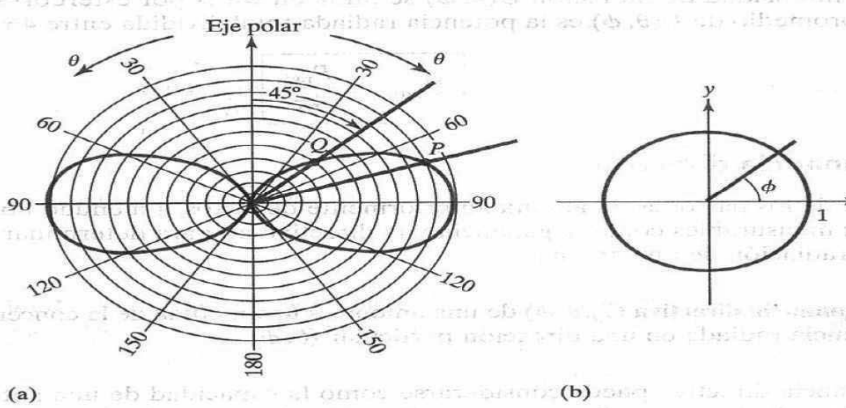


Figura 13.8. Patrón de potencia del dipolo hertciano: **(a)** ϕ = constante = 0; **(b)** θ = constante = $\pi/2$.

figura 13.8*(a)* es la potencia relativa promedio respecto de ese θ particular. En el punto Q ($\theta = 45°$), así, la potencia promedio equivale a la mitad de la potencia máxima promedio (la cual ocurre en $\theta = \pi/2$).

B. Intensidad de radiación

La intensidad de radiación de una antena se define como

$$\boxed{U(\theta, \phi) = r^2\, \mathcal{P}_{\text{prom}}} \tag{13.39}$$

Con base en la ecuación (13.39), la potencia radiada total promedio puede expresarse como

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} &= \oint_S \mathcal{P}_{\text{prom}}\, dS = \oint_S \mathcal{P}_{\text{prom}}\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_S U(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} U(\theta, \phi)\, d\Omega \end{aligned} \tag{13.40}$$

donde $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$ es el *ángulo sólido diferencial*, en estereorradianes (sr). De ahí que la intensidad de radiación $U(\theta, \phi)$ se mida en watts por estereorradián (W/sr). El valor promedio de $U(\theta, \phi)$ es la potencia radiada total dividida entre 4π sr; es decir,

$$\boxed{U_{\text{prom}} = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi}} \tag{13.41}$$

C. Ganancia directiva

Aparte de los patrones de antena anteriormente descritos, a menudo nos interesan cantidades mensurables como la ganancia y la directividad para determinar las características de radiación de una antena.

La **ganancia directiva** $G_d(\theta, \phi)$ de una antena es una medida de la concentración de la potencia radiada en una dirección particular (θ, ϕ).

La ganancia directiva puede considerarse como la capacidad de una antena para dirigir potencia radiada en una dirección específica. Usualmente se le obtiene como la razón de la intensidad de radiación en una dirección dada (θ, ϕ) a la intensidad de radiación promedio; es decir,

$$\boxed{G_d(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{\text{prom}}} = \frac{4\pi\, U(\theta, \phi)}{P_{\text{rad}}}} \tag{13.42}$$

Mediante la sustitución de la ecuación (13.39) en la ecuación (13.42), $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ puede expresarse en términos de ganancia directiva como

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{G_d}{4\pi r^2} P_{\text{rad}} \tag{13.43}$$

La ganancia directiva $G_d(\theta, \phi)$ depende del patrón de antena. En el caso del dipolo hertciano (lo mismo que del dipolo $\lambda/2$ y el monopolo $\lambda/4$), en la figura 13.8 se advierte que $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ es máxima en $\theta = \pi/2$ y mínima (de cero) en $\theta = 0$ o π. Así, el dipolo hertciano irradia potencia en una dirección transversal a su longitud. Respecto de una antena *isotrópica* (aquella que irradia por igual en todas direcciones), $G_d = 1$. Sin embargo, esta antena no es real sino ideal.

La **directividad** D de una antena es la razón de la intensidad de radiación máxima a la intensidad de radiación promedio.

Obviamente, D es la ganancia directiva máxima G_d máx. Así,

$$D = \frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{prom}}} = G_d, \text{máx} \tag{13.44a}$$

o

$$D = \frac{4\pi\, U_{\text{máx}}}{P_{\text{rad}}} \tag{13.44b}$$

$D = 1$ en una antena isotrópica; éste es el menor valor que D puede adoptar. En cuanto al dipolo hertciano,

$$G_d(\theta, \phi) = 1.5 \operatorname{sen}^2 \theta, \qquad D = 1.5 \tag{13.45}$$

En cuanto al dipolo $\lambda/2$,

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{\eta}{\pi R_{\text{rad}}} f^2(\theta), \qquad D = 1.64 \tag{13.46}$$

donde $\eta = 120\pi$, $R_{\text{rad}} = 73\ \Omega$ y

$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta} \tag{13.47}$$

D. Ganancia de potencia

Nuestra definición de la ganancia directiva en la ecuación (13.42) no tiene en cuenta la pérdida óhmica de potencia P_ℓ de la antena. P_ℓ se debe a que el conductor del que está

hecha la antena es de conductividad finita. Como se ilustra en la figura 13.9, si P_{ent} es la potencia de entrada total a la antena,

$$P_{\text{ent}} = P_\ell + P_{\text{rad}}$$
$$= \frac{1}{2} |I_{\text{ent}}|^2 (R_\ell + R_{\text{rad}}) \tag{13.48}$$

donde I_{ent} es la corriente en las terminales de entrada y R_ℓ la *resistencia de pérdida* u *óhmica* de la antena. En otras palabras, P_{ent} es la potencia aceptada por la antena en sus terminales durante el proceso de radiación, y P_{rad} la potencia radiada por la antena; la diferencia entre ambas es P_ℓ, la potencia disipada dentro de la antena.

La *ganancia de potencia* $G_p(\theta, \phi)$ de la antena se define como

$$\boxed{G_p(\theta, \phi) = \frac{4\pi\, U(\theta, \phi)}{P_{\text{ent}}}} \tag{13.49}$$

La razón de la ganancia de potencia en cualquier dirección especificada a la ganancia direccional en esa dirección es la *eficiencia de radiación* η_r de la antena; esto es,

$$\eta_r = \frac{G_P}{G_d} = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{ent}}}$$

La introducción de la ecuación (13.48) resulta en

$$\boxed{\eta_r = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{ent}}} = \frac{P_{\text{rad}}}{R_{\text{rad}} + R_\ell}} \tag{13.50}$$

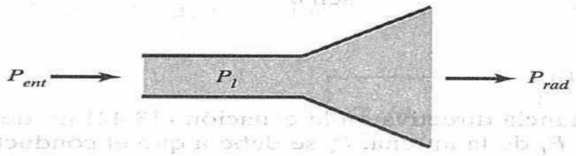
En muchas antenas, η_r se acerca a 100%, de manera que $G_p \simeq G_d$. Directividad y ganancia suelen expresarse en decibeles (dB). Así,

$$D\ (\text{dB}) = 10 \log_{10} D \tag{13.51a}$$
$$G\ (\text{dB}) = 10 \log_{10} G \tag{13.51b}$$

Cabe mencionar en este punto que los patrones de radiación de una antena se miden habitualmente en la región del campo lejano, concebida por lo general como existente en una distancia $r \geq r_{\text{mín}}$, donde

$$r_{\text{mín}} = \frac{2d^2}{\lambda} \tag{13.52}$$

Figura 13.9. Relación entre P_{ent}, P_ℓ y P_{rad}.



y d es la mayor dimensión de la antena. Por ejemplo, $d = \ell$ en la antena de dipolo eléctrico y $d = 2\rho_o$ en la de cuadro pequeño.

Ejemplo 13.3

Demuestre que la ganancia directiva del diplolo hertciano es

$$G_d(\theta, \phi) = 1.5 \operatorname{sen}^2 \theta$$

y que la del dipolo de media onda es

$$G_d(\theta, \phi) = 1.64 \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Solución:

De acuerdo con la ecuación (13.42),

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{4\pi f^2(\theta)}{\displaystyle\int f^2(\theta)\, d\Omega}$$

a) Respecto del dipolo hertciano,

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{4\pi \operatorname{sen}^2(\theta)}{\displaystyle\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta\, d\phi} = \frac{4\pi \operatorname{sen}^2\theta}{2\pi\,(4/3)}$$

$$= 1.5 \operatorname{sen}^2\theta$$

como se solicitó.

b) Respecto del dipolo de media onda,

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{\dfrac{4\pi\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}}{\displaystyle\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta\, d\phi}$$

Con base en la ecuación (13.26), la integral del denominador da como resultado 2π (1.2188). Por tanto,

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{4\pi\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\frac{1}{2\pi\,(1.2188)}$$

$$= 1.64 \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

como se solicitó.

Ejercicio 13.3

Calcule la directividad del

a) Monopolo hertciano.
b) Monopolo de un cuarto de onda.

Respuestas: *a)* 3 y *b)* 3.28.

Ejemplo 13.4 Determine la intensidad de campo eléctrico a 10 km de una antena con ganancia directiva de 5 dB y que irradia una potencia total de 20 kW.

Solución:

$$5 = G_d\,(\text{dB}) = 10\log_{10} G_d$$

o

$$0.5 = \log_{10} G_d \rightarrow G_d = 10^{0.5} = 3.162$$

A partir de la ecuación (13.43),

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{G_d P_{\text{rad}}}{4\pi r^2}$$

Sin embargo,

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{|E_s|^2}{2\eta}$$

Así,

$$|E_s|^2 = \frac{\eta G_d P_{\text{rad}}}{2\pi r^2} = \frac{120\pi(3.162)(20\times 10^3)}{2\pi\,[10\times 10^3]^2}$$

$$|E_s| = 0.1948 \text{ V/m}$$

Ejercicio 13.4

Cierta antena con una eficiencia de 95% tiene una intensidad de radiación máxima de 0.5 W/sr. Calcule su directividad cuando

a) La potencia de entrada es de 0.4 W.
b) La potencia radiada es de 0.3 W.

Respuestas: *a)* 16.53 y *b)* 20.94.

Ejemplo 13.5 La intensidad de radiación de cierta antena es

$$U(\theta, \phi) = \begin{cases} 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^3 \phi, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0, & \text{en las demás partes} \end{cases}$$

Determine su directividad.

Solución:

La directividad se define como

$$D = \frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{prom}}}$$

A partir de la U dada,

$$U_{\text{máx}} = 2$$

$$U_{\text{prom}} = \frac{1}{4\pi} \int U \, d\Omega \; (= P_{\text{rad}}/4\pi)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \phi \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \, d\theta \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \phi) \, d(-\cos \phi)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \left(\frac{\cos^3 \phi}{3} - \cos \phi \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Por tanto,

$$D = \frac{2}{(1/3)} = 6$$

Ejercicio 13.5

Evalúe la directividad de una antena con intensidad de radiación normalizada

$$U(\theta, \phi) = \begin{cases} \operatorname{sen} \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Respuesta: 2.546.

13.7. Arreglos de antenas

En muchas aplicaciones prácticas (como una estación radiodifusora de AM) es necesario diseñar antenas con mayor potencia radiada en ciertas direcciones que en otras. Esto equivale a demandar que el patrón de radiación se concentre en la dirección de interés. Tal propósito es difícil de lograr con un solo elemento de antena. Un arreglo de antenas permite obtener mayor directividad que la que puede ofrecer una sola.

Un **arreglo de antenas** es un grupo de elementos de radiación dispuestos de forma que se produzcan características de radiación particulares.

Es conveniente y práctico, aunque no indispensable, que los elementos del arreglo sean idénticos. Examinaremos primero el caso simple de un arreglo de dos elementos, para prolongar después nuestros resultados al caso general, más complicado, de un arreglo de N elementos.

Considérese una antena compuesta por dos dipolos hertcianos situados en el vacío a lo largo del eje z pero orientados en paralelo al eje x, como se muestra en la figura 13.10. Supongamos que el dipolo en $(0, 0, d/2)$ porta corriente $I_{1s} = I_o\angle\alpha$ y que el dipolo en $(0, 0, -d/2)$ porta corriente $I_{2s} = I_o\angle 0$, donde α es la diferencia de fase entre las dos corrientes. Al variar el espaciamiento d y la diferencia de fase α, puede lograrse que los campos procedentes del arreglo interfieran constructivamente (se sumen) en ciertas direcciones de interés e interfieran destructivamente (se cancelen) en otras direcciones. El campo eléctrico total en el punto P es la suma vectorial de los campos debidos a los elementos individuales. Si P se ubica en la zona del campo lejano, el campo eléctrico total en P se obtiene de la ecuación (13.7a) de este modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s &= \mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}_{2s} \\ &= \frac{j\eta\beta I_o dl}{4\pi}\left[\cos\theta_1 \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} e^{j\alpha}\,\mathbf{a}_{\theta_1} + \cos\theta_2 \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}\,\mathbf{a}_{\theta_2}\right]\end{aligned} \tag{13.53}$$

Nótese que sen θ, presente en la ecuación (13.7a), ha sido reemplazado en este caso por cos θ, ya que el elemento ilustrado en la figura 13.3 sigue la dirección de z, mientras que

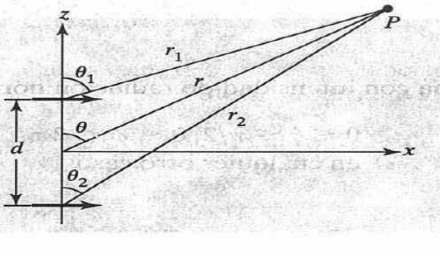


Figura 13.10. Arreglo de dos elementos.

los de la figura 13.10 siguen la de x. Puesto que P se encuentra lejos del arreglo, $\theta_1 \simeq \theta \simeq \theta_2$ y $\mathbf{a}_{\theta_1} \simeq \mathbf{a}_\theta \simeq \mathbf{a}_{\theta_2}$. En la amplitud puede fijarse $r_1 \simeq r \approx r_2$, pero en la fase se emplea

$$r_1 \simeq r - \frac{d}{2}\cos\theta \tag{13.54a}$$

$$r_2 \simeq r + \frac{d}{2}\cos\theta \tag{13.54b}$$

En consecuencia, la ecuación (13.53) se convierte en

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s &= \frac{j\eta\beta I_o\, dl}{4\pi\, r}\cos\theta\, e^{-j\beta r}\, e^{j\alpha/2}\left[e^{j(\beta d\cos\theta)/2}e^{j\alpha/2} + e^{-j(\beta d\cos\theta)/2}e^{-j\alpha/2}\right]\mathbf{a}_\theta \\ &= \frac{j\eta\beta I_o\, dl}{4\pi\, r}\cos\theta\, e^{-j\beta r}e^{j\alpha/2}2\cos\left[\frac{1}{2}(\beta d\cos\theta + \alpha)\right]\mathbf{a}_\theta\end{aligned} \tag{13.55}$$

La comparación de esta ecuación con la ecuación (13.7a) indica que el campo total de un arreglo es igual al campo del elemento situado en el origen multiplicado por un *factor de arreglo* (o de red) dado por

$$\boxed{FA = 2\cos\left[\frac{1}{2}(\beta d\cos\theta + \alpha)\right]e^{j\alpha/2}} \tag{13.56}$$

En general, así, el campo lejano debido a un arreglo de dos elementos está dado por

$$\mathbf{E}\ (\text{total}) = (\mathbf{E}\ \text{debido al elemento en el origen}) \times (\text{factor de arreglo}) \tag{13.57}$$

De la ecuación (13.55) se desprende asimismo que $|\cos\theta|$ es el patrón de radiación debido a un solo elemento, mientras que el factor de arreglo normalizado, $|\cos[1/2(\beta d\cos\theta + \alpha)]|$, es el patrón de radiación del arreglo si los elementos fueran isotrópicos. Tales patrones pueden considerarse respectivamente como un "patrón unitario" y un "patrón de grupo". Así, el "patrón resultante" es el producto del patrón unitario y el patrón de grupo; es decir,

$$\boxed{\text{Patrón resultante} = \text{Patrón unitario} \times \text{Patrón de grupo}} \tag{13.58}$$

Esto se conoce como *multiplicación de patrones*. El patrón de un arreglo puede diagramarse por multiplicación de patrones casi como si se hiciera por inspección, de modo que aquélla es un instrumento muy útil para el diseño de un arreglo. Cabe señalar que, a diferencia del patrón unitario, el patrón de grupo es independiente del tipo de elementos que componen el arreglo, siempre que no ocurran cambios en el espaciamiento d, la diferencia de fase α y la orientación de los elementos.

Prolonguemos ahora los resultados del arreglo de dos elementos al caso general de un arreglo de N elementos, el cual se muestra en la figura 13.11. Supongamos que el arreglo es *lineal* en cuanto que los elementos están igualmente espaciados en una línea recta y se tienden a lo largo del eje z. Supongamos asimismo que el arreglo es *uniforme*, de manera que cada elemento es alimentado con corriente de igual magnitud, aunque de cambio de fase α progresivo, es decir $I_{1s} = I_o\underline{/0}$, $I_{2s} = I_o\underline{/\alpha}$, $I_{3s} = I_o\underline{/2\alpha}$, y así sucesivamente. Nos interesa en particular hallar el factor de arreglo; el campo lejano puede hallarse

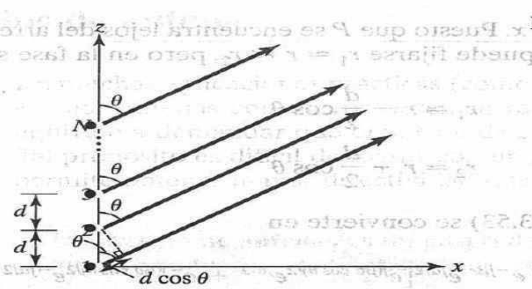


Figura 13.11. Arreglo lineal uniforme de N elementos.

fácilmente a partir de la ecuación(13.57) una vez conocido el factor de arreglo. En referencia al arreglo lineal uniforme, el factor de arreglo es la suma de las contribuciones de todos los elementos. Así,

$$FA = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi} \tag{13.59}$$

donde

$$\psi = \beta d \cos\theta + \alpha \tag{13.60}$$

En la ecuación (13.60), $\beta = 2\pi/\lambda$, mientras que d y α son el espaciamiento y el corrimiento de fase entre los elementos, respectivamente. Adviértase que el miembro derecho de la ecuación (13.59) es una serie geométrica de la forma

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x} \tag{13.61}$$

Así, la ecuación (13.59) se convierte en

$$FA = \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} \tag{13.62}$$

lo cual puede expresarse como

$$\begin{aligned} FA &= \frac{e^{jN\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} = \frac{e^{jN\psi/2}}{e^{j\psi/2}} \frac{e^{jN\psi/2} - e^{-jN\psi/2}}{e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2}} \\ &= e^{j(N-1)\psi/2} \frac{\text{sen}\,(N\psi/2)}{\text{sen}\,(\psi/2)} \end{aligned} \tag{13.63}$$

El factor de fase $e^{j(N-1)\psi/2}$ no estaría presente si el arreglo estuviera centrado alrededor del origen. Ignorando este término carente de importancia,

$$\boxed{FA = \frac{\text{sen}\,\dfrac{N\psi}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{\psi}{2}}, \qquad \psi = \beta d \cos\theta + \alpha} \tag{13.64}$$

Nótese que esta ecuación se reduce a la ecuación (13.56) cuando $N = 2$, como es de esperar. Repárese de igual forma en lo siguiente:

1. FA posee el valor máximo de N; así, el FA normalizado se obtiene dividiendo FA entre N. El máximo principal ocurre cuando $\psi = 0$; esto es,

$$0 = \beta d \cos\theta + \alpha \quad \text{o} \quad \cos\theta = -\frac{\alpha}{\beta d} \tag{13.65}$$

2. FA tiene *nulos* (o *ceros*) cuando $FA = 0$; es decir,

$$\frac{N\psi}{2} = \pm k\pi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{13.66}$$

donde k no es un múltiplo de N.

3. La máxima radiación de un arreglo *transversal* sigue una dirección normal al eje del arreglo; es decir, $\psi = 0$ y $\theta = 90°$, de modo que $\alpha = 0$.
4. La máxima radiación de un arreglo *longitudinal* sigue la dirección del eje del arreglo; es decir, $\psi = 0$ y $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}$, de manera que $\alpha = \begin{bmatrix} -\beta d \\ \beta d \end{bmatrix}$

Estas observaciones son útiles para la representación gráfica de FA. En la figura 13.12 se presentan los diagramas de FA correspondientes a $N = 2, 3$ y 4.

Ejemplo 13.6

Con referencia al arreglo directivo de antenas de dos elementos que se presentó en la figura 13.10, trace el patrón de campo normalizado cuando las corrientes son alimentadas:

a) En la misma fase ($\alpha = 0$), $d = \lambda/2$
b) 90° fuera de fase ($\alpha = \pi/2$), $d = \lambda/4$

Solución:

El campo normalizado del arreglo se obtiene de las ecuaciones (13.55) a (13.57) como

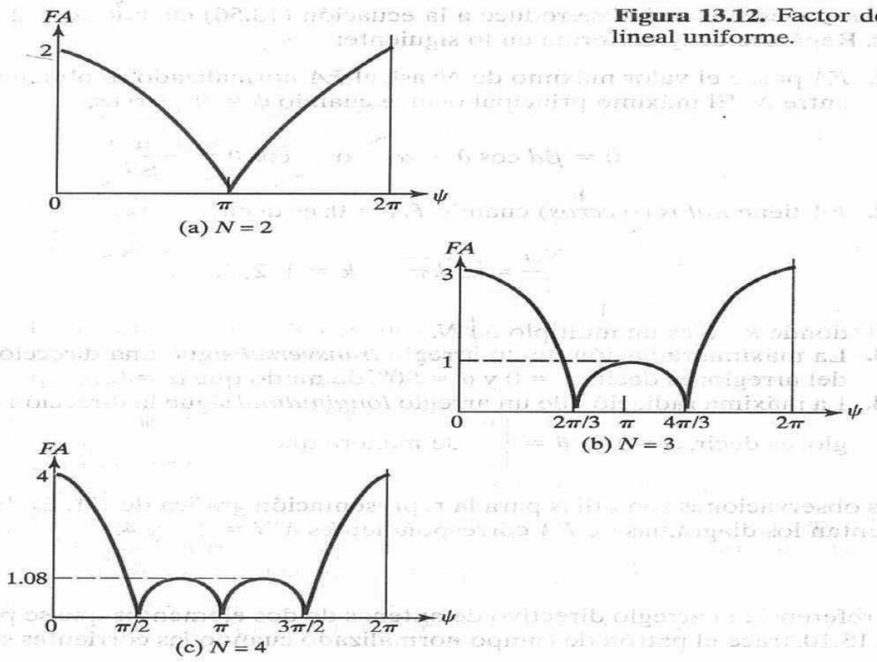
$$f(\theta) = \left| \cos\theta \cos\left[\frac{1}{2}(\beta d \cos\theta + \alpha)\right] \right|$$

a) Si $\alpha = 0$, $d = \lambda/2$, $\beta d = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\lambda}{2} = \pi$. Por tanto,

$$\begin{array}{ccccc} f(\theta) & = & |\cos\theta| & & \left|\cos\dfrac{\pi}{2}(\cos\theta)\right| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{patrón resultante} & = & \text{patrón unitario} & \times & \text{patrón de grupo} \end{array}$$

El diagrama del patrón unitario es sencillo, pues, como se advierte en la figura 13.13*(a)*, se

Figura 13.12. Factor de arreglo de un arreglo lineal uniforme.



reduce a una versión invertida del patrón de la figura 13.7*(a)*, relativo al dipolo hertciano. Para trazar un patrón de grupo, antes es preciso determinar sus nulos y máximos. En cuanto a los nulos (o ceros),

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}\cos\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$$

o

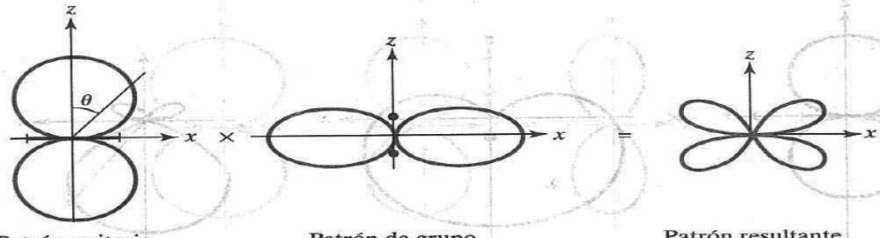
$$\theta = 0°, 180°$$

En cuanto a los máximos,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = 1 \rightarrow \cos\theta = 0$$

o

$$\theta = 90°$$



Patrón unitario (a) Patrón de grupo (b) Patrón resultante (c)

Figura 13.13. Para el inciso *a)* del ejemplo 13.6; patrones de campo en el plano que contiene los ejes de los elementos.

El patrón de grupo se muestra en la figura 13.12*(b)*. Se trata del diagrama polar obtenido del trazo de $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|$ con $\theta = 0°, 5°, 10°, 15°, \ldots, 360°$ y de la incorporación de los nulos y máximos en $\theta = 0°, 180°$ y $\theta = 90°$, respectivamente. La multiplicación de la figura 13.13*(a)* por la figura 13.13*(b)* da como resultado el patrón de la figura 13.13*(c)*. Cabe destacar que los patrones de campo de la figura 13.13 se ubican en el plano que contiene los ejes de los elementos. Nótese que: 1. en el plano *yz*, el cual es normal a los ejes de los elementos, el patrón unitario (= 1) es un círculo [véase la figura 13.7*(b)*], mientras que el patrón de grupo permanece como en la figura 13.13*(b)*; por consiguiente, en este caso el patrón resultante es igual al de grupo. 2. En el plano *xy*, $\theta = \pi/2$, de tal forma que el patrón unitario tiende a cero mientras que el patrón de grupo (= 1) es un círculo.

b) Si $\alpha = \pi/2$, $d = \lambda/4$ y $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{ccccc} f(\theta) & = & |\cos\theta| & & \left|\cos\frac{\pi}{4}(\cos\theta + 1)\right| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{patrón resultante} & = & \text{patrón unitario} & \times & \text{patrón de grupo} \end{array}$$

El patrón unitario se mantiene como en la figura 13.13*(a)*. En cuanto al patrón de grupo, el nulo ocurre cuando

$$\cos\frac{\pi}{4}(1 + \cos\theta) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}(1 + \cos\theta) = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$$

o

$$\cos\theta = 1 \rightarrow \theta = 0°$$

Los máximos y mínimos ocurren cuando

$$\frac{d}{d\theta}\left[\cos\frac{\pi}{4}(1 + \cos\theta)\right] = 0 \rightarrow \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(1 + \cos\theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \rightarrow \theta = 0°, 180°$$

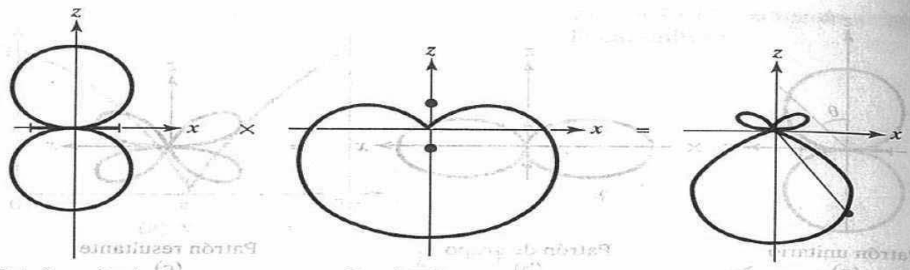


Figura 13.14. Para el inciso *b)* del ejemplo 13.6; patrones de campo en el plano que contiene los ejes de los elementos.

y

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}(1 + \cos\theta) = 0 \rightarrow \cos\theta = -1 \quad \text{o} \quad \theta = 180°$$

Cada patrón de campo se obtiene variando $\theta = 0°, 5°, 10°, 15°, \ldots, 180°$. Adviértase que $\theta = 180°$ corresponde al máximo valor de FA, mientras que $\theta = 0°$ corresponde al nulo. Así, en la figura 13.14 se presentan los patrones unitario, de grupo y resultante en el plano que contiene los ejes de los elementos. Obsérvese en los patrones de grupo que el arreglo transversal ($\alpha = 0$) de la figura 13.13 es bidireccional, en tanto que el arreglo longitudinal ($\alpha = \beta d$) de la figura 13.14 es unidireccional.

Ejercicio 13.6

Repita el ejemplo 13.6 con relación a los casos siguientes:

a) $\alpha = \pi$, $d = \lambda/2$, *b)* $\alpha = -\pi/2$, $d = \lambda/4$.

Respuesta: Véase la figura 13.15.

Ejemplo 13.7

Considere un arreglo de tres elementos con razón de corriente 1:2:1, como se ilustra en la figura 13.16*(a)*. Trace el patrón de grupo en el plano que contiene los ejes de los elementos.

Solución:

Para efectos analíticos, dividamos el elemento intermedio de la figura 13.16*(a)*, portador de corriente $2I\underline{/0°}$, en dos elementos, portador cada uno de ellos de corriente $I\underline{/0°}$. Esto resulta en cuatro elementos en lugar de tres, como se muestra en la figura 13.16*(b)*. Si se consideran los elementos 1 y 2 como un grupo y los elementos 3 y 4 como otro grupo, se obtiene el arreglo de dos elementos de la figura 13.16*(c)*. Cada grupo es a su vez un arreglo de dos elementos con $d = \lambda/2$, $\alpha = 0$, de manera que el patrón de grupo del arreglo de dos elementos (o el patrón unitario del arreglo de tres elementos) es simi-

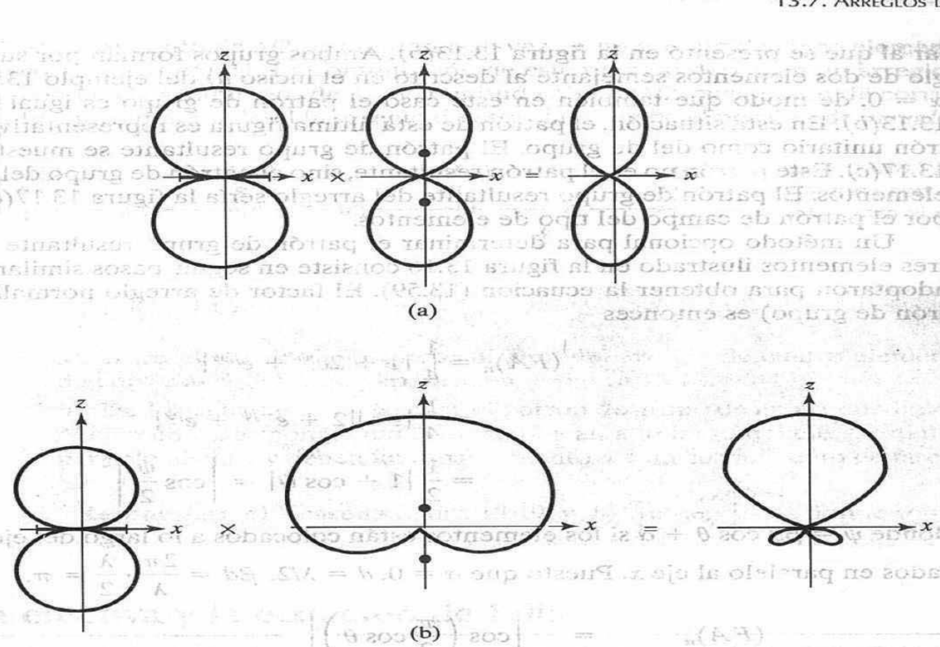


Figura 13.15. Para el ejercicio 13.6.

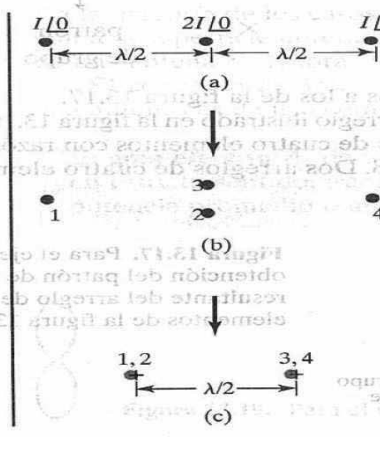


Figura 13.16. Para el ejemplo 13.7: **(a)** arreglo de tres elementos con razón de corriente 1:2:1; **(b)** y **(c)** arreglos equivalentes de dos elementos.

lar al que se presentó en la figura 13.13*(b)*. Ambos grupos forman por su parte un arreglo de dos elementos semejante al descrito en el inciso *a)* del ejemplo 13.6, con $d = \lambda/2$, $\alpha = 0$, de modo que también en este caso el patrón de grupo es igual al de la figura 13.13*(b)*. En esta situación, el patrón de esta última figura es representativo tanto del patrón unitario como del de grupo. El patrón de grupo resultante se muestra en la figura 13.17*(c)*. Este patrón no es el patrón resultante, sino el patrón de grupo del arreglo de tres elementos. El patrón de grupo resultante del arreglo sería la figura 13.17*(c)* multiplicada por el patrón de campo del tipo de elementos.

Un método opcional para determinar el patrón de grupo resultante del arreglo de tres elementos ilustrado en la figura 13.16 consiste en seguir pasos similares a los que se adoptaron para obtener la ecuación (13.59). El factor de arreglo normalizado (o el patrón de grupo) es entonces

$$
\begin{aligned}
(FA)_n &= \frac{1}{4}\,|1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}| \\
&= \frac{1}{4}\,|e^{j\psi}|\,|2 + e^{-j\psi} + e^{j\psi}| \\
&= \frac{1}{2}\,|1 + \cos\psi| = \left|\cos\frac{\psi}{2}\right|^2
\end{aligned}
$$

donde $\psi = \beta d \cos\theta + \alpha$ si los elementos están colocados a lo largo del eje z pero orientados en paralelo al eje x. Puesto que $\alpha = 0$, $d = \lambda/2$, $\beta d = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{2} = \pi$,

$$(FA)_n = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|^2$$

$$\underbrace{(FA)_n}_{\text{patrón de resultante}} = \underbrace{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|}_{\text{patrón unitario}} \times \underbrace{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|}_{\text{patrón de grupo}}$$

Los diagramas de estos patrones son idénticos a los de la figura 13.17.

Si dos arreglos de tres elementos, como el arreglo ilustrado en la figura 13.16*(a)*, tienen un espaciamiento de $\lambda/2$, de ello resulta un arreglo de cuatro elementos con razón de corriente 1:3:3:1 como el que aparece en la figura 13.18. Dos arreglos de cuatro elementos con un

Figura 13.17. Para el ejemplo 13.7; obtención del patrón de grupo resultante del arreglo de tres elementos de la figura 13.16*(a)*.

espaciamiento de $\lambda/2$ resultarían a su vez en un arreglo de cinco elementos con razón de corriente 1:4:6:4:1. La continuación de este proceso deriva en un arreglo de N elementos con un espaciamiento de $\lambda/2$ y longitud $(N-1)\lambda/2$, cuya razón de corriente son los coeficientes binomiales. Un arreglo de esta clase recibe el nombre de *arreglo binomial lineal.*

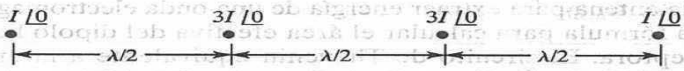


Figura 13.18. Arreglo de cuatro elementos con razón de corriente 1:3:3:1; para el ejercicio 13.7.

Ejercicio 13.7

a) Trace el patrón de grupo resultante del arreglo de cuatro elementos con razón de corriente 1:3:3:1 que aparece en la figura 13.18.

b) Deduzca una expresión para el patrón de grupo de un arreglo binomial lineal de N elementos. Suponga que éstos se ubican a lo largo del eje z, están orientados en paralelo al eje x y tienen un espaciamiento d y un corriemiento de fase entre ellos α.

Respuestas: *a)* Véase la figura 13.19 y *b)* $\left|\cos\frac{\psi}{2}\right|^{N-1}$, donde $\psi = \beta d\cos\theta + \alpha$.

†13.8. Área efectiva y la ecuación de Friis

Cuando la onda electromagnética de entrada es normal a la superficie entera de una antena receptora, la potencia recibida es

$$P_r = \int \mathcal{P}_{\text{prom}} \cdot d\mathbf{S} = \mathcal{P}_{\text{prom}}\, S \tag{13.67}$$

En la mayoría de los casos, sin embargo, la onda electromagnética de entrada no es normal a la superficie entera de la antena, lo cual vuelve necesaria la idea del área efectiva de una antena receptora.

El concepto de área efectiva o abertura efectiva (sección transversal receptora de una antena) es de uso común en el análisis de antenas receptoras.

El **área efectiva** A_e de una antena receptora es la razón de la potencia recibida (o, en estricto sentido, transmitida a la carga) promedio temporal P_r a la densidad de potencia promedio temporal $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ de la onda incidente en la antena.

Figura 13.19. Para el inciso *a)* del ejercicio 13.7.

Esto es,

$$A_e = \frac{P_r}{\mathcal{P}_{\text{prom}}} \tag{13.68}$$

Con referencia a la ecuación (13.68), cabe hacer notar que el área efectiva es una medida de la capacidad de la antena para extraer energía de una onda electromagnética de paso.

Deduzcamos la fórmula para calcular el área efectiva del dipolo hertciano en calidad de antena receptora. El circuito de Thevenin equivalente a la antena receptora aparece en la figura 13.20, donde V_{ca} es el voltaje en circuito abierto inducido en las terminales de la antena, $Z_{\text{ent}} = R_{\text{rad}} + jX_{\text{ent}}$ la impedancia de la antena y $Z_L = R_L + jX_L$ la impedancia externa de la carga, la cual podría ser la impedancia de entrada de la línea de transmisión que alimenta a la antena. Para una máxima transferencia de potencia, $Z_L = Z^*_{\text{ent}}$ y $X_L = -X_{\text{ent}}$. La potencia promedio temporal transmitida a la carga acoplada es entonces

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{2}\left[\frac{|V_{\text{ca}}|}{2R_{\text{rad}}}\right]^2 R_{\text{rad}} \\ &= \frac{|V_{\text{ca}}|^2}{8R_{\text{rad}}} \end{aligned} \tag{13.69}$$

En el caso del dipolo hertciano, $R_{\text{rad}} = 80\pi^2(dl/\lambda)^2$ y $V_{\text{ca}} = E\,dl$, donde E es la intensidad efectiva de campo paralela al eje del dipolo. En consecuencia, la ecuación (13.69) se convierte en

$$P_r = \frac{E^2\lambda^2}{640\pi^2} \tag{13.70}$$

La potencia promedio temporal en la antena es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{E^2}{2\eta_o} = \frac{E^2}{240\pi} \tag{13.71}$$

La inserción de las ecuaciones (13.70) y (13.71) en la ecuación (13.68) resulta en

$$A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 1.5\frac{\lambda^2}{4\pi}$$

o

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D \tag{13.72}$$

Figura 13.20. Circuito de Thévenin equivalente a una antena receptora.

donde $D = 1.5$ es la directividad del dipolo hertciano. Aunque la ecuación (13.72) se derivó con relación al dipolo hertciano, es aplicable a cualquier antena si D se reemplaza por $G_d(\theta, \phi)$. En general, así,

$$\boxed{A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_d(\theta, \phi)} \tag{13.73}$$

Supongamos ahora dos antenas en el vacío separadas por una distancia r, como se muestra en la figura 13.21. La antena transmisora tiene área efectiva A_{et} y ganancia directiva G_{dt} y transmite una potencia total P_t (= P_{rad}). La antena receptora tiene área efectiva A_{er} y ganancia directiva G_{dr} y recibe una potencia total P_r. En la antena transmisora,

$$G_{dt} = \frac{4\pi U}{P_t} = \frac{4\pi r^2 \mathcal{P}_{\text{prom}}}{P_t}$$

o

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{P_t}{4\pi r^2} G_{dt} \tag{13.74}$$

Al aplicar las ecuaciones (13.68) y (13.73) se obtiene la potencia recibida promedio temporal, en esta forma:

$$P_r = \mathcal{P}_{\text{prom}} A_{er} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{dr} \mathcal{P}_{\text{prom}} \tag{13.75}$$

La sustitución de la ecuación (13.74) en la ecuación (13.75) resulta en

$$\boxed{P_r = G_{dr} G_{dt} \left[\frac{\lambda}{4\pi r}\right]^2 P_t} \tag{13.76}$$

llamada *fórmula de transmisión de Friis*. Esta fórmula relaciona la potencia recibida por una antena con la potencia transmitida por la otra en tanto ambas estén separadas por $r > 2d^2/\lambda$, donde d es la mayor dimensión de cualquiera de ellas [véase la ecuación (13.52)]. Así, para aplicar la ecuación de Friis es preciso confirmar que cada antena se encuentre en el campo lejano de la otra.

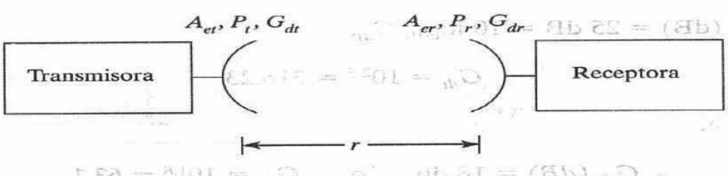


Figura 13.21. Antenas transmisora y receptora en el vacío.

Ejemplo 13.8 Halle el área efectiva máxima de un dipolo $\lambda/2$ de alambre que opera a 30 MHz. ¿Cuánta potencia recibe el dipolo de una onda incidente plana con intensidad de 2 mV/m?

Solución:

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_d(\theta, \phi)$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{30 \times 10^6} = 10 \text{ m}$$

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{\eta}{\pi R_{\text{rad}}} f^2(\theta) = \frac{120\pi}{73\pi} f^2(\theta) = 1.64 f^2(\theta)$$

$$G_d(\theta, \phi)_{\text{máx}} = 1.64$$

$$A_{e,\,\text{máx}} = \frac{10^2}{4\pi}(1.64) = 13.05 \text{ m}^2$$

$$P_r = \mathcal{P}_{\text{prom}} A_e = \frac{E_o^2}{2\eta} A_e$$

$$= \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{240\pi} 13.05 = 71.62 \text{ nW}$$

Ejercicio 13.8
Determine el área efectiva máxima de un dipolo hertciano de 10 cm de longitud que opera a 10 MHz. Si la potencia que recibe esta antena es de 3 μW, ¿cuál es la densidad de potencia de la onda incidente?

Respuesta: 1.074 m^2, 2.793 μW/m^2.

Ejemplo 13.9 Una antena transmisora y otra receptora separadas 200 λ entre sí registran una ganancia directiva de 25 y 18 dB, respectivamente. Si la potencia recibida debe ser de 5 mW, calcule la potencia mínima transmitida.

Solución:
Puesto que G_{dt} (dB) = 25 dB = 10 $\log_{10} G_{dt}$,

$$G_{dt} = 10^{2.5} = 316.23$$

De igual manera,

$$G_{dr}\ (dB) = 18 \text{ db} \quad \text{o} \quad G_{dr} = 10^{1.8} = 63.1$$

Al aplicar la ecuación de Friis se obtiene

$$P_r = G_{dr}G_{dt}\left[\frac{\lambda}{4\pi r}\right]^2 P_t$$

o

$$\begin{aligned} P_t &= P_r\left[\frac{4\pi r}{\lambda}\right]^2 \frac{1}{G_{dr}G_{dt}} \\ &= 5 \times 10^{-3}\left[\frac{4\pi \times 200\,\lambda}{\lambda}\right]^2 \frac{1}{(63.1)(316.23)} \\ &= 1.583 \text{ W} \end{aligned}$$

Ejercicio 13.9

A 20 km de una antena en aire que irradia una potencia total de 100 kW se mide una intensidad de campo eléctrico máxima radiada de 12 mV/m. Halle: *a)* la directividad de la antena en dB, *b)* su máxima ganancia de potencia si $\eta_r = 98\%$.

Respuestas: *a)* 3.34 dB y *b)* 2.117.

†13.9. Ecuaciones del radar

Los radares son dispositivos electromagnéticos útiles en la detección y localización de objetos. El término *radar* es el acrónimo de la expresión *ra*dio *d*etection *a*nd *r*anging ("detección y ubicación por radio"). En un sistema de radar común como el que aparece en la figura 13.22*(a)* se transmiten impulsos de energía electromagnética a un objeto distante. Una misma antena cumple las funciones de transmisión y recepción, de modo que el intervalo temporal entre los impulsos transmitido y reflejado permite determinar la distancia en la que se encuentra el objetivo. Si r es la distancia entre el radar y el objetivo y c la velocidad de la luz, el tiempo transcurrido entre los impulsos transmitido y recibido es $2r/c$. De la medición de ese periodo se deduce r.

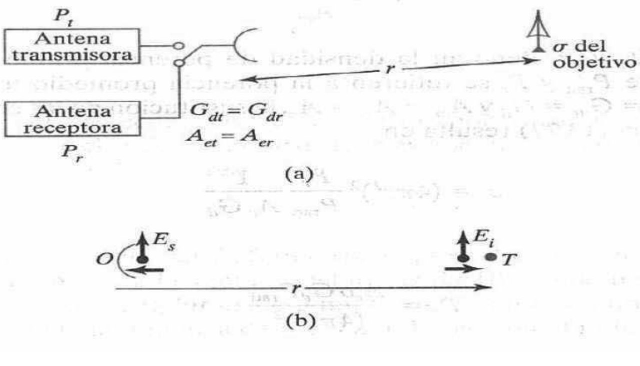


Figura 13.22. **(a)** Sistema de radar común; **(b)** simplificación del sistema en **(a)** para el cálculo de la sección transversal σ del objetivo.

La capacidad de un objetivo para dispersar (o reflejar) energía se caracteriza por su *sección transversal de dispersión* σ (o *sección transversal de radar*), la cual se expresa en unidades de área y puede medirse experimentalmente.

La sección transversal de dispersión es el área equivalente que al dispersar isotrópicamente el monto de potencia que intercepta, produce en el radar una densidad de energía igual a la dispersada (o reflejada) por el objetivo.

Es decir,

$$\mathcal{P}_s = \lim_{r\to\infty} \left[\frac{\sigma \mathcal{P}_i}{4\pi r^2}\right]$$

o

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_i} \tag{13.77}$$

donde $\mathcal{P}_i$ es la densidad de potencia incidente en el objetivo T y $\mathcal{P}_s$ la densidad de potencia dispersada en el transceptor O, como se muestra en la figura 13.22*(b)*.

A partir de la ecuación (13.43), la densidad de potencia incidente $\mathcal{P}_i$ en el objetivo T es

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{G_d}{4\pi r^2} P_{\text{rad}} \tag{13.78}$$

La potencia recibida en el transceptor O es

$$P_r = A_{er}\,\mathcal{P}_s$$

o

$$\mathcal{P}_s = \frac{P_r}{A_{er}} \tag{13.79}$$

Debe señalarse que $\mathcal{P}_i$ y $\mathcal{P}_s$ denotan la densidad de potencia promedio temporal, en watts/m^2, mientras que P_{rad} y P_r se refieren a la potencia promedio temporal total, en watts. Puesto que $G_{dr} = G_{dt} = G_d$ y $A_{er} = A_{et} = A_e$, la sustitución de las ecuaciones (13.78) y (13.79) en la ecuación (13.77) resulta en

$$\sigma = (4\pi r^2)^2 \frac{P_r}{P_{\text{rad}}} \frac{1}{A_e\, G_d} \tag{13.80a}$$

o

$$P_r = \frac{A_e \sigma G_d P_{\text{rad}}}{(4\pi r^2)^2} \tag{13.80b}$$

Tabla 13.1. Designaciones de las frecuencias de radar.

Designación	*Frecuencia*
UHF	300-1 000 MHz
L	1 000-2 000 MHz
S	2 000-4 000 MHz
C	4 000-8 000 MHz
X	8 000-12 500 MHz
Ku	12.5-18 GHz
K	18-26.5 GHz
Milímetro	>35 GHz

De acuerdo con la ecuación (13.73), $A_e = \lambda^2 G_d/4\pi$. Por tanto,

$$\boxed{P_r = \frac{(\lambda G_d)^2 \sigma P_{\text{rad}}}{(4\pi)^3\, r^4}} \tag{13.81}$$

la *ecuación de transmisión del radar* en el vacío, básica para medir la sección transversal de dispersión de un objetivo. Al despejar r en la ecuación (13.81) se obtiene

$$\boxed{r = \left[\frac{\lambda^2 G_d^2 \sigma}{(4\pi)^3} \cdot \frac{P_{\text{rad}}}{P_r}\right]^{1/4}} \tag{13.82}$$

la *ecuación de distancia del radar*. Dada la potencia mínima detectable del receptor, esta ecuación determina la distancia o el alcance máximo de un radar, aunque también permite obtener información de utilidad en ingeniería sobre los efectos de los diversos parámetros en el rendimiento de un sistema de radar.

El radar considerado hasta aquí es del tipo *monostático*, en razón del predominio de este tipo en las aplicaciones prácticas. En un *radar bistático*, el transmisor y el receptor están separados. Si las antenas transmisora y receptora se hallan a distancias r_1 y r_2 del objetivo y $G_{dr} \neq G_{dt}$, en el caso del radar bistático la ecuación (13.81) se convierte en

$$P_r = \frac{G_{dt} G_{dr}}{4\pi} \left[\frac{\lambda}{4\pi r_1 r_2}\right]^2 \sigma P_{\text{rad}} \tag{13.83}$$

Las frecuencias de transmisión por radar van de los 25 a los 70 000 MHz. En la tabla 13.1 se clasifican tales frecuencias y se indica la denominación con que las conocen los ingenieros de radares.

Ejemplo 13.10

Un radar de banda S que transmite a 3 GHz irradia 200 kW. Determine la densidad de potencia de la señal a distancias de 100 y 400 millas náuticas si el área efectiva de la antena del radar es de 9 m². Considerando un objetivo de 20 m² a 300 millas náuticas, calcule la potencia de la señal reflejada en el radar.

Solución:

La milla náutica es una unidad común en las comunicaciones por radar.

$$1 \text{ milla náutica (mn)} = 1852 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 0.1 \text{ m}$$

$$G_{dt} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{et} = \frac{4\pi}{(0.1)^2} 9 = 3600\pi$$

En el caso de $r = 100 \text{ mn} = 1.852 \times 10^5$ m

$$\mathcal{P} = \frac{G_{dt} P_{\text{rad}}}{4\pi r^2} = \frac{3600\pi \times 200 \times 10^3}{4\pi\,(1.852)^2 \times 10^{10}}$$

$$= 5.248 \text{ mW/m}^2$$

En el caso de $r = 400 \text{ mn} = 4\,(1.852 \times 10^5)$ m

$$\mathcal{P} = \frac{5.248}{(4)^2} = 0.328 \text{ mW/m}^2$$

Mediante la ecuación (13.80*b*),

$$P_r = \frac{A_e \sigma G_d P_{\text{rad}}}{[4\pi r^2]^2}$$

donde $r = 300 \text{ mn} = 5.556 \times 10^5$ m

$$P_r = \frac{9 \times 20 \times 3600\pi \times 200 \times 10^3}{[4\pi \times 5.556^2]^2 \times 10^{20}} = 2.706 \times 10^{-14} \text{ W}$$

Mediante la ecuación (13.81) se obtendría el mismo resultado.

Ejercicio 13.10

Un radar de banda C con una antena de 1.8 m de radio transmite 60 kW a una frecuencia de 6000 MHz. Si la potencia mínima detectable es de 0.26 mW, con referencia a una sección transversal del objetivo de 5 m^2, calcule la distancia máxima en millas náuticas y la densidad de potencia de la señal a la mitad de esa distancia. Suponga una eficiencia igual a la unidad y que el área efectiva de la antena equivale a 70% del área real.

Respuesta: 0.6309 mn, 500.90 W/m^2.

Resumen

1. En este capítulo se expusieron las ideas y definiciones básicas de la teoría de antenas. Los tipos básicos descritos fueron el dipolo hertciano (o de longitud diferencial), dipolo de media onda, monopolo de un cuarto de onda y antena de cuadro pequeño.
2. Si se conoce la distribución de corriente de una antena, en teoría es posible hallar el potencial magnético vectorial retardado **A**, con el que a su vez pueden determinarse los campos electromagnéticos retardados **H** y **E** mediante

$$\mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{A}}{\mu}, \qquad \mathbf{E} = \eta\, \mathbf{H} \times \mathbf{a}_k$$

Los campos de la zona lejana se obtienen manteniendo únicamente los términos $1/r$.
3. El análisis del dipolo hertciano es fundamental para el de otras antenas. La reducida resistencia de radiación de este dipolo limita su utilidad práctica.
4. El dipolo de media onda es de longitud igual a $\lambda/2$. De uso más práctico y frecuente que el dipolo hertciano, su impedancia de entrada es de $73 + j42.5\ \Omega$.
5. El monopolo de un cuarto de onda es la mitad de un dipolo de media onda sobre un plano conductor.
6. Los patrones de radiación de uso más común son los de intensidad de campo, intensidad de potencia e intensidad de radiación. El patrón de campo es el diagrama de $|E_s|$ o su forma normalizada $f(\theta)$. El patrón de potencia es el diagrama de $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ o su forma normalizada $f^2(\theta)$.
7. La ganancia directiva es la razón de $U(\theta, \phi)$ a su valor promedio. La directividad es el máximo valor de la ganancia directiva.
8. Un arreglo de antenas es un grupo de elementos de radiación dispuestos para producir características particulares de radiación. Su patrón de radiación se obtiene multiplicando el patrón unitario (debido a un elemento del grupo) por el patrón de grupo, el diagrama del factor de arreglo normalizado. En el caso de un arreglo lineal uniforme de N elementos,

$$FA = \left| \frac{\text{sen}\,(N\psi/2)}{\text{sen}\,(\psi/2)} \right|$$

donde $\psi = \beta d \cos\theta + \alpha$, $\beta = 2\pi/\lambda$, d = espaciamiento entre los elementos y α = corrimiento de fase entre los elementos.
9. La fórmula de transmisión de Friis caracteriza el acoplamiento entre dos antenas en términos de su ganancia directiva, distancia de separación y frecuencia de operación.
10. En un radar bistático (con antenas transmisora y receptora separadas), la potencia recibida está dada por

$$P_r = \frac{G_{dt}G_{dr}}{4\pi}\left[\frac{\lambda}{4\pi r_1 r_2}\right]^2 \sigma\, P_{\text{rad}}$$

En un radar monostático, $r_1 = r_2 = r$ y $G_{dt} = G_{dr}$.

Preguntas de repaso

13.1. **Una antena ubicada en cierta ciudad es fuente de ondas de radio. ¿Cuánto tiempo tardan éstas en llegar a una población a 12 000 km de esa ciudad?**

a) 36 s
b) 20 μs
c) 20 ms
d) 40 ms
e) Ninguno de los tiempos anteriores

13.2. **¿Cuál es el término de radiación en la ecuación (13.34)?**

a) El término $1/r$
b) El término $1/r^2$
c) El término $1/r^3$
d) Todos los anteriores

13.3. **Un muy pequeño alambre delgado de longitud $\lambda/100$ tiene una resistencia de radiación de**

a) $\simeq 0\ \Omega$
b) 0.08 Ω
c) 7.9 Ω
d) 790 Ω

13.4. **Una antena monopolar de un cuarto de onda que opera en aire a una frecuencia de 1 MHz debe tener una longitud total de**

a) $\ell \gg \lambda$
b) 300 m
c) 150 m
d) 75 m
e) $\ell \ll \lambda$

13.5. **Si una antena de cuadro pequeño de una vuelta tiene una resistencia de radiación de 0.04 Ω, ¿cuántas vueltas se necesitan para producir una resistencia de radiación de 1 Ω?**

a) 150
b) 125
c) 50
d) 25
e) 5

13.6. A una distancia de 8 km de una antena diferencial, la intensidad de campo es de 12 μV/m. La intensidad de campo en una localidad a 20 km de la antena es de

a) 75 μV/m
b) 30 μV/m
c) 4.8 μV/m
d) 1.92 μV/m

13.7. Si una antena tiene $U_{\text{máx}} = 10$ W/sr, $U_{\text{prom}} = 4.5$ W/sr y $\eta_r = 95\%$, su potencia de entrada es de

a) 2.222 W
b) 12.11 W
c) 55.55 W
d) 59.52 W

13.8. Una antena receptora ubicada en un aeropuerto tiene una dimensión máxima de 3 m y opera a 100 MHz. Un avión que, en dirección al aeropuerto, se halla a 1/2 km de la antena se encuentra en la región del campo lejano de ésta.

a) Cierto.
b) Falso.

13.9. Una antena receptora se sitúa a 100 m de la antena transmisora. Si el área efectiva de la primera es de 500 cm^2 y la densidad de potencia en la localidad receptora es de 2 mW/m^2, la potencia recibida total es de:

a) 10 nW
b) 100 nW
c) 1 μW
d) 10 μW
e) 100 μW

13.10. Sea R el alcance máximo de un radar monostático. Si, dada una sección transversal del radar de 5 m^2, en $R/2$ se encuentra un objetivo, ¿cuál debería ser la sección transversal de éste en $3R/2$ para resultar en una intensidad de señal igual a la del radar?

a) 0.0617 m^2
b) 0.555 m^2
c) 15 m^2
d) 45 m^2
e) 405 m^2

Respuestas: 13.1*d*, 13.2*a*, 13.3*b*, 13.4*d*, 13.5*e*, 13.6*c*, 13.7*d*, 13.8*a*, 13.9*e*, 13.10*e*.

Problemas

13.1. El potencial magnético vectorial en el punto $P(r, \theta, \phi)$ debido a una antena pequeña situada en el origen está dado por

$$\mathbf{A}_s = \frac{50\, e^{-j\beta r}}{r}\, \mathbf{a}_x$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Halle $\mathbf{E}(r, \theta, \phi, t)$ y $\mathbf{H}(r, \theta, \phi, t)$ en el campo lejano.

13.2. Un dipolo hertciano en el vacío situado en el origen tiene $d\ell = 20$ cm e $I = 10 \cos 2\pi 10^7 t$ A. Halle $|E_{\theta s}|$ en el punto distante (100, 0, 0).

13.3. Una fuente de 2 A que opera a 300 MHz alimenta a un dipolo hertciano de 5 mm de longitud situado en el origen. Halle $\mathbf{E}_s$ y $\mathbf{H}_s$ en (10, 30°, 90°).

13.4. *a)* En vez de la distribución constante de corriente supuesta en el dipolo pequeño de la sección 13.2, suponga una distribución triangular de corriente $I_s = I_o\left(1 - \frac{2|z|}{\ell}\right)$, como se ilustra en la figura 13.23. Demuestre que

$$R_{\text{rad}} = 20\,\pi^2 \left[\frac{\ell}{\lambda}\right]^2$$

lo que equivale a la cuarta parte de la ecuación (13.13). Así, R_{rad} depende de la distribución de corriente.

b) Calcule la longitud del dipolo resultante de una resistencia de radiación de 0.5 Ω.

13.5. Una antena puede diseñarse como un dipolo eléctrico de 5 m de largo a 3 MHz. Halle su resistencia de radiación suponiendo una corriente uniforme en su longitud.

13.6. Si un dipolo de media onda es alimentado por una línea de transmisión de 50 Ω, calcule el coeficiente de reflexión y la razón de onda estacionaria.

13.7. Una antena de radio de automóvil de 1 m de largo opera en la frecuencia de AM de 1.5 MHz. ¿Cuánta corriente se necesita para transmitir 4 W de potencia?

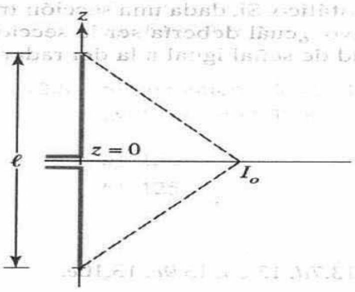


Figura 13.23. Pequeña antena de dipolo con distribución triangular de corriente; para el problema 13.4.

***13.8.** *a)* Demuestre que las expresiones de campo lejano relativas a un dipolo delgado de longitud ℓ portador de corriente sinusoidal $I_o \cos \beta z$ son

$$H_{\phi s} = \frac{jI_o e^{-\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{\beta\ell}{2}}{\operatorname{sen}\theta}, \quad E_{\theta s} = \eta H_{\phi s}$$

[*Pista*: Remítase a la figura 13.4 y a la ecuación (13.14).]

b) En una hoja de coordenadas polares, trace $f(\theta)$ del inciso *a)* respecto de $\ell = \lambda, 3\lambda/2$ y 2λ.

***13.9.** Con referencia al problema 13.4,

a) Determine $\mathbf{E}_s$ y $\mathbf{H}_s$ en el campo lejano.

b) Calcule la directividad del dipolo.

***13.10.** Una antena situada en la superficie de un terreno plano transmite una potencia promedio de 200 kW. Suponiendo que la totalidad de la potencia es emitida de manera uniforme sobre la superficie de un hemisferio con la antena en el centro, calcule *a)* el vector de Poynting promedio temporal a 50 km y *b)* el campo eléctrico máximo en ese sitio.

13.11. Una antena de cuadro de 100 vueltas y 20 cm de radio que opera a 10 MHz en el aire debe rendir una intensidad de campo de 50 mV/m a una distancia de 3 m del cuadro. Determine

a) La corriente con la que debe ser alimentada la antena.

b) La potencia promedio radiada por la antena.

13.12. Trace los patrones de los campos E y H normalizados para

a) Un dipolo de media onda.

b) Un monopolo de un cuarto de onda.

13.13. A partir del resultado del problema 13.8, trace los patrones de campo verticales de antenas monopolares de longitudes $\ell = 3\lambda/2, \lambda, 5\lambda/8$. Cabe indicar que el monopolo de $5\lambda/8$ es de uso muy común.

13.14. El campo de zona lejana de una antena en el vacío está dado por

$$\mathbf{E}_s = \frac{5 \operatorname{sen} 2\theta}{r} e^{-j\beta r}\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$$

donde $\beta = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}$. Determine la potencia radiada.

13.15. El campo eléctrico producido por una antena en el campo lejano es

$$\mathbf{E}_s = \frac{10}{r} e^{-j\beta r} \cos\theta \cos\phi \, \mathbf{a}_z$$

Trace el patrón vertical de la antena. Su diagrama debe incluir la mayor cantidad posible de puntos.

13.16. Con referencia a un dipolo hertciano, demuestre que la densidad de potencia promedio temporal se relaciona con la potencia de radiación de acuerdo con

$$P_{\text{prom}} = \frac{1.5 \operatorname{sen}^2\theta}{4\pi r^2} P_{\text{rad}}$$

13.17. En el campo lejano, una antena produce

$$P_{\text{prom}} = \frac{2 \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{r^2} \mathbf{a}_r \text{ W/m}^2, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi/2$$

Calcule su ganancia directiva y directividad.

13.18. Con referencia al problema 13.8, demuestre que el patrón de campo normalizado de una antena de onda completa ($\ell = \lambda$) está dado por

$$f(\theta) = \frac{\cos(\pi \cos\theta) + 1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Trace el patrón de campo.

13.19. Con relación a un dipolo delgado de longitud $\lambda/16$, halle: *a)* la ganancia directiva, *b)* la directividad, *c)* el área efectiva, *d)* la resistencia de radiación.

13.20. Repita el problema 13.19 con relación a una antena de cuadro circular delgada de diámetro $\lambda/12$.

13.21. Un dipolo de media onda de cobre tiene un diámetro de 2.6 mm. Determine su eficiencia si opera a 15 MHz.

[*Pista*: Obtenga R_ℓ de $R_\ell/R_{\text{cd}} = a/2\delta$; véase la sección 10.6.]

13.22. Halle U_{prom}, $U_{\text{máx}}$ y D si:

a) $U(\theta, \phi) = \operatorname{sen}^2 2\theta, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$

b) $U(\theta, \phi) = 4 \csc^2 2\theta, \quad \pi/3 < \theta < \pi/2, 0 < \phi < \pi$

c) $U(\theta, \phi) = 2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi$

13.23. Determine la ganancia directiva y directividad asociadas con las siguientes intensidades de radiación:

a) $U(\theta, \phi) = \operatorname{sen}^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$

b) $U(\theta, \phi) = 4 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi$

c) $U(\theta, \phi) = 10 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\phi/2, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi/2$

13.24. En el vacío, una antena emite un campo

$$E_{\phi s} = \frac{0.2 \cos^2\theta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \text{ kV/m}$$

en el campo lejano. Determine: *a)* la potencia radiada total, *b)* la ganancia directiva en $\theta = 60°$.

13.25. Deduzca $\mathbf{E}_s$ en el campo lejano debido al arreglo de dos elementos que aparece en la figura 13.24. Suponga que los elementos de dipolo hertciano son alimentados en la misma fase con corriente uniforme $I_o \cos \omega t$.

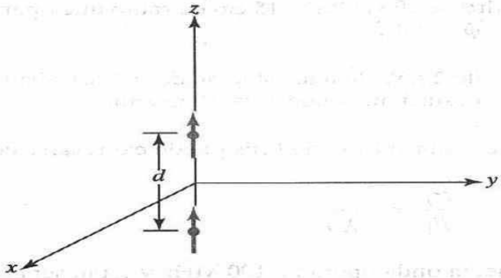


Figura 13.24. Arreglo de dos elementos para el problema 13.25.

13.26. Si los dos dipolos de que consta un arreglo directiva están separados por una longitud de onda y son alimentados por corrientes de igual magnitud y fase,

a) Halle el factor de arreglo.
b) Calcule los ángulos en los que ocurren los nulos del patrón.
c) Determine los ángulos en los que ocurren los máximos del patrón.
d) Trace el patrón de grupo en el plano que contiene a los elementos.

13.27. Si los dos elementos de un arreglo son alimentados por corrientes fuera de fase en 180°, trace el patrón de grupo si los elementos están separados por *a)* $d = \lambda/4$, *b)* $d = \lambda/2$.

13.28. Trace el patrón de grupo en el plano xz del arreglo de dos elementos de la figura 13.10 con

a) $d = \lambda, \alpha = \pi/2$
b) $d = \lambda/4, \alpha = 3\pi/4$
c) $d = 3\lambda/4, \alpha = 0$

13.29. Un arreglo directivo de antenas consta de N dipolos hertcianos idénticos uniformemente dispuestos a lo largo del eje z y polarizados en la dirección de z. Si el espaciamiento entre ellos es $\lambda/4$, trace el patrón de grupo cuando *a)* $N = 2$, *b)* $N = 4$.

13.30. Trace los patrones de grupo resultantes de los arreglos de cuatro elementos que aparecen en la figura 13.25.

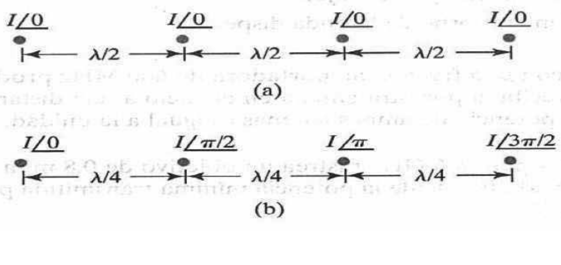


Figura 13.25. Para el problema 13.30

13.31. Respecto de una antena de cuadro de 10 vueltas y 15 cm de radio que opera a 100 MHz, calcule el área efectiva en $\theta = 30°$, $\phi = 90°$.

13.32. Una antena recibe una potencia de 2 μW de una estación de radio. Calcule su área efectiva si se ubica en la zona lejana de la estación, donde $E = 50$ mV/m.

13.33. *a)* Demuestre que la ecuación de transmisión de Friis puede expresarse como

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{A_{er} A_{et}}{\lambda^2 r^2}$$

b) Dos antenas de dipolo de media onda operan a 100 MHz y están separadas por 1 km. Si una de ellas transmite 80 W, ¿cuánta potencia recibe la otra?

13.34. La intensidad de campo eléctrico que incide en un dipolo de media onda es de 3 mV/m a 60 MHz. Calcule la potencia máxima recibida por la antena. Adopte 1.64 como directividad del dipolo.

13.35. La antena de un satélite sincrónico en órbita transmite una potencia de 320 W. Si tiene una ganancia de 40 dB a 15 GHz, calcule la potencia recibida por otra antena con una ganancia de 32 dB a una distancia de 24 567 km.

13.36. La ganancia directiva de una antena es de 34 dB. Si emite 7.5 kW a una distancia de 40 km, halle la densidad de potencia promedio temporal a esa distancia.

13.37. Dos antenas idénticas en una cámara sorda están separadas 12 m y orientadas en función de una máxima ganancia direccional. A una frecuencia de 5 GHz, la potencia recibida por una es 30 dB inferior a la transmitida por la otra. Calcule la ganancia de ambas en dB.

13.38. ¿Cuál es la máxima potencia que puede recibirse a una distancia de 1.5 km en el vacío en un circuito a 1.5 GHz compuesto por una antena transmisora con ganancia de 25 dB y una antena receptora con ganancia de 30 dB? La potencia transmitida es de 200 W.

13.39. Un radar de impulsos de banda L con una antena transmisora y receptora común y ganancia directiva de 3 500 opera a 1 500 MHz y transmite 200 kW. Si el objeto se encuentra a 120 km del radar y su sección transversal de dispersión es de 8 m², halle

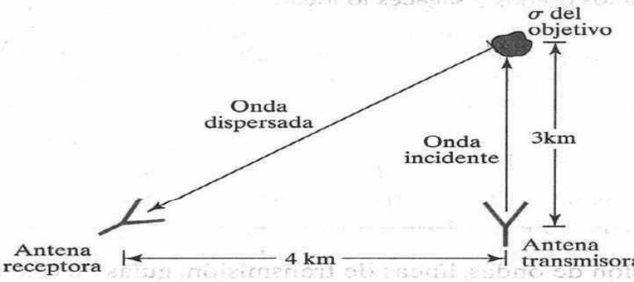
a) La magnitud de la intensidad de campo eléctrico incidente del objeto.
b) La magnitud de la intensidad de campo eléctrico dispersada en el radar.
c) El monto de potencia absorbido por el objeto.
d) La potencia que la antena absorbe de la onda dispersa.

13.40. Una antena transmisora con una frecuencia portadora de 600 MHz produce 80 W de potencia. Halle la potencia recibida por otra antena en el vacío a una distancia de 1 km. Suponga que la ganancia de potencia de ambas antenas es igual a la unidad.

13.41. Un radar monostático que opera a 6 GHz rastrea un objetivo de 0.8 m² a una distancia de 250 m. Si la ganancia es de 40 dB, calcule la potencia mínima transmitida para producir una potencia de retorno de 2 μW.

13.42. Las antenas del sistema de radar bistático que aparece en la figura 13.26 se encuentran a ras de tierra y están separadas 4 km entre sí, mientras que el objetivo, de 2.4 m², se halla a una altura de 3 km. El sistema opera a 5 GHz. Con G_{dt} de 36 dB y G_{dr} de 20 dB, determine la potencia radiada mínima necesaria para obtener una potencia de retorno de 8×10^{-12} W.

Figura 13.26. Para el problema 13.42.



14 Temas actuales

El futuro tiene varios nombres: para los débiles es lo imposible, para los creyentes lo desconocido y para los osados y sagaces lo ideal.

VÍCTOR HUGO

14.1. Introducción

Aparte de la propagación de ondas, líneas de transmisión, guías de ondas y antenas, existen otras áreas de aplicación del electromagnetismo. Entre ellas están las microondas, la interferencia y compatibilidad electromagnéticas, la fibra óptica, las comunicaciones satelitales, el bioelectromagnetismo, la maquinaria eléctrica, la meteorología por radar y la detección remota. Por limitaciones de espacio, en este capítulo nos ocuparemos únicamente de las tres primeras. Puesto que se trata de temas avanzados, sólo se hará una exposición introductoria de ellos. Nuestro estudio implicará la aplicación de conceptos de circuitos aprendidos en cursos anteriores y de conceptos de electromagnetismo aprendidos en los capítulos precedentes.

14.2. Microondas

Hasta la fecha existen tres medios para el transporte de miles de canales a largas distancias: *a)* enlaces de microondas, *b)* cables coaxiales y *c)* fibra óptica, tecnología relativamente nueva de la que trataremos más adelante.

Las **microondas** son ondas electromagnéticas cuya frecuencia va de aproximadamente 300 MHz a 1000 GHz.

Para efectos comparativos, la señal de una estación de radio de AM es de alrededor de 1 MHz, mientras que la de una estación de FM es de aproximadamente 100 MHz. El límite más alto de frecuencia de las microondas linda con el espectro óptico. Esto explica que su comportamiento sea más semejante al de los rayos de luz que al de las ondas de radio ordinarias. Probablemente el lector ya conoce aparatos de microondas como el horno de microondas, el cual opera a 2.4 GHz; la televisión por vía satélite, que opera a alrededor de 4 GHz, y el radar de vigilancia policiaca, el cual funciona a aproximadamente 22 GHz.

Entre las características a las que las microondas deben su atractivo para las comunicaciones están su amplio ancho de banda disponible (la capacidad para la transmisión

de información) y sus propiedades direccionales de onda corta. Puesto que el ancho de banda disponible limita el monto de información que es posible transmitir, el espectro de las microondas brinda más canales de comunicación que las bandas de radio y televisión. Las comunicaciones por microondas se han extendido a causa de la demanda, siempre creciente, de asignación de canales.

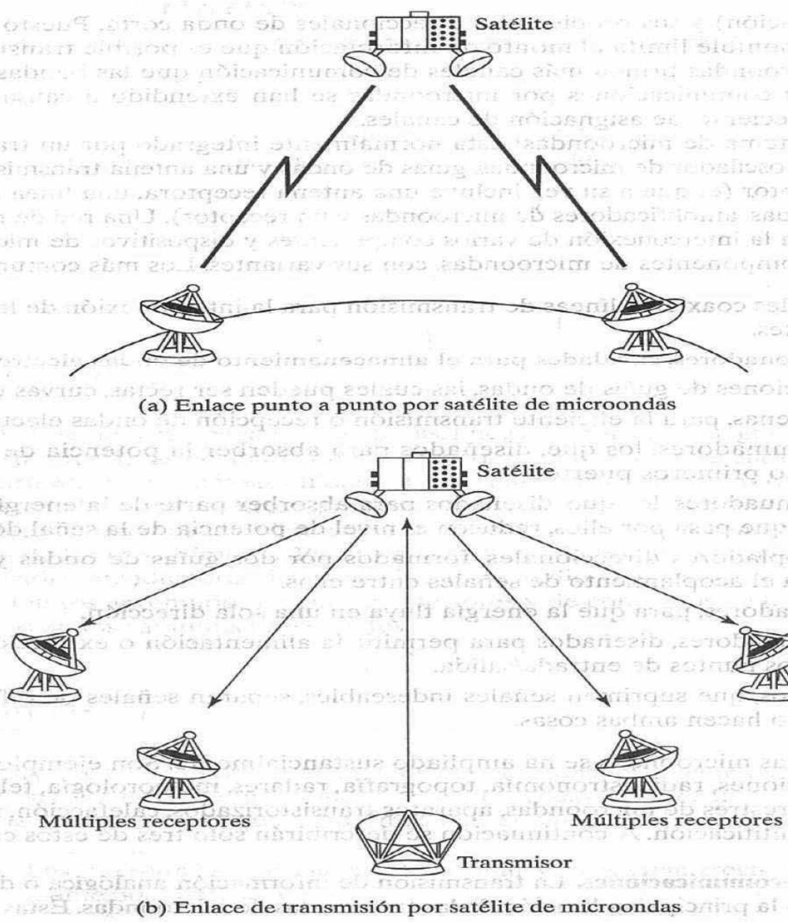
Un sistema de microondas[1] está normalmente integrado por un transmisor (el cual incluye un oscilador de microondas, guías de ondas y una antena transmisora) y un subsistema receptor (el que a su vez incluye una antena receptora, una línea de transmisión o guía de ondas, amplificadores de microondas y un receptor). Una red de microondas suele consistir en la interconexión de varios componentes y dispositivos de microondas. Existen diversos componentes de microondas, con sus variantes. Los más comunes son:

- Cables coaxiales, líneas de transmisión para la interconexión de los demás componentes.
- Resonadores, cavidades para el almacenamiento de ondas electromagnéticas.
- Secciones de guías de ondas, las cuales pueden ser rectas, curvas o en espiral.
- Antenas, para la eficiente transmisión o recepción de ondas electromagnéticas.
- Terminadores, los que, diseñados para absorber la potencia de entrada, actúan como primeros puertos.
- Atenuadores, los que, diseñados para absorber parte de la energía electromagnética que pasa por ellos, reducen el nivel de potencia de la señal de microondas.
- Acopladores direccionales, formados por dos guías de ondas y un mecanismo para el acoplamiento de señales entre ellas.
- Aisladores, para que la energía fluya en una sola dirección.
- Circuladores, diseñados para permitir la alimentación o extracción de energía en varios puntos de entrada/salida.
- Filtros, que suprimen señales indeseables, separan señales de diferentes frecuencias o hacen ambas cosas.

El uso de las microondas se ha ampliado sustancialmente. Son ejemplo de ello las telecomunicaciones, radioastronomía, topografía, radares, meteorología, televisión de UHF, enlaces terrestres de microondas, aparatos transistorizados, calefacción, medicina y sistemas de identificación. A continuación se describirán sólo tres de estos casos.

1. Telecomunicaciones. La transmisión de información analógica o digital de un punto a otro es la principal aplicación de las frecuencias de microondas. Éstas se propagan a lo largo de una línea recta como un rayo de luz y no sufren deformaciones en la ionosfera como las señales de menor frecuencia, lo cual hace posible la existencia de satélites de comunicación. Un satélite de comunicación es, en esencia, una estación de relevo de microondas para el enlace de dos o más transmisores y receptores terrestres. Recibe señales a una frecuencia, las repite o amplifica y las transmite a otra frecuencia. En la figura 14.1 se presentan dos modos usuales de operación de la comunicación por satélite. En la figura 14.1*(a)*

[1] Para un estudio completo de las microondas, véase D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 2a. ed., John Wiley, Nueva York, 1998.



(a) Enlace punto a punto por satélite de microondas

(b) Enlace de transmisión por satélite de microondas

Figura 14.1. Configuraciones de comunicaciones satelitales. *Fuente*: W. Stallings, *Data and Computer Communications*, Prentice-Hall, 5a. ed., Upper Saddle River, NJ, 1977, p. 90.

el satélite proporciona un enlace punto a punto, mientras que en la figura 14.1*(b)* establece múltiples enlaces entre un transmisor terrestre y varios receptores también terrestres.

2. Sistemas de radar. Los sistemas de radar fueron el motivo más importante del desarrollo de la tecnología de microondas, dada la obtención de mayor resolución en instrumentos de radar a más altas frecuencias. Sólo la región de microondas del espectro podía brindar la resolución requerida con antenas de tamaño razonable. La capacidad de las microondas para concentrar nítidamente una onda radiada explica su utilidad en esta aplicación. Además de servir para detectar aviones, guiar misiles supersónicos, observar y rastrear patrones climáticos y controlar el tráfico aéreo en aeropuertos, también se usan radares en alarmas contra robo, mecanismos para la apertura de puertas de cocheras y detectores de velocidad de la policía.

3. Calefacción. La energía de las microondas es más fácil de dirigir, controlar y concentrar que la de ondas electromagnéticas de menor frecuencia. Asimismo, a frecuencias de microondas ocurren varias resonancias atómicas y moleculares, lo que ha generado áreas de aplicación en ciencias básicas, detección remota y métodos de calefacción. Las propiedades calefactoras de la energía de las microondas son útiles en numerosas aplicaciones industriales y comerciales, entre las que destaca el horno de microondas, representado en la figura 14.2. Al oscilar el magnetrón, de las cavidades resonantes se extrae energía de microondas. La reflexión de las paredes estacionarias y el movimiento del ventilador inducen la distribución de esa energía, lo que acelera y uniforma el proceso de cocción. Además de utilizarse en la cocina, las propiedades calefactoras de las microondas también se emplean en la diatermia física y en la deshidratación de papas fritas, papel, telas, etcétera.

Un circuito de microondas consta de componentes como fuentes, líneas de transmisión, guías de ondas, atenuadores, resonadores, circuladores y filtros. Una manera de analizar tal circuito consiste en relacionar las variables de entrada y salida de cada componente. Aunque para relacionar esas variables pueden usarse diversos conjuntos de parámetros, en el análisis de circuitos de microondas suelen emplearse los parámetros S, dada la imprecisión a altas frecuencias del voltaje y la corriente. Los *parámetros de dispersión* o *parámetros* S se definen en términos de variables de ondas, de más fácil medición a frecuencias de microondas que el voltaje y la corriente.

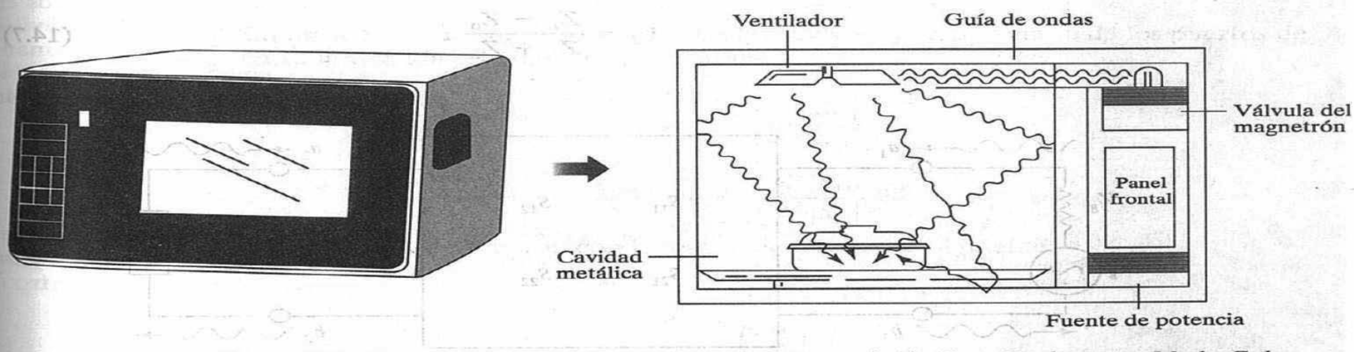


Figura 14.2. Horno de microondas. *Fuente*: N. Schlager (ed.), *How Products are Made*, Gale Research Inc., Detroit, MI, 1994, p. 289.

Considérese la red de dos puertos que se presenta en la figura 14.3. Las ondas móviles se relacionan con los parámetros de dispersión de acuerdo con

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \tag{14.1}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{14.2}$$

donde a_1 y a_2 representan las ondas incidentes en los puertos 1 y 2, respectivamente, mientras que b_1 y b_2 representan las ondas reflejadas, como se indica en la figura 14.3. En cuanto a la matriz S, los términos no diagonales representan coeficientes de transmisión de ondas de voltaje, en tanto que los términos diagonales representan coeficientes de reflexión. Si la red es *recíproca*, tendrá las mismas características de transmisión en cualquier dirección; es decir,

$$S_{12} = S_{21} \tag{14.3}$$

Si la red es *simétrica*, entonces

$$S_{11} = S_{22} \tag{14.4}$$

En el caso de dos puertos acoplados, los coeficientes de reflexión son iguales a cero y

$$S_{11} = S_{22} = 0 \tag{14.5}$$

El coeficiente de reflexión de entrada puede expresarse en términos de los parámetros S y la carga Z_L como

$$\Gamma_i = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \tag{14.6}$$

donde

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \tag{14.7}$$

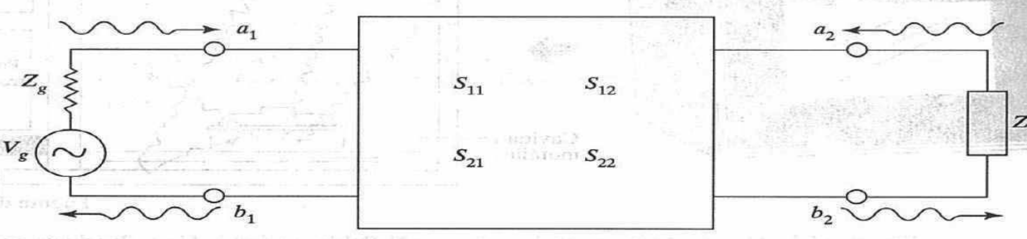


Figura 14.3. Red de dos puertos.

De igual manera, el coeficiente de reflexión de salida (con $V_g = 0$) puede expresarse en términos de la impedancia del generador Z_g y los parámetros S como

$$\Gamma_o = \frac{b_2}{a_2}\bigg|_{V_g=0} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_g}{1 - S_{11}\Gamma_g} \tag{14.8}$$

donde

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} \tag{14.9}$$

Ejemplo 14.1

Los siguientes parámetros S corresponden a un transistor de microondas que opera a 2.5 GHz: $S_{11} = 0.85\angle{-30°}$, $S_{12} = 0.07\angle{56°}$, $S_{21} = 1.68\angle{120°}$, $S_{11} = 0.85\angle{-40°}$. Determine el coeficiente de reflexión de entrada cuando $Z_L = Z_o = 75\ \Omega$.

Solución:

A partir de la ecuación (14.7),

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = 0$$

Por tanto, la aplicación de la ecuación (14.6) resulta en

$$\Gamma_i = S_{11} = 0.85\angle{-30°}$$

Ejercicio 14.1

En un acoplador híbrido, la razón de onda de voltaje estacionaria de los puertos de entrada y salida está dada respectivamente por

$$s_i = \frac{1 + |S_{11}|}{1 - |S_{11}|}$$

$$s_o = \frac{1 + |S_{11}|}{1 - |S_{11}|}$$

Calcule s_i y s_o de acuerdo con la matriz de dispersión siguiente:

$$S = \begin{bmatrix} 0.4 & j0.6 \\ j0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Respuesta: 2.333, 1.5.

14.3. Interferencia y compatibilidad electromagnéticas

Todo dispositivo electrónico es fuente de campos electromagnéticos radiados, llamados *emisiones radiadas*. Estas emisiones suelen ser un subproducto accidental del diseño del dispositivo.

La **interferencia electromagnética** (IE) es la degradación del rendimiento de un dispositivo a causa de los campos que integran el ambiente electromagnético.

El ambiente electromagnético es resultado de mecanismos como estaciones transmisoras de radio y televisión, radares e instrumentos de navegación, los cuales emiten energía electromagnética al operar. Cualquier dispositivo electrónico es susceptible a la IE, cuya influencia se percibe en todas partes. Entre sus efectos están los "fantasmas" en la recepción de imágenes de televisión, la interferencia de sistemas de radio de taxis con radio policiales y de transitorios de líneas de energía con computadoras personales y la autooscilación de un circuito de radio receptor o transmisor.

La **compatibilidad electromagnética** (CE) se logra cuando un dispositivo funciona satisfactoriamente, sin introducir perturbaciones intolerables en el ambiente electromagnético ni en otros dispositivos a su alrededor.

La CE[2] se consigue cuando dispositivos electrónicos coexisten en armonía y cada uno funciona de acuerdo con el propósito para el que se le fabricó, en presencia (o a pesar), de los demás. La IE es el problema —aparición de voltajes o corrientes indeseables que influyen en el rendimiento de un aparato— y la CE la solución. El objetivo de ésta es garantizar la afinidad de sistemas o subsistemas, lo que se obtiene con la aplicación de técnicas de diseño probadas.

La CE es un área en expansión a causa de la creciente densidad de circuitos electrónicos en los modernos sistemas de computación, comunicación, control, etc. Pero además de interesar a ingenieros eléctricos y en computación, también incumbe a los ingenieros en mécanica automotriz. La progresiva aplicación de sistemas electrónicos en automóviles para elevar la eficiencia en el uso de combustible, reducir la emisión de contaminantes, garantizar la seguridad y brindar asistencia al conductor ha vuelto urgente la compatibilidad en la operación normal. A continuación se expondrán las fuentes y características de la IE, para después examinar las técnicas con las que se le controla.

A. Fuentes y características de la IE

Clasifiquemos primeramente las causas de la IE, lo que facilitará la determinación de medios de control. Como ya se mencionó, cualquier dispositivo electrónico puede ser fuente de IE, aunque tal no sea la intención del diseñador. La IE puede ser causada dentro o

[2] Para un estudio completo de las microondas, véase D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 2a. ed., John Wiley, Nueva York, 1998.

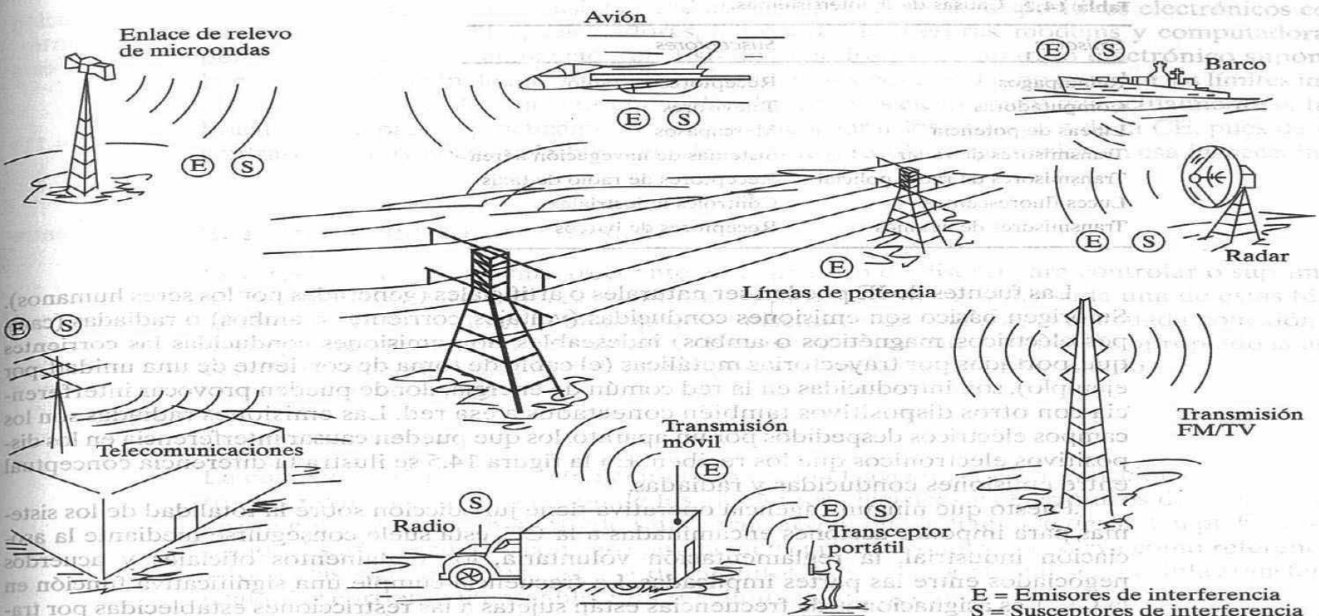


Figura 14.4. Casos comunes de problemas intersistemas de IE. *Fuente*: J.I.N. Violette *et al.*, *Electromagnetic Compatibility Handbook*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987, p. 4.

fuera de un sistema, y representar por tanto un *problema intrasistema* o *intersistemas*. En la figura 14.4 se ilustran problemas intersistemas de IE. Por lo común se llama *emisor* a la fuente y *susceptor* al dispositivo afectado. En las tablas 14.1 y 14.2 se refieren a su vez causas habituales de problemas intra e intersistemas. Unos y otros pueden controlarse generalmente si el ingeniero creador del sistema sigue ciertas pautas y técnicas de diseño. En el caso de problemas intrasistema, por ejemplo, es posible aplicar medidas de conexión a tierra e interconexión, blindaje de circuitos y dispositivos y filtración.

Tabla 14.1. Causas de IE intrasistema.

Emisores	*Susceptores*
Fuentes de potencia	Relevadores
Transmisores de radar	Receptores de radar
Transmisores móviles de radio	Receptores móviles de radio
Luces fluorescentes	Pertrechos
Sistemas de encendido de autos	Receptores de radio de autos

Tabla 14.2. Causas de IE intersistemas.

Emisores	*Susceptores*
Relámpagos	Receptores de radio
Computadoras	Televisores
Líneas de potencia	Marcapasos
Transmisores de radar	Sistemas de navegación aérea
Transmisores de radio policial	Receptores de radio de taxis
Luces fluorescentes	Controles industriales
Transmisores de aviones	Receptores de barcos

Las fuentes de IE pueden ser naturales o artificiales (generadas por los seres humanos). Su origen básico son emisiones conducidas (voltajes, corrientes o ambos) o radiadas (campos eléctricos, magnéticos o ambos) indeseables. Son emisiones conducidas las corrientes que, portadas por trayectorias metálicas (el cable de toma de corriente de una unidad, por ejemplo), son introducidas en la red común de energía, donde pueden provocar interferencia con otros dispositivos también conectados a esa red. Las emisiones radiadas son los campos eléctricos despedidos por un aparato, los que pueden causar interferencia en los dispositivos electrónicos que los reciben. En la figura 14.5 se ilustra la diferencia conceptual entre emisiones conducidas y radiadas.

Puesto que ninguna agencia operativa tiene jurisdicción sobre la totalidad de los sistemas para imponer acciones encaminadas a la CE, ésta suele conseguirse mediante la asociación industrial, la reglamentación voluntaria, los reglamentos oficiales y acuerdos negociados entre las partes implicadas. La frecuencia cumple una significativa función en la CE. Las asignaciones de frecuencias están sujetas a las restricciones establecidas por tratados internacionales. Las reglamentaciones de radio derivadas de tales tratados son publicadas por la Unión Internacional de Telecomunicaciones (UIT). En Estados Unidos de América, la Federal Communications Commission (FCC; Comisión Federal de Telecomunicaciones) es la autoridad que rige sobre las comunicaciones por radio y cable. Este órga-

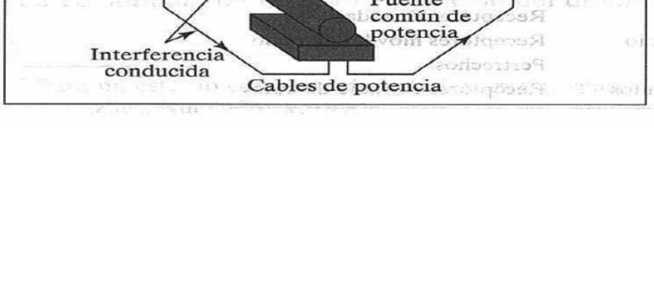


Figura 14.5. Diferencias entre emisiones conducidas y radiadas.

no ha fijado límites a las emisiones radiadas y conducidas de dispositivos electrónicos como máquinas de escribir, calculadoras, televisores, impresoras, módems y computadoras personales. La comercialización en Estados Unidos de un aparato electrónico supone la previa verificación de que sus emisiones radiadas y conducidas no excedan los límites impuestos por la FCC. Así, en el diseño de los dispositivos electrónicos que actualmente se fabrican en ese país es prácticamente forzoso incorporar los principios de la CE, pues de lo contrario es muy poco probable que tales aparatos resulten aprobados en esa inspección.

B. Técnicas de control de la IE

Los tres medios de uso más frecuente en el proceso de diseño para controlar o suprimir la IE son la conexión a tierra, el blindaje y la filtración. Aunque cada una de estas técnicas interviene de distinta manera en el diseño de un sistema, la adecuada conexión a tierra puede minimizar la necesidad de blindaje y filtración, y el blindaje apropiado la necesidad de filtración. Las abordaremos por ese motivo en el orden citado.

CONEXIÓN A TIERRA

La conexión a tierra es el establecimiento de una trayectoria de conducción eléctrica entre dos puntos para la conexión de los elementos eléctricos y electrónicos de un sistema, ya sea entre sí o con un punto de referencia, al que puede llamarse *tierra*. Un plano a tierra ideal sería un cuerpo con cero potencial y cero impedancia que sirva como referencia a todas las señales de un sistema de circuitos asociados y al cual sea posible transferir cualquier corriente indeseable a fin de eliminar sus efectos.

El propósito de la tierra flotante es el aislamiento eléctrico de circuitos o equipo respecto de un plano a tierra común. Sin embargo, esta técnica de conexión a tierra puede entrañar riesgos. La conexión a tierra en un solo punto minimiza los efectos de corrientes a tierra en grandes instalaciones, mientras que la de múltiples puntos minimiza la longitud de los conductores a tierra. El plano a tierra podría ser un alambre a todo lo largo del sistema o un cuerpo conductor de tamaño considerable.

La interconexión es el establecimiento de una trayectoria de baja impedancia entre dos superficies metálicas. La conexión a tierra es un concepto de circuitos, y la interconexión su aplicación física. El propósito de ésta es volver homogénea una estructura en lo que se refiere al flujo de corrientes eléctricas, para evitar el desarrollo de potenciales entre las partes metálicas, los que pueden resultar en IE. La interconexión brinda protección contra choques eléctricos, trayectorias de retorno de corriente en circuitos eléctricos y conexiones con planos a tierra para antenas y minimiza de igual forma la diferencia de potencial entre dispositivos. Permite la conducción de grandes montos de corriente de fuga.

Hay dos tipos de interconexión: directa e indirecta. La interconexión directa supone el contacto de metal con metal entre los elementos conectados, mientras que la indirecta lo efectúa mediante puentes conductores.

La resistencia en corriente directa R_{cd} de una interconexión suele indicar la calidad de ésta. Tal resistencia está dada por

$$R_{cd} = \frac{\ell}{\sigma S} \tag{14.10}$$

donde ℓ es la longitud de la interconexión, σ su conductividad y S el área de su sección transversal. Al incrementarse la frecuencia aumenta también la resistencia de la interconexión, a causa del efecto pelicular. Así, la resistencia en corriente alterna R_{ca} está dada por

$$R_{ca} = \frac{\ell}{\sigma \delta w} \tag{14.11}$$

donde w es la anchura de la interconexión y δ la profundidad pelicular.

La *efectividad de interconexión* puede expresarse como la diferencia (en dB) entre los voltajes inducidos en un equipo con interconexión y sin ella.

BLINDAJE

El propósito del blindaje es confinar la energía radiada a una región específica o impedir que entre en una región específica. Los blindajes pueden adoptar la forma de casillas y compartimientos o de cables y conectores.

El blindaje puede ser sólido, no sólido (pantallas, por ejemplo) y trenzado, como se estila en cables. En todos los casos se caracteriza por su *efectividad de blindaje* (*EB*), la cual se define como

$$EB = 10 \log_{10} \frac{\text{densidad de potencia incidente}}{\text{densidad de potencia transmitida}} \tag{14.12}$$

donde la densidad de potencia incidente es la densidad de potencia en un punto de medición antes de la instalación de un blindaje y la densidad de potencia transmitida la registrada en el mismo punto después de la instalación. En términos de intensidad de campo, la efectividad de blindaje también puede definirse como la razón del campo transmitido E_t impregnado al campo incidente E_i. Así, EB está dada por

$$EB = 20 \log_{10} \frac{E_i}{E_t} \tag{14.13}$$

En el caso de campos magnéticos,

$$EB = 20 \log_{10} \frac{H_i}{H_t} \tag{14.14}$$

Por ejemplo, una lámina de aluminio (material con $\sigma = 3.5 \times 10^7$ S/m, $\varepsilon = \varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$) de 0.01 mm de grosor tiene a 100 MHz una EB de 100 dB. Así, un gabinete de aluminio para computadora, de mucho mayor grosor, se considera un blindaje muy eficaz, que protege los circuitos internos contra campos externos tanto como impide la radiación de tales circuitos al exterior. En estas condiciones, la emisión radiada de un sistema de computación es producida por aberturas en el gabinete como grietas, orificios de unidades de disco, etc., y por cables externos como los de toma de corriente y los de los dispositivos.

FILTRACIÓN

Un filtro eléctrico es una red de resistores, inductores y condensadores constantes, agrupados o distribuidos, con escasa oposición a ciertas frecuencias al tiempo que bloquean el paso de otras, lo que reduce sustancialmente la interferencia conducida.

La característica peculiar de un filtro es la *pérdida de inserción* (*PI*) como función de la frecuencia. La PI se define como

$$PI = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2} \tag{14.15}$$

donde V_1 es el voltaje de salida de una fuente de señales con filtro en el circuito y V_2 el voltaje de salida de la fuente de señales sin el filtro. Los filtros de paso angosto son de uso común para efectos de CE. Su pérdida de inserción está dada por

$$PI = 10 \log_{10} (1 + F^2) \text{ dB} \tag{14.16}$$

donde

$$F = \begin{cases} \pi f RC, & \text{para filtro capacitivo} \\ \pi f L/R, & \text{para filtro inductivo} \end{cases} \tag{14.17}$$

y f es la frecuencia.

14.4. Fibra óptica

A mediados de la década de 1970 se admitió que la tecnología de cobre sería inadecuada para las futuras redes de comunicación. En vista de ello, la industria de las telecomunicaciones invirtió intensivamente en la investigación que derivó en la fibra óptica, atractiva opción a líneas de transmisión alámbricas como las de cables de par trenzado y coaxial. La fibra óptica[3] tiene las siguientes ventajas sobre el cobre:

- *Ancho de banda*. Posee muy alta capacidad para portar información. Permite la transmisión de bits en serie, lo que reduce considerablemente el tamaño, costo y complejidad de los equipos.
- *Atenuación*. Ésta es tan escasa que la fibra óptica puede cubrir largas distancias sin necesidad de repetidores.
- *Susceptibilidad a perturbaciones*. Ni emite ni es vulnerable a la interferencia electromagnética. Su inmunidad a ésta se debe a que carece de partes metálicas, lo que la exime de corrientes de conducción.

[3] Existen excelentes libros sobre la fibra óptica. Véase, por ejemplo, S. L. W. Meardon, *The Elements of Fiber Optics*, Regents/Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

- *Seguridad*. Dificulta la intercepción dolosa, porque al realizar derivaciones se interrumpe casi infaltablemente la comunicación.
- *Costo*. Su costo se ha reducido drásticamente en los últimos años, y seguirá descendiendo. Lo mismo ha ocurrido con el de componentes asociados como transmisores y receptores ópticos.

Estas impresionantes ventajas sobre medios eléctricos explican la reciente aceptación de la fibra óptica como medio de transmisión. En sistemas de comunicación, instrumentación, redes de televisión por cable, automatización industrial y sistemas de transmisión de datos se ha transitado velozmente del cable coaxial y de par trenzado a la fibra óptica, pese a ser más costosa que aquéllos y servir principalmente para enlaces de punto a punto.

Una **fibra óptica** es una guía de ondas dieléctrica que opera a frecuencias ópticas.

Las frecuencias ópticas son del orden de los 100 THz. Como se muestra en la figura 14.6, una fibra óptica consta de tres secciones cilíndricas concéntricas: núcleo, revestimiento y forro. El núcleo se compone de uno o más hilos delgados de vidrio o plástico. El revestimiento es la capa de cristal o plástico que rodea al núcleo, el cual puede ser de índice escalonado o gradual. En el primer caso, el índice de refracción del núcleo es uniforme pero sufre un cambio abrupto en la interfaz núcleo-revestimiento, mientras que en el segundo varía con la distancia radial desde el centro de la fibra. El forro ciñe una fibra recubierta o un haz de ellas. Es de plástico u otros materiales y protege contra humedad, doblez, etcétera.

Al introducirse en el núcleo, un rayo de luz se reflejará internamente al incidir en un medio más denso y si el ángulo de incidencia es mayor de cierto valor crítico. Será reflejado así hacia el medio original y el proceso se repetirá en el recorrido de la luz por el núcleo. Este tipo de propagación es multimodal, con referencia a la variedad de ángulos de reflexión, como se ilustra en la figura 14.7. Esto provoca que la señal se disemine desacompasadamente y limita el índice de recepción precisa de los datos. La reducción

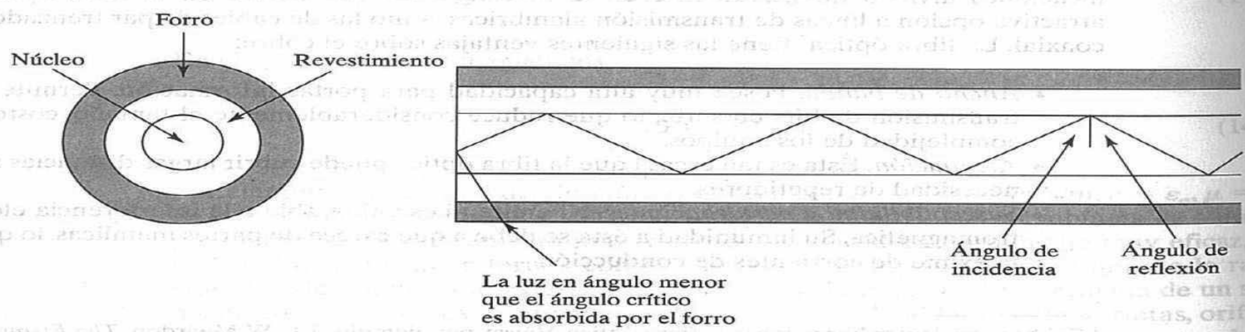


Figura 14.6. Fibra óptica.

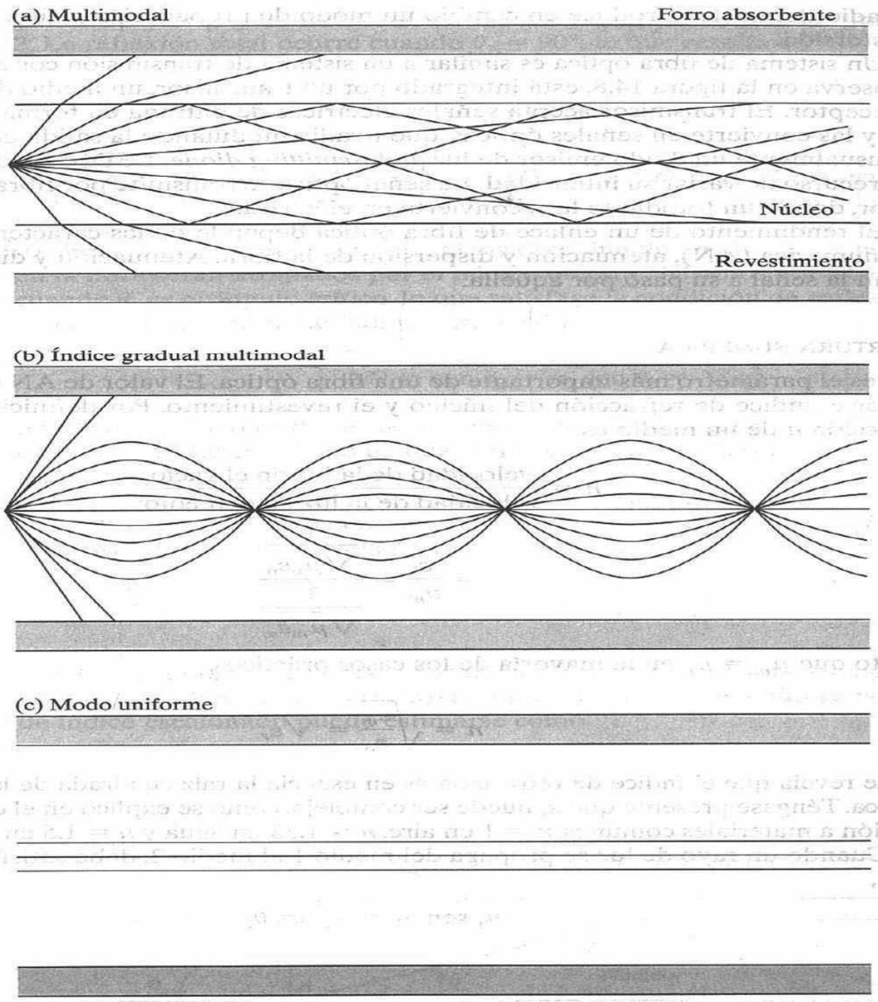


Figura 14.7. Modos de transmisión por fibra óptica. *Fuente*: W. Stallings, *Local and Metropolitan Area Networks*, 4a. ed., Macmillan, Nueva York, 1993, p. 85.

del radio del núcleo produce en cambio un modo de propagación uniforme que elimina la distorsión.

Un sistema de fibra óptica es similar a un sistema de transmisión convencional. Como se observa en la figura 14.8, está integrado por un transmisor, un medio de transmisión y un receptor. El transmisor acepta señales eléctricas de entrada en forma analógica o digital y las convierte en señales ópticas, que irradia modulando la salida de una fuente de luz (usualmente un diodo emisor de luz [*light-emitting diode*, LED] o rayo láser) mediante el recurso de variar su intensidad. La señal óptica se transmite por fibra óptica a un receptor, donde un fotodiodo la reconvierte en eléctrica.

El rendimiento de un enlace de fibra óptica depende de las características de abertura numérica (AN), atenuación y dispersión de la fibra. Atenuación y dispersión distorsionan la señal a su paso por aquélla.

ABERTURA NUMÉRICA

Éste es el parámetro más importante de una fibra óptica. El valor de AN está determinado por el índice de refracción del núcleo y el revestimiento. Por definición, el índice de refracción n de un medio es

$$n = \frac{\text{velocidad de la luz en el vacío}}{\text{velocidad de la luz en el medio}} = \frac{c}{u_m} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\mu_m \varepsilon_m}}} \tag{14.18}$$

Puesto que $\mu_m = \mu_o$ en la mayoría de los casos prácticos,

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_o}} = \sqrt{\varepsilon_r} \tag{14.19}$$

lo que revela que el índice de refracción es en esencia la raíz cuadrada de la constante dieléctrica. Téngase presente que ε_r puede ser compleja, como se explicó en el capítulo 10. Con relación a materiales comunes, $n = 1$ en aire, $n = 1.33$ en agua y $n = 1.5$ en vidrio.

Cuando un rayo de luz se propaga del medio 1 al medio 2, debe satisfacerse la ley de Snell,

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \tag{14.20}$$

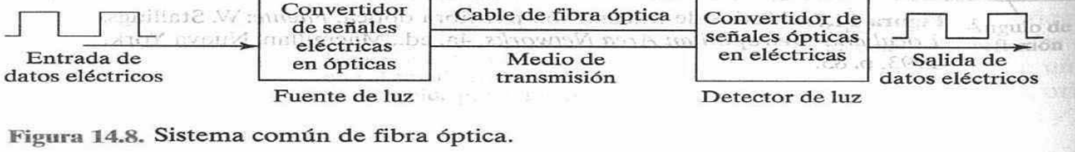


Figura 14.8. Sistema común de fibra óptica.

donde θ_1 es el ángulo incidente en el medio 1 y θ_2 el ángulo de transmisión en el medio 2. La reflexión total ocurre cuando $\theta_2 = 90°$, lo que resulta en

$$\theta_1 = \theta_c = \text{sen}^{-1} \frac{n_2}{n_1} \tag{14.21}$$

donde θ_c es el *ángulo crítico* para la reflexión interna total. La ecuación (14.21) sólo es válida si $n_1 > n_2$, ya que el valor de sen θ_c debe ser menor que o igual a 1.

Otra manera de analizar la capacidad de conducción de luz de una fibra consiste en medir el *ángulo de aceptancia* θ_a, el máximo ángulo en el cual los rayos de luz que entran en la fibra serán atrapados por el núcleo de ésta. Sabemos que el ángulo máximo ocurre cuando θ_c es el ángulo crítico, lo que satisface la condición de reflexión interna total. Así, respecto de una fibra de índice escalonado,

$$\boxed{\text{AN} = \text{sen}\,\theta_a = n_1 \,\text{sen}\,\theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \tag{14.22}$$

donde n_1 es el índice de refracción del núcleo y n_2 el del revestimiento, como se muestra en la figura 14.9. En virtud de que el núcleo suele ser de sílice, $n_1 = 1.48$. Los valores más frecuentes de AN fluctúan de 0.19 a 0.25. Cuanto mayor sea este valor, mayor será la energía óptica que la fibra puede tomar de la fuente.

Cuando una fibra puede tolerar numerosos modos se llama *fibra multimodal de índice escalonado*. El volumen de modos V está dado por

$$V = \frac{\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{14.23}$$

donde d es el diámetro del núcleo de la fibra y λ la longitud de onda de la fuente óptica. Con base en la ecuación (14.23), el número N de modos que se propagan por una fibra de índice escalonado puede estimarse como

$$N = \frac{V^2}{2} \tag{14.24}$$

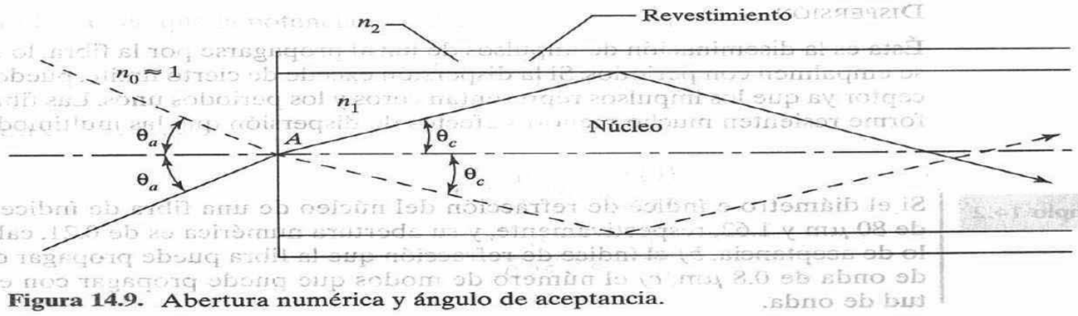


Figura 14.9. Abertura numérica y ángulo de aceptancia.

ATENUACIÓN

Como se explicó en el capítulo 10, la atenuación es la reducción de potencia de la señal, óptica en este caso. La atenuación de la potencia en una fibra óptica (o pérdida de la fibra) está regida por

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha P \tag{14.25}$$

donde α es la atenuación y P la potencia óptica. En la ecuación (14.25) se ha supuesto que la onda se propaga a lo largo de z. Al resolver la ecuación (14.25), la potencia $P(0)$ en la entrada de la fibra y la potencia $P(\ell)$ de la luz después de ℓ se relacionan de acuerdo con

$$P(\ell) = P(0)e^{-\alpha\ell} \tag{14.26}$$

La atenuación α se expresa habitualmente en dB/km y la longitud ℓ de la fibra en km. En este caso, la ecuación (14.26) se convierte en

$$\boxed{\alpha\ell = 10 \log_{10} \frac{P(0)}{P(\ell)}} \tag{14.27}$$

Así, la potencia de la luz se reduce α decibeles por kilómetro al propagarse por la fibra. La ecuación (14.27) puede expresarse como

$$P(\ell) = P(0) \cdot 10^{-\alpha\ell/10} \tag{14.28}$$

Cuando $\ell = 100$ km,

$$\frac{P(0)}{P(\ell)} \sim \begin{cases} 10^{-100} & \text{para cable coaxial} \\ 10^{-2} & \text{para fibra} \end{cases} \tag{14.29}$$

lo que indica que la pérdida de potencia en el cable coaxial es mucho mayor que la que ocurre en la fibra.

DISPERSIÓN

Ésta es la diseminación de impulsos de luz al propagarse por la fibra, lo que provoca que se empalmen con periodos. Si la dispersión excede de cierto límite, puede confundir al receptor ya que los impulsos representan ceros y los periodos unos. Las fibras de modo uniforme resienten mucho menores efectos de dispersión que las multimodales.

Ejemplo 14.2

Si el diámetro e índice de refracción del núcleo de una fibra de índice escalonado son de 80 μm y 1.62, respectivamente, y su abertura numérica es de 0.21, calcule: *a)* el ángulo de aceptancia, *b)* el índice de refracción que la fibra puede propagar con una longitud de onda de 0.8 μm, *c)* el número de modos que puede propagar con esa misma longitud de onda.

Solución:

a) Puesto que sen θ_a = AN = 0.21, entonces

$$\theta_a = \text{sen}^{-1} 0.21 = 12.12°$$

b) De AN = $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, se obtiene

$$n_2 = \sqrt{n_1^2 - \text{AN}^2} = \sqrt{1.62^2 - 0.21^2} = 1.606$$

c)

$$V = \frac{\pi d}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{\pi d \ \text{AN}}{\lambda}$$

$$= \frac{\pi(80 \times 10^{-6}) \times 0.21}{0.8 \times 10^{-6}} = 65.973$$

Por tanto,

$$N = \frac{V^2}{2} = 2176 \text{ modos}$$

Ejercicio 14.2

El índice de refracción de una fibra de sílice es de 1.48 y el del revestimiento de 1.465. Halle: *a)* el ángulo crítico por encima del cual ocurre reflexión interna total, *b)* la abertura numérica de la fibra.

Respuestas: *a)* 81.83° y *b)* 0.21.

Ejemplo 14.3

Impulsos de luz se propagan por un cable de fibra con atenuación de 0.25 dB/km. Determine la distancia a través de la cual la potencia de los impulsos se reduce 40%.

Solución:

El hecho de que la potencia se reduzca 40% significa que

$$\frac{P(\ell)}{P(0)} = 1 - 0.4 = 0.6$$

En consecuencia,

$$\ell = \frac{10}{\alpha}\log_{10}\frac{P(0)}{P(\ell)}$$

$$= \frac{10}{0.25}\log_{10}\frac{1}{0.6}$$

$$= 8.874 \text{ km}$$

Ejercicio 14.3

Una fibra de 10 km con atenuación de 0.2 dB/km sirve como enlace óptico entre dos ciudades. ¿Qué proporción de la potencia de entrada se recibe en una de ellas?

Respuesta: 63.1%.

Resumen

1. Las microondas son ondas electromagnéticas de muy corta longitud de onda. Se propagan a lo largo de una línea recta, a la manera de los rayos luminosos y, por tanto, pueden ser fácilmente concentradas por antenas en una dirección. Se usan en radares, conducción, navegación y calefacción.
2. La compatibilidad electromagnética (CE) es la capacidad de dispositivos eléctricos y electrónicos para operar en su medio electromagnético sin sufrir ni causar degradaciones inaceptables como resultado de IE.
3. La interferencia electromagnética (IE) es la falta de CE. Puede suprimirse mediante conexión a tierra, blindaje y filtración.
4. Una fibra óptica es una estructura dieléctrica de guía de ondas que opera a frecuencias ópticas y consta de una región nuclear y una región de revestimiento.
5. Las ventajas de la fibra óptica sobre el alambre de cobre son: 1. gran ancho de banda, 2. baja atenuación, 3. inmunidad a IE, 4. seguridad y 5. bajo costo.

Preguntas de repaso

14.1. Las microondas poseen larga longitud de onda.

a) Cierto.
b) Falso.

14.2. La longitud de onda en el vacío de una señal de microondas a 3 GHz de frecuencia es de

a) 1 mm
b) 10 mm
c) 10 cm
d) 1 m

14.3. ¿Cuál de las siguientes no es fuente de IE?

a) Fibra óptica.
b) Computadora personal.
c) Radar policial.
d) Avión.
e) Lámpara fluorescente.

14.4. **La fibra óptica es**

a) Una línea de transmisión.

b) Una guía de ondas.

c) Ambas cosas.

14.5. **A diferencia del cable coaxial y de par trenzado, la fibra óptica es inmune a**

a) Transmisión a alta frecuencia.

b) Atenuación de señal.

c) Pérdida de potencia.

d) Interferencia electromagnética.

14.6. **Usted es consultor y se le ha solicitado diseñar la red de un auditorio. Sin problemas de velocidad ni costo, el único reparo es la interferencia de una estación de radio cercana. ¿Cuál de los medios siguientes sería el más apropiado para implementar la red?**

a) Microondas.

b) Cable coaxial.

c) Fibra óptica.

d) Radio.

14.7. **Las aplicaciones de fibra óptica incluyen**

a) Cable submarino.

b) Telecomunicación de larga distancia.

c) Transmisión de datos a alta velocidad.

d) Instrumentación médica.

e) Todas las anteriores.

14.8. **Los rayos de luz están confinados dentro de una fibra óptica simple por medio de**

a) Reflexión interna total en la cara externa del revestimiento.

b) Reflexión interna total en la interfaz núcleo-revestimiento.

c) Reflexión en el forro de la fibra.

d) Refracción.

e) Defracción.

14.9. **Si el índice de refracción del núcleo de una fibra óptica es de 1.45 y el de su revestimiento de 1.42, la abertura numérica de la fibra es de**

a) 0.12

b) 0.18

c) 0.29

d) 0.38

14.10. Un cable de fibra óptica de 20 km de largo tiene una potencia de salida de 0.02 mW. Si la pérdida de la fibra es de 0.48 dB/km, ¿cuál es su potencia de entrada?

a) 52 μW
b) 19 μW
c) 7 μW
d) 2 μW

Respuestas: 14.1*b*, 14.2*c*, 14.3*a*, 14.4*b*, 14.5*d*, 14.6*c*, 14.7*e*, 14.8*b*, 14.9*c*, 14.10*a*.

Problemas

14.1. Explique brevemente algunas aplicaciones de microondas diferentes de las referidas en el texto.

14.2. Un útil conjunto de parámetros, conocidos como *parámetros de transferencia de dispersión*, se relacionan con las ondas incidente y reflejada de acuerdo con

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

a) Exprese los parámetros T en términos de los parámetros S.
b) Halle T cuando

$$S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

14.3. Los parámetros S de una red de dos puertos son:

$$S_{11} = 0.33 - j0.16, S_{12} = S_{21} = 0.56, S_{22} = 0.44 - j0.62$$

Halle los coeficiente de reflexión de entrada y salida cuando $Z_L = Z_o = 50\ \Omega$ y $Z_g = 2Z_o$.

14.4. ¿Por qué componentes regulares agrupados de circuitos como resistores, inductores y condensadores no pueden ser utilizados a frecuencias de microondas?

14.5. En el vacío, una señal de microondas tiene una frecuencia de 8.4 GHz. Calcule la longitud de onda de la señal.

14.6. Una descarga electrostática (DE) puede modelarse como una capacitancia de 125 pF cargada a 1500 V y que descarga a través de un resistor de 2 km. Obtenga la forma de onda de la corriente.

***14.7.** La pérdida de inserción de un circuito con filtro puede calcularse en términos de sus parámetros A, B, C y D al terminar en Z_g y Z_L, como se muestra en la figura 14.10. Demuestre que

$$PI = 20 \log_{10} \left| \frac{AZ_L + B + CZ_gZ_L + DZ_g}{Z_g + Z_L} \right|$$

14.8. Si el alto y ancho de la sección transversal rectangular de una varilla de plata son de 0.8 y 1.2 cm, respectivamente, halle:

a) La resistencia en corriente directa por 1 km del conductor.
b) La resistencia en corriente alterna por 1 km del conductor a 6 MHz.

14.9. La velocidad de la luz en un medio dado se mide como 2.1×10^8 m/s. Halle el índice de refracción.

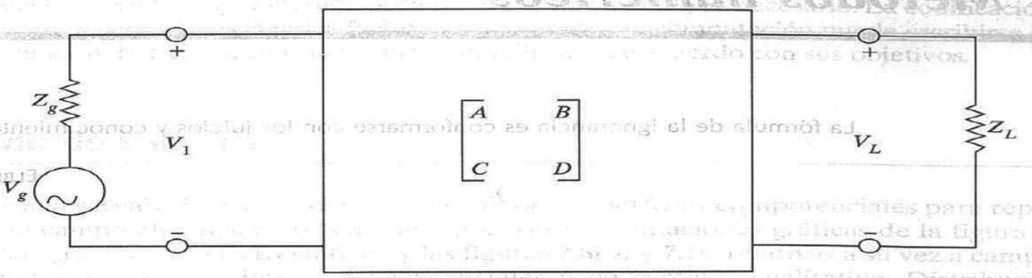


Figura 14.10. Para el problema 14.7.

14.10. ¿Qué utilidad ofrece la fibra óptica en el aislamiento contra la IE?

14.11. El núcleo de una fibra de vidrio tiene un diámetro de 50 μm y un índice de refracción de 1.62, mientras que el índice de refracción del revestimiento es de 1.604. Si en esa fibra se emplea luz con una longitud de onda de 1300 mn, halle:

a) La abertura numérica.

b) El ángulo de aceptación.

c) El número de modos de transmisión.

14.12. Una fibra óptica con radio de 2.5 μm e índice de refracción de 1.45 tiene aire como revestimiento. Si es iluminada por un rayo de 1.3 μm de luz, determine:

a) V

b) AN

c) Una estimación de cuántos modos puede propagar.

14.13. Una fibra óptica con atenuación de 0.4 dB/km tiene 5 km de largo, $n_1 = 1.53$, $n_2 = 1.45$ y diámetro de 50 μm. Halle:

a) El ángulo máximo en el cual rayos de luz entrarán en la fibra y serán atrapados.

b) El porcentaje de la potencia de entrada recibida.

14.14. Un diodo de rayo láser es capaz de acoplar 10 mW en una fibra con atenuación de 0.5 dB/km. Si la fibra es de 850 m de largo, calcule la potencia recibida en su extremo final.

14.15. La atenuación α_{10} del capítulo 10 está expresada en Np/m, mientras que la atenuación α_{14} de este capítulo lo está en dB/km. ¿Cuál es la relación entra ambas?

14.16. Un sistema de ondas luminosas se sirve de un enlace de fibra de 30 km con una pérdida de 0.4 dB/km. Si el sistema precisa de al menos 0.2 mW en el receptor, calcule la potencia mínima que debe ser transmitida por la fibra.

14.17. *a)* Explique las ventajas derivadas del uso de cable de fibra óptica.

b) ¿Qué es la dispersión de impulsos?

15 Métodos numéricos

La fórmula de la ignorancia es conformarse con los juicios y conocimientos propios.

ELBERT HUBBARD

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores se estudiaron varias técnicas para resolver problemas de electromagnetismo y obtener soluciones en forma cerrada. Una *solución en forma cerrada* es aquella que adopta la forma de una ecuación algebraica explícita, en la cual es posible sustituir los valores de los parámetros del problema. Algunas de esas soluciones analíticas se obtuvieron suponiendo situaciones ideales. Al deducir la fórmula para calcular la capacitancia de un capacitor (o condensador) de placas paralelas, por ejemplo, dimos por supuesto que el efecto de borde era insignificante y que la distancia de separación entre las placas era muy reducida en comparación con el ancho y largo de éstas. De igual manera, nuestra aplicación de la ecuación de Laplace en el capítulo 6 se restringió a problemas con límites coincidentes con superficies coordenadas. Las soluciones analíticas tienen la ventaja inherente de ser exactas. Asimismo, es fácil observar su comportamiento cuando los parámetros de los problemas varían. No obstante, sólo los problemas de configuración simple toleran soluciones analíticas.

Cuando la complejidad de las fórmulas teóricas vuelve casi imposible la solución analítica, se recurre a métodos no analíticos: 1. métodos gráficos, 2. experimentales, 3. analógicos y 4. numéricos. Los tres primeros grupos se utilizan en pocos problemas. En cambio, los métodos numéricos han cobrado importancia y atractivo con la aparición de las veloces computadoras digitales. Las tres técnicas numéricas simples de empleo más común en electromagnetismo son: 1. el método de momentos, 2. el método de las diferencias finitas y 3. el método del elemento finito. La mayor parte de los problemas electromagnéticos implican ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones integrales. Por lo general, las ecuaciones diferenciales parciales se resuelven con el método de las diferencias finitas o del elemento finito, mientras que las ecuaciones integrales se resuelven con el método de momentos. Aunque los métodos numéricos ofrecen soluciones aproximadas, éstas son suficientemente precisas para los fines de la ingeniería. No se debe tener la impresión de que las técnicas analíticas son obsoletas a causa de los métodos numéricos; más bien se complementan. Como se observará más adelante, todos los métodos numéricos suponen una simplificación analítica que facilita su aplicación.

El código de Matlab elaborado para implementar en computadora los conceptos tratados en este capítulo ha sido simplificado y se explica por sí solo. Su notación coincide con la

del texto en la mayor medida posible, y se define cuando es necesario. La codificación que se propone aquí no es la única factible; un programa de computación puede escribirse de varias maneras. Por tanto, el usuario puede modificarla de acuerdo con sus objetivos.

†15.2. Trazado de campos

En la sección 4.9 usamos líneas de campos y superficies equipotenciales para representar un campo electrostático. Sin embargo, las representaciones gráficas de la figura 4.21, relativa a campos electrostáticos, y las figuras 7.8*(b)* y 7.16, relativas a su vez a campos magnetostáticos, son simples e insustanciales y de carácter cualitativo. Distribuciones de carga más complicadas hacen necesarias ilustraciones más precisas. En esta sección se presentará una técnica numérica que puede convertirse en un programa de computación interactivo. Esta técnica genera puntos de datos para líneas de campos eléctricos y líneas equipotenciales para configuraciones arbitrarias de fuentes de puntos.

Líneas de campos eléctricos y líneas equipotenciales referentes a fuentes de puntos coplanares pueden trazarse con programas simples. En el caso de N cargas puntuales localizadas en los vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$, la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el potencial V en el vector de posición $\mathbf{r}$ están dados respectivamente por

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{4\pi\varepsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \tag{15.1}$$

y

$$V = \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \tag{15.2}$$

Si las cargas se encuentran en el mismo plano (z = constante), las ecuaciones (15.1) y (15.2) se convierten en

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k[(x - x_k)\mathbf{a}_x + (y - y_k)\mathbf{a}_y]}{4\pi\varepsilon[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]^{3/2}} \tag{15.3}$$

$$V = \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]^{1/2}} \tag{15.4}$$

Para trazar las líneas del campo eléctrico se siguen estos pasos:

1. Se selecciona un punto de partida en la línea del campo.
2. Se calculan E_x y E_y en ese punto mediante la ecuación (15.3).
3. Se avanza una corta distancia a lo largo de la línea del campo hacia un nuevo punto en el plano. Como se observa en la figura 15.1, un movimiento $\Delta\ell$ a lo largo de la línea del campo corresponde a movimientos Δx y Δy a lo largo de las direcciones x y y, respectivamente. De esa figura se desprende que

$$\frac{\Delta x}{\Delta \ell} = \frac{E_x}{E} = \frac{E_x}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}}$$

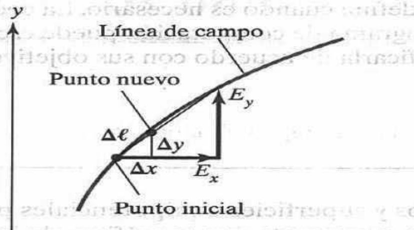


Figura 15.1. Corto desplazamiento en una línea de campo.

o

$$\Delta x = \frac{\Delta\ell \cdot E_x}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \tag{15.5}$$

De igual forma,

$$\Delta y = \frac{\Delta\ell \cdot E_y}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \tag{15.6}$$

Se avanza así a lo largo de la línea del campo desde el punto inicial (x, y) a un nuevo punto $x' = x + \Delta x$, $y' = y + \Delta y$.

4. Se regresa a los pasos 2 y 3 para repetir los cálculos. Se siguen generando nuevos puntos hasta completar una línea dentro del intervalo de coordenadas dado. Al completar la línea, se vuelve al paso 1 y se elige otro punto de partida. Téngase en cuenta que, al existir un número infinito de líneas de campo, es muy probable que cualquier punto de partida se ubique sobre una de ellas. Los puntos generados pueden trazarse a mano o con un graficador, como se ilustra en la figura 15.2.

Para trazar las líneas equipotenciales se siguen estos pasos:

1. Se selecciona un punto de partida.
2. Se calcula el campo eléctrico (E_x, E_y) en ese punto mediante la ecuación (15.3).

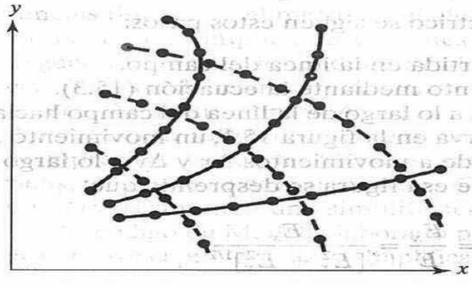


Figura 15.2. Puntos generados en líneas del campo E (continuas) y líneas equipotenciales (punteadas).

3. Se avanza una corta distancia a lo largo de la línea perpendicular a la línea del campo E en ese punto. Recuérdese a este respecto que si una línea tiene pendiente m, una línea perpendicular debe tener pendiente $-1/m$. Puesto que una línea del campo E y una línea equipotencial que se cruzan en un punto dado son recíprocamente ortogonales en ese punto,

$$\Delta x = \frac{-\Delta \ell \cdot E_y}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \tag{15.7}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta \ell \cdot E_x}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \tag{15.8}$$

Así, se avanza a lo largo de la línea equipotencial desde el punto inicial (x, y) a un nuevo punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Para comprobar éste, se calcula el potencial en los puntos nuevo e inicial mediante la ecuación (15.4); ambos valores deben ser iguales, porque los puntos se sitúan en la misma línea equipotencial.

4. Se regresa a los pasos 2 y 3 para repetir los cálculos. Se siguen generando nuevos puntos hasta completar una línea dentro del intervalo de x y y dado. Tras completar la línea, se vuelve al paso 1 y se elige otro punto de partida. Los puntos generados se unen a mano o con un graficador, como se muestra en la figura 15.2.

La línea del campo magnético debida a varias distribuciones de corriente puede trazarse, con base en la ley de Biot-Savart, siguiendo el mismo razonamiento. Es posible desarrollar programas para determinar la línea del campo magnético debida a una corriente lineal, una espira de corriente, un par de Helmholtz y un solenoide. También es posible escribir programas para trazar líneas de campo eléctrico y magnético dentro de una guía de ondas rectangular o el patrón de radiación de potencia producido por un arreglo lineal de antenas verticales de dipolo eléctrico de media onda.

Ejemplo 15.1

Escriba un programa para trazar las líneas de campo eléctrico y equipotenciales debidas a:

a) Dos cargas puntuales Q y $-4Q$ ubicadas en $(x, y) = (-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente.
b) Cuatro cargas puntuales $Q, -Q, Q$ y $-Q$ ubicadas en $(x, y) = (-1, -1), (1, -1), (1, 1)$ y $(-1, 1)$, respectivamente. Adopte $Q/4\,\pi\varepsilon = 1$ y $\Delta\ell = 0.1$. Considere el intervalo $-5 \leq x, y \leq 5$.

Solución:

El programa que aparece en la figura 15.3 se elaboró con base en los pasos descritos en la sección 15.2. Los comentarios insertados permiten que el programa se explique por sí solo. Para generar el diagrama que se muestra en la figura 15.4*(a)*, cargue el programa **plotit** en el directorio Matlab. En el indicador de comandos de Matlab, teclee

plotit ([1 −4], [−1 0; 1 0], 1, 1, 0.1, 0.01, 8, 2, 5)

números cuyo significado es provisto por el programa. Más adelante se ofrecen explicaciones adicionales sobre éste.

Puesto que las líneas del campo lineal E emanan de cargas positivas y terminan en cargas negativas, parece razonable generar los puntos de partida (x_s, y_s) de esas líneas en pequeños círculos centrados en las ubicaciones de carga (x_Q, y_Q); esto es,

$$x_s = x_Q + r\cos\theta \tag{15.1.1a}$$

$$y_s = y_Q + r\,\text{sen}\,\theta \tag{15.1.1b}$$

```
function plotit (charges, location, ckEField, ckEq, DLE, DLV, NLE, NLV, PTS)
figure;
hold on;
% Program for plotting the electric field lines
% and equipotential lines due to coplanar point charges
% the plot is to be within the range -5<x,y<5
%
% This is the correct usage:
% function plotit (charges, location, ckEField, ckEq, DLE, DLV, NLE, NLV, PTS)
%
where,
%    charges = a vector containing the charges
%   location = a matrix where each row is a charge location
%   ckEField = Flag set to 1 plots the Efield lines
%       ckEq = Flag set to 1 plots the equipotential lines
% DLE or DLV = the increment along E & V lines
%        NLE = No. of E-Field lines per charge
%        NLV = No. of Equipotential lines per charge
%        PTS => Plots every PTS point (i.e. if PTS = 5 then plot
every 5th point)
% note that constant Q/4*Pie*ErR is set equal to 1.0

% Determine the E-Field Lines
% For convenience, the starting points (XS, YS) are radially
distribuited about charge locations
Q=charges;
XQ = location (:,1);
YQ = location (:,2);
JJ=1;
NQ = length (charges);
if (ckEField)
for K=1 :NQ
    for I =1 :NLE
        THETA = 2*pi*(I-1)/(NLE);
        XS=XQ(K) + 0.1*cos(THETA);
        YS=YQ(K) + 0.1*sen(THETA);
        XE=XS;
        YE=YS;
        JJ=JJ+1;
        if (~mod(JJ,PTS))
        plot (XE,YE) ;
        end
        while(1)
        % Find i ncrement and new point (X,Y)
            EX=0;
            EY=0;
```

Figura 15.3. Programa de computación para el ejemplo 15.1.

```
        for J=1:NQ
            R =sqrt((XE-XQ (J))^2 + (YE - YQ(J)).^2;
            EX = EX +Q(J)*(XE-XQ(J))/(R^3);
            Ey = Ey +Q(J)*(YE-YQ(J))/(R^3);
        end
        E = sqrt (EX^2 + EY^2);

        % CHECK FOR A SINGULAR POINT
        if (E <=.00005)
            break;
        end
        DX = DLE*EX/E;
        DY = DLE*EY/E;
        % FOR NEGATIVE CHARGE, NEGATE DX & DY SO THAT INCREMENT
        % IS AWAY FROM THE CHARGE
        if (Q(K) < 0)
            DX = -DX;
            DY = -DY;
        end
        XE = XE + DX;
        YE = YE + DY;
        % CHECK WHETHER NEW POINT IS WITHIN THE GIVEN RANGE OR
        TOO
        % CLOSE TO ANY OF THE POINT CHARGES - TO AVOID SINGULAR
        POINT
        if ((abs(XE) >= 5) | (abs(YE) >= 5))
            break;
        end

        if (sum(abs(XE-XQ) < .05 & abs(YE-YQ) < .05) >0)
            break;
        end
        JJ=JJ+1;
        if (~mod(JJ,PTS))
            plot (XE,YE);
        end
      end % while loop
    end % I =1:NLE
end    % K = 1:NQ
end % if
% NEXT, DETERMINE THE EQUIPOTENTIAL LINES
% FOR CONVENIENCE, THE STARTING POINTS (XS,YS) ARE
% CHOSEN LIKE THOSE FOR THE E-FIELD LINES
if (ckEq)
JJ=1;
DELTA = .2;
ANGLE = 45*pi/180;
```

Figura 15.3. *(Continuación.)*

```
for K =1:NQ
    FACTOR = .5;
    for KK = 1:NLV
      XS = XQ(K) + FACTOR*cos(ANGLE);
      YS = YQ(K) + FACTOR*sen(ANGLE);
      if ( abs(XS) >= 5 | abs(YS) >=5)
          break;
      end
      DIR = 1;
      XV = YS;
      YV = YS;
      JJ=JJ+1;
      if (~mod(JJ,PTS))
          plot(XV,YV);
      end
% FIND INCREMENT AND NEW POINT (XV,YV)
      N=1;
      while (1)
           EX = 0;
           EY = 0;
           for J = 1:NQ
               R = sqrt ((XV-XQ(J))^2 + (YV-YQ(J))^2);
               EX = EX + Q(J)*(XV-XQ(J))/(R^3);
               Ey = EY + Q(J)*(yV-YQ(J))/(R^3);
          end
          E=sqrt(EX^2 + EY^2);
          if (E <= .00005)
              FACTOR = 2*FACTOR;
              break;
          end
          DX = -DLV*EY/E;
          DY = DLV*EV/E;
          XV = XV + DIR*DX;
          YV = YV + DIR*DY;
          % CHECK IF THE EQUIPOTENTIAL LINE LOOPS BACK TO (X,YS)
          R0 = sqrt((XV - XS)^2 + (YV - YS)^2);
          if (R0 < DELTA & N < 50)
              FACTOR = 2*FACTOR;
              break;
          end
          % CHECK WHETHER NEW POINT IS WITHIN THE GIVEN RANGE
          % IF FOUND OUT OF RANGE, GO BACK TO THE STARTING POINT
          % (S,YS)BUT INCREMENT IN THE OPPOSITE DIRECTION
          if (abs(XV) > 5 | abs(YV) > 5)
              DIR = DIR -2;
              XV = XS;
              YV = YS;
```

Figura 15.3. *(Continuación.)*

```
            if (abs(DIR) > 1)
               FACTOR = 2*FACTOR;
               break;
            end
        else
            if (sum(abs(XV-XQ) < .005 & abs(YV-YQ) < .005) >0)
                  break;
               end
         end
         JJ=JJ+1;
         if (~mod(JJ,PTS))
            N=N+1;
            plot(XV,YV);
         end
      end % WHILE loop
   end  % KK
end  % K

end % if
```

Figura 15.3. *(Continuación).*

donde r es el radio del círculo (por ejemplo, $r = 0.1$ o 0.05) y θ un ángulo prescrito elegido para cada línea del campo E. Los puntos de partida de las líneas equipotenciales pueden generarse de diferentes formas: a lo largo de los ejes x y y, a lo largo de la línea $y = x$ y así sucesivamente. No obstante, para que el programa sea lo más general posible, los puntos de partida deben depender de las ubicaciones de carga, como en el caso de las líneas del campo E. Podrían seleccionarse por medio de la ecuación (15.1.1), pero con θ fija (45°, por ejemplo) y r variable (0.5, 1.0, 2.0, . . ., por ejemplo).

El valor de la longitud incremental $\Delta\ell$ es crucial para conseguir diagramas exactos. Cuanto menor sea el valor de $\Delta\ell$, los diagramas serán más precisos, pero también se generarán más puntos, lo cual puede causar problemas de almacenamiento en la memoria. Por ejemplo, una línea podría constar de más de 1000 puntos generados. En vista en este caso del gran número de puntos por trazar, sería conveniente almacenarlos en un archivo de datos y seguir una rutina de gráficos para trazarlos.

En el programa que aparece en la figura 15.3 se han insertado diferentes comprobaciones para las líneas tanto del campo E como equipotenciales:

a) Comprobación de un punto singular (¿$\mathbf{E} = 0$?).
b) Comprobación de si el punto generado está demasiado cerca de una ubicación de carga.
c) Comprobación de si el punto se encuentra dentro del intervalo dado de $-5 < x$, $y < 5$.
d) Comprobación de si las curvas de las líneas (equipotenciales) vuelven al punto de partida.

El trazo de los puntos generados con relación a las dos y cuatro cargas puntuales se muestra en las figuras 15.4*(a)* y 15.4*(b)*, respectivamente.

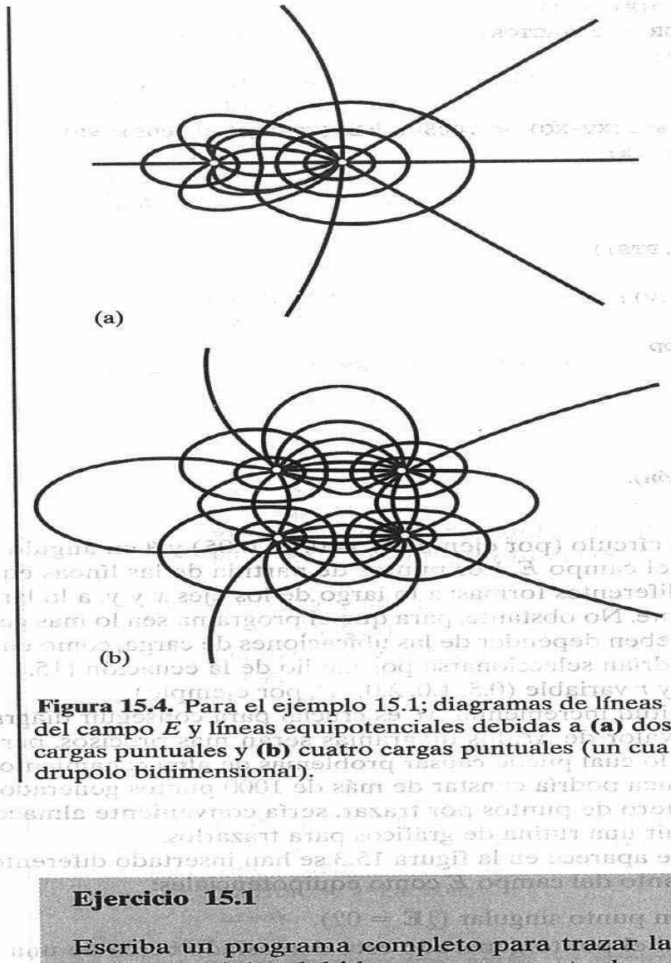


Figura 15.4. Para el ejemplo 15.1; diagramas de líneas del campo E y líneas equipotenciales debidas a **(a)** dos cargas puntuales y **(b)** cuatro cargas puntuales (un cuadrupolo bidimensional).

Ejercicio 15.1

Escriba un programa completo para trazar las líneas de campo eléctrico y líneas equipotenciales debidas a cargas puntuales coplanares. Ejecute el programa con $N = 3$; es decir, tres cargas puntuales $-Q$, $+Q$ y $-Q$ ubicadas en $(x, y) = (-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$, respectivamente. Adopte $Q/4\pi\varepsilon = 1$, $\Delta\ell = 0.1$ o 0.01 para mayor precisión y limite su trazo a $-5 \leq x, y \leq 5$.

Respuesta: Véase la figura 15.5.

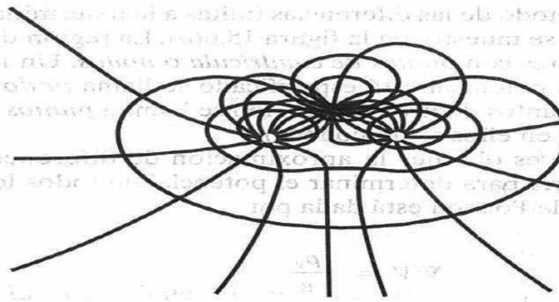


Figura 15.5. Para el ejercicio 15.1.

15.3. Método de las diferencias finitas

El método de las diferencias finitas[1] (MDF) es una técnica numérica simple de utilidad para resolver problemas como los que se resolvieron analíticamente en el capítulo 6. Un problema está inequívocamente definido por tres cosas:

1. Una ecuación diferencial parcial, como la ecuación de Laplace o la de Poisson.
2. Una región de solución.
3. Condiciones en la frontera, iniciales o ambas.

Por ejemplo, una solución de diferencias finitas de la ecuación de Poisson o Laplace se obtiene en tres pasos: 1. división de la región de solución en una cuadrícula de nodos; 2. aproximación de la ecuación diferencial y las condiciones en la frontera por medio de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales (llamadas *ecuaciones en diferencia*) en puntos de la cuadrícula dentro de la región de solución, y 3. resolución de este conjunto de ecuaciones algebraicas.

[1] Para una amplia exposición del método de las diferencias finitas, véase G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 2a. ed., Clarendon, Oxford, 1978.

Paso 1. Apliquemos el método de las diferencias finitas a la determinación del potencial eléctrico en la región que se muestra en la figura 15.6*(a)*. La región de solución se ha dividido en mallas rectangulares con *puntos de cuadrícula* o *nodos*. Un nodo en la frontera de la región en el que el potencial está especificado se llama *nodo fijo* (fijo por el problema), en tanto que los puntos dentro de la región se llaman *puntos libres* (libres en el sentido de que el potencial en ellos se desconoce).

Paso 2. Nuestro objetivo es obtener la aproximación de diferencias finitas de la ecuación de Poisson y utilizarla para determinar el potencial en todos los puntos libres. Recuérdese que la ecuación de Poisson está dada por

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{15.9a}$$

En el caso de una región de solución bidimensional como la que aparece en la figura 15.6*(a)*, ρ_v es reemplazada por ρ_s, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, de manera que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho s}{\varepsilon} \tag{15.9b}$$

A partir de la definición de la derivada de $V(x, y)$ en el punto (x_o, y_o),

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=x_o} \simeq \frac{V(x_o + \Delta x, y_o) - V(x_o - \Delta x, y_o)}{2\Delta x}$$
$$= \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta x} \tag{15.10}$$

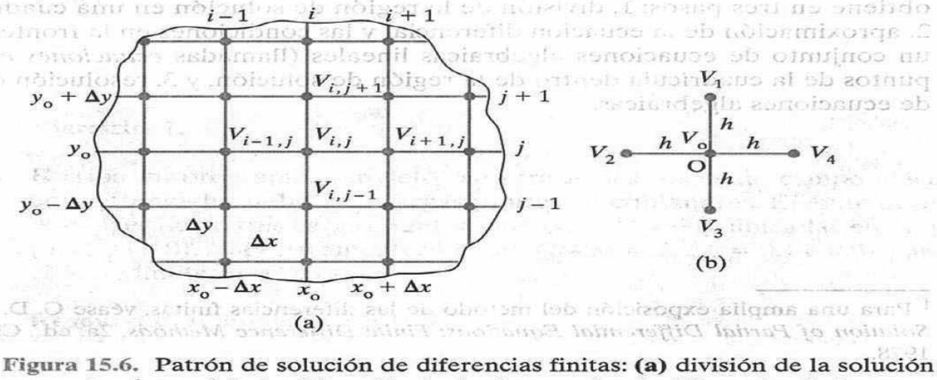


Figura 15.6. Patrón de solución de diferencias finitas: **(a)** división de la solución en puntos de cuadrícula, **(b)** molécula de cinco nodos de diferencias finitas.

donde Δx es un incremento suficientemente reducido a lo largo de x. En cuanto a la segunda derivada, la derivada de la primera derivada V',

$$V'' = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_o} = \frac{\partial V'}{\partial x} \simeq \frac{V'(x_o + \Delta x/2, y_o) - V'(x_o - \Delta x/2, y_o)}{\Delta x}$$

$$= \frac{V(x_o + \Delta x, y_o) - 2V(x_o, y_o) + V(x_o - \Delta x, y_o)}{(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{15.11}$$

Las ecuaciones (15.10) y (15.11) son las aproximaciones de diferencias finitas de la primera y segunda derivadas parciales de V respecto de x, evaluadas en $x = x_o$. La aproximación de la ecuación (15.10) se asocia con un error en el orden de Δx, mientras que la de la ecuación (15.11) se asocia con un error en el orden de $(\Delta x)^2$. De igual manera,

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{y=y_o} \simeq \frac{V(x_o, y_o + \Delta y) - 2V(x_o, y_o) + V(x_o, y_o - \Delta y)}{(\Delta y)^2}$$

$$= \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \tag{15.12}$$

Al sustituir las ecuaciones (15.11) y (15.12) en la ecuación (15.9*b*) y conceder que $\Delta x = \Delta y = h$ se obtiene

$$V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j} = -\frac{h^2 \rho s}{\varepsilon}$$

o

$$\boxed{V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{h^2 \rho s}{\varepsilon}\right)} \tag{15.13}$$

donde h es el *tamaño de la malla*. La ecuación (15.13) es la aproximación de diferencias finitas de la ecuación de Poisson. Si la región de solución está libre de carga ($\rho_S = 0$), la ecuación (15.9) se convierte en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{15.14}$$

La aproximación de diferencias finitas de esta ecuación se obtiene de la ecuación (15.13) al fijar $\rho_S = 0$; es decir,

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) \tag{15.15}$$

Esta ecuación es en esencia una aproximación de diferencias finitas de cinco nodos del potencial en el punto central de una malla cuadrada. En la figura 15.6*(b)* se presenta una

molécula de cinco nodos de diferencias finitas, deducida de la figura 15.6*(a)*. Aplicada a esta molécula, así, la ecuación (15.15) se convierte en

$$\boxed{V_o = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)} \tag{15.16}$$

Esta ecuación exhibe claramente la propiedad de valor promedio de la ecuación de Laplace. En otras palabras, la ecuación de Laplace puede interpretarse como un medio diferencial de enunciar que el potencial en un punto específico equivale al promedio del potencial en los puntos vecinos.

Paso 3. Para aplicar la ecuación (15.16) [o (15.13)] a un problema dado suele seguirse uno de estos dos métodos:

A. Método de iteración

Para comenzar, se asigna al potencial en los nodos libres un valor inicial de cero o cualquier otro razonable valor estimado. Manteniendo inalterado en todo momento el potencial en los nodos fijos, se aplica la ecuación (15.16) a cada nodo libre hasta calcular el potencial en todos ellos. Los valores del potencial obtenidos al final de esta primera iteración no son exactos, sino meramente aproximativos. Para dotarlos de mayor precisión, se repite el cálculo en cada nodo libre a partir de los valores anteriores para determinar nuevos. La modificación iterativa o reiterada del valor del potencial en cada nodo libre prosigue hasta alcanzar un grado de precisión prescrito o hasta que el valor anterior y el nuevo en cada nodo son satisfactoriamente cercanos.

B. Método de la matriz en banda

La aplicación de la ecuación (15.16) a todos los nodos libres resulta en un conjunto de ecuaciones simultáneas de la forma

$$[A][V] = [B] \tag{15.17}$$

donde $[A]$ es una matriz *escasa* (es decir, con muchos términos cero), $[V]$ se compone del potencial desconocido en los nodos libres y $[B]$ es otra matriz en columnas formada por el potencial conocido en los nodos fijos. La matriz $[A]$ es también una matriz *en banda*, ya que sus términos diferentes de cero se agrupan en torno a la diagonal principal en razón de que el potencial en cada nodo sólo se ve afectado por los nodos vecinos más próximos. La matriz escasa en banda se inverte fácilmente para determinar $[V]$. Así, de la matriz $[V]$ se obtiene el potencial en los nodos libres de esta forma:

$$[V] = [A]^{-1}[B] \tag{15.18}$$

El método de las diferencias finitas puede aplicarse a problemas con variación en el tiempo. Considérese, por ejemplo, la ecuación de onda unidimensional (10.1),

$$u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{15.19}$$

donde u es la velocidad de la onda y Φ la componente de campo E o H de la onda electromagnética. Las aproximaciones de diferencias de las derivadas en (x_o, t_o) o en el nodo de orden (i, j) que se muestran en la figura 15.7 son

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right|_{x=x_o} \simeq \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{15.20}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right|_{t=t_o} \simeq \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{(\Delta t)^2} \tag{15.21}$$

Al insertar las ecuaciones (15.20) y (15.21) en la ecuación (15.20) y despejar $\Phi_{i,j+1}$ se obtiene

$$\boxed{\Phi_{i,j+1} \simeq \alpha(\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j}) + 2(1-\alpha)\,\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}} \tag{15.22}$$

donde

$$\alpha = \left[\frac{u\,\Delta t}{\Delta x}\right]^2 \tag{15.23}$$

Es posible demostrar que para que la solución referida en la ecuación (15.22) sea estable, $\alpha \le 1$. Para iniciar el algoritmo de diferencias finitas de la ecuación (15.22) se emplean las condiciones iniciales. Suponemos que en $t = 0$, $\partial\Phi_{i,0}/\partial t = 0$ y utilizamos la aproximación (central) de diferencias (véase la pregunta de repaso 15.2) para obtener

$$\frac{\partial \Phi_{i,0}}{\partial t} \simeq \frac{\Phi_{i,1} - \Phi_{i,-1}}{2\Delta t} = 0$$

o

$$\Phi_{i,1} = \Phi_{i,-1} \tag{15.24}$$

La sustitución de la ecuación (15.24) en la ecuación (15.22) y la adopción de $j = 0$ $(t = 0)$ producen

$$\Phi_{i,1} \simeq \alpha(\Phi_{i-1,0} + \Phi_{i+1,0}) + 2(1-\alpha)\,\Phi_{i,0} - \Phi_{i,1}$$

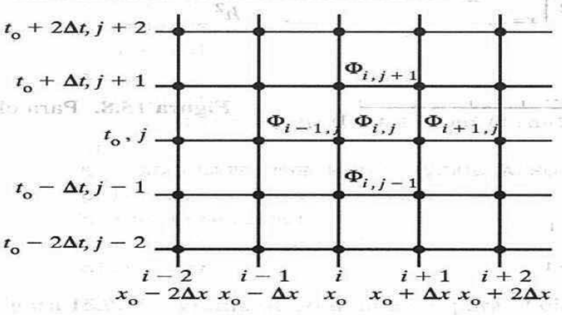


Figura 15.7. Patrón de solución de diferencias finitas de una ecuación de onda.

$$\Phi_{i,1} \simeq \frac{1}{2}\left[\alpha(\Phi_{i-1,0} + \Phi_{i+1,0}) + 2(1-\alpha)\Phi_{i,0}\right] \tag{15.25}$$

Con la ecuación (15.25) como fórmula "de partida", por medio de la ecuación (15.22) puede obtenerse directamente el valor de Φ en cualquier punto de la cuadrícula. Conviene señalar que los dos métodos descritos para resolver la ecuación (15.16) no se aplican a la ecuación (15.22), porque ésta puede usarse directamente con la ecuación (15.25) como fórmula de partida. En otras palabras, en este caso no se tiene un conjunto de ecuaciones simultáneas; la ecuación (15.22) es una fórmula explícita.

El concepto del MDF puede prolongarse a la ecuación de Poisson o de Laplace y a las ecuaciones de onda en otros sistemas de coordenadas. La precisión de este método depende de la calidad de la cuadrícula y del tiempo que se invierta en la depuración de los valores del potencial. El tiempo en la computadora puede reducirse e incrementarse la exactitud e índice de convergencia si las estimaciones de los valores iniciales son razonables, se obtiene provecho de la simetría (de ser posible), se trabaja con una malla tan pequeña como se pueda y se utilizan moléculas de diferencias finitas más complejas (fig. 15.41). Una limitación de este método es la necesidad de recurrir a una interpolación de algún tipo para determinar soluciones en puntos no situados en la cuadrícula. Una forma obvia de evitar este inconveniente consiste en utilizar una cuadrícula más fina, lo que sin embargo implica gran número de cálculos y la ocupación de un vasto espacio de memoria en la computadora.

Ejemplo 15.2

Resuelva el problema unidimensional con valor en la frontera $-\Phi'' = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ sujeto a $\Phi(0) = 0 = \Phi(1)$. Aplique el método de las diferencias finitas.

Solución:

Se obtiene primero la aproximación de diferencias finitas de la ecuación diferencial $\Phi'' = -x^2$, la ecuación de Poisson en una dimensión. Después se divide el dominio entero $0 \leq x \leq 1$ en N segmentos iguales de longitud h $(= 1/N)$, como se muestra en la figura 15.8*(a)*, de tal forma que haya $(N + 1)$ nodos.

$$-x_o^2 = \left.\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right|_{x=x_o} \simeq \frac{\Phi(x_o + h) - 2\Phi(x_o) + \Phi(x_o - h)}{h^2}$$

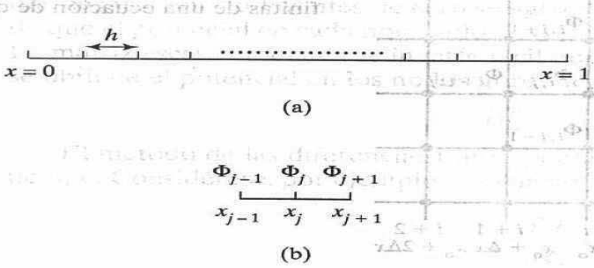


Figura 15.8. Para el ejemplo 15.2.

o

$$-x_j^2 = \frac{\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1}}{h^2}$$

Así,

$$-2\Phi_j = -x_j^2h^2 - \Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}$$

o

$$\Phi_j = \frac{1}{2}(\Phi_{j+1} + \Phi_{j-1} + x_j^2 h^2)$$

Del empleo de este sistema de diferencias finitas se obtiene una solución aproximada de diversos valores de N. El código de Matlab correspondiente se presenta en la figura 15.9. El número de iteraciones NI depende del grado de exactitud que se desee. En un problema unidimensional como éste quizá sea suficiente con $NI = 50$; en problemas bi o tridimensionales se precisará de valores mayores (tabla 15.1). Cabe señalar que los valores de Φ en puntos extremos (nodos fijos) se mantienen fijos. En la figura 15.10 se muestran las soluciones relativas a $N = 4$ y 10.

Esta solución puede compararse con la solución exacta, la cual se obtiene de la siguiente manera. Puesto que $d^2\Phi/dx^2 = -x^2$, una doble integración resulta en

$$\Phi = -\frac{x^4}{12} + Ax + B$$

```
% ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF EXAMPLE 15.2
% SOLVED USING FINITE DIFFERENCE METHOD
%
% h = MESH SIZE
% ni = NO. OF ITERATIONS DESIRED

      P = [ ];
      n=20;
      ni=500;
      l=1.0;
      h = 1/n;
      phi=zeros(n+1,1);
      x=h*[0:n]';
      x1=x(2:n);
      for k=1:ni
        phi([2:n])=[phi(3:n+1)+phi(1:n-1)+x1.^2*h^2]/2;
      end
      % CALCULATE THE EXACT VALUE ALSO
      phiex=x.*(1.0-x.^3)/12.0;
      diary a:test.out
      [[1:n+1]' phi phiex]
      diary off
```

Figura 15.9. Programa de computación para el ejemplo 15.2.

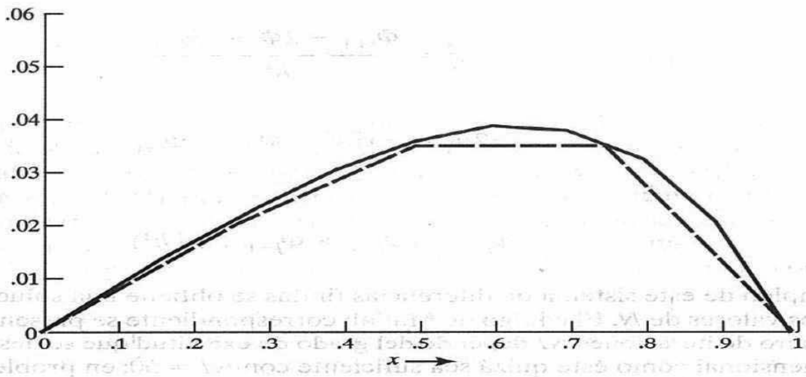


Figura 15.10. Para el ejemplo 15.2; diagrama de $\Phi(x)$. La curva continua corresponde a $N = 10$ y la curva punteada a $N = 4$.

donde A y B son constantes de integración. Con fundamento en las condiciones en la frontera,

$$\Phi(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\Phi(1) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{1}{12} + A \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{12}$$

En consecuencia, la solución exacta es $\Phi = x(1 - x^3)/12$, la cual se calculó en la figura 15.9 y resultó estar muy cerca del caso $N = 10$.

Ejercicio 15.2

Resuelva la ecuación diferencial $d^2y/dx^2 + y = 0$ con las condiciones en la frontera $y(0) = 0, y(1) = 1$ aplicando el método de las diferencias finitas. Adopte $\Delta x = 1/4$.

Respuesta: Compare su resultado con la solución exacta $y(x) = \dfrac{\text{sen }(x)}{\text{sen }(1)}$.

mplo 15.3

Determine el potencial en los nodos libres del sistema potencial que aparece en la figura 15.11 aplicando el método de las diferencias finitas.

Solución:

Este problema se resolverá mediante los métodos de iteración y de matriz en banda.

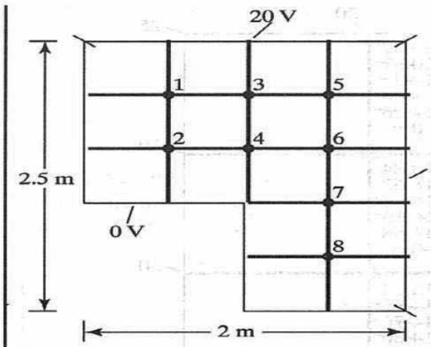


Figura 15.11. Para el ejemplo 15.3.

Método 1 (método de iteración). Se establecen primero como equivalentes a cero los valores iniciales del potencial en los nodos libres. Después se aplica la ecuación (15.16) a cada nodo libre utilizando los potenciales circundantes más recientes cada vez que se calcula el potencial en un nodo. En cuanto a la primera iteración:

$$V_1 = 1/4(0 + 20 + 0 + 0) = 5$$
$$V_2 = 1/4(5 + 0 + 0 + 0) = 1.25$$
$$V_3 = 1/4(5 + 20 + 0 + 0) = 6.25$$
$$V_4 = 1/4(1.25 + 6.25 + 0 + 0) = 1.875$$

y así sucesivamente. Para evitar confusiones, cada vez que se calcula un nuevo valor en un nodo libre, se tacha el valor anterior, como se muestra en la figura 15.12. Tras calcular V_8, se inicia la segunda iteración en el nodo 1:

$$V_1 = 1/4(0 + 20 + 1.25 + 6.25) = 6.875$$
$$V_2 = 1/4(6.875 + 0 + 0 + 1.875) = 2.187$$

y así sucesivamente. Después de cinco iteraciones se obtienen los valores no tachados de la figura 15.12. Luego de 10 iteraciones (las cuales no se muestran en esa figura) se obtiene

$$V_1 = 10.04, \quad V_2 = 4.956, \quad V_3 = 15.22, \quad V_4 = 9.786$$
$$V_5 = 21.05, \quad V_6 = 18.97, \quad V_7 = 15.06, \quad V_8 = 11.26$$

Método 2 (método de matriz en banda). Este método manifiesta la estructura escasa del problema. Se aplica la ecuación (15.16) a cada nodo libre y los términos conocidos (potencial prescrito en los nodos fijos) se agrupan en el lado derecho, mientras que los términos desconocidos (potenciales en nodos libres) se ubican en el lado izquierdo del sistema resultante de ecuaciones simultáneas, el cual se expresará en forma matricial como $[A][V] = [B]$.

En cuanto al nodo 1,

$$-4V_1 + V_2 + V_3 = -20 - 0$$

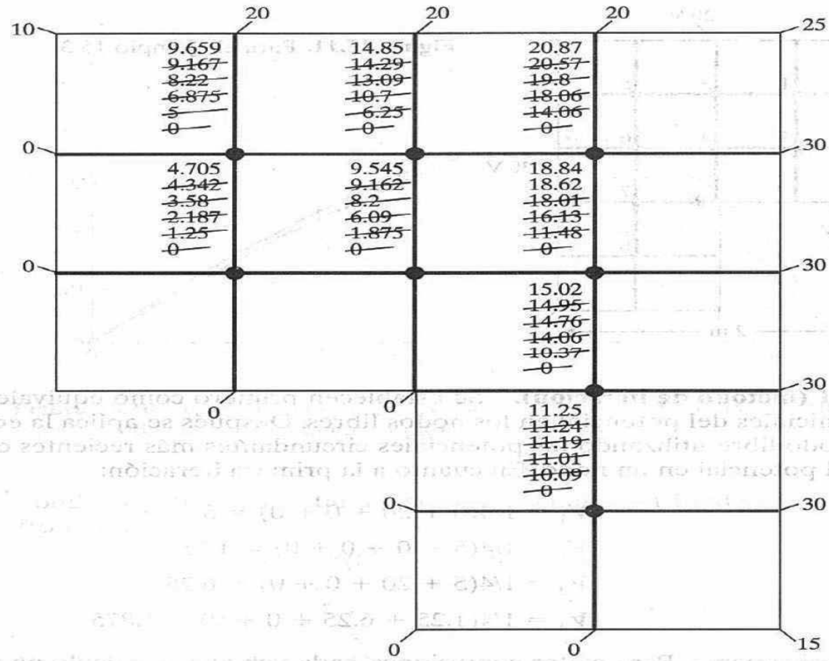


Figura 15.12. Para el ejemplo 15.3; los valores sin tachar son la solución de las cinco iteraciones.

En cuanto al nodo 2,

$$V_1 + 4V_2 + V_4 = -0 - 0$$

En cuanto al nodo 3,

$$V_1 - 4V_3 + V_4 + V_5 = -20$$

En cuanto al nodo 4,

$$V_2 + V_3 - 4V_4 + V_6 = -0$$

En cuanto al nodo 5,

$$V_3 - 4V_5 + V_6 = -20 - 30$$

En cuanto al nodo 6,

$$V_4 + V_5 - 4V_6 + V_7 = -30$$

En cuanto al nodo 7,

$$V_6 - 4V_7 + V_8 = -30 - 0$$

En cuanto al nodo 8,

$$V_7 - 4V_8 = -0 - 0 - 30$$

Nótese que se cuenta con cinco términos en cada nodo, en razón de que se está usando una molécula de cinco nodos. La siguiente es la expresión en forma matricial de las ocho ecuaciones obtenidas:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -50 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \end{bmatrix}$$

o

$$[A]\,[V] = [B]$$

donde $[A]$ es la matriz escasa en banda, $[V]$ la matriz en columna integrada por los valores desconocidos del potencial en los nodos libres y $[B]$ la matriz en columna formada por el potencial en los nodos fijos. La naturaleza de "banda" de $[A]$ se indica con un marco punteado.

Repárese en que la matriz $[A]$ pudo haberse obtenido directamente de la figura 15.11 sin tener que aplicar la ecuación (15.16) a cada nodo libre. En tal caso, simplemente se establecen los términos de la diagonal (o autotérminos) como $A_{ii} = -4$ y se fija $A_{ij} = 1$ si los nodos i y j están vinculados o $A_{ij} = 0$ si no están directamente vinculados. Por ejemplo, $A_{23} = A_{32} = 0$, porque los nodos 2 y 3 no están vinculados, en tanto que $A_{46} = A_{64} = 1$, porque los nodos 4 y 6 están vinculados. De manera similar, la matriz $[B]$ se obtiene directamente de la figura 15.11 estableciendo que B_i es igual a menos la suma de los valores del potencial en los nodos fijos vinculados con el nodo i. Por ejemplo, $B_5 = -(20 + 30)$, porque el nodo 5 está vinculado con dos nodos fijos con potencial de 20 V y 30 V. Si el nodo i no está vinculado con ningún nodo fijo, $B_i = 0$.

Al invertir la matriz $[A]$ con Matlab se obtiene

$$[V] = [A]^{-1}\,[B]$$

o

$$V_1 = 10.04, \quad V_2 = 4.958, \quad V_3 = 15.22, \quad V_4 = 9.788$$
$$V_5 = 21.05, \quad V_6 = 18.97, \quad V_7 = 15.06, \quad V_8 = 11.26$$

resultado aceptable en comparación con el obtenido mediante el método de iteración.

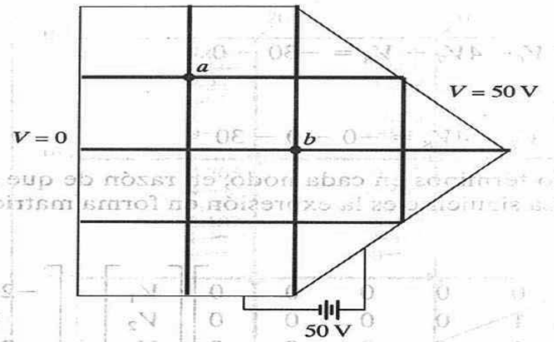


Figura 15.13. Para el ejercicio 15.3.

Ejercicio 15.3

Utilice el método de iteración para hallar la aproximación de diferencias finitas del potencial en los puntos a y b del sistema que aparece en la figura 15.13.

Respuesta: $V_a = 10.01$ V, $V_b = 28.3$ V.

mplo 15.4

Obtenga la solución de la ecuación de Laplace respecto del tanque de longitud infinita cuya sección transversal rectangular se ilustra en la figura 15.14. Sea $V_1 = 10$ V, $V_2 = 100$ V, $V_3 = 40$ V y $V_4 = 0$ V.

Solución:

Este problema se resolverá siguiendo el método de iteración. En este caso, la región de solución tiene una frontera regular. Se puede escribir fácilmente un programa para determinar el potencial en los puntos de la cuadrícula dentro del tanque. Se divide la región en mallas cuadradas. Si se decide utilizar una cuadrícula de 15×10, el número de puntos de cuadrícula a lo largo de x es $15 + 1 = 16$ y el número de puntos a lo largo de y es $10 + 1 = 11$. El tamaño de la malla $h = 1.5/15 = 0.1$ m. La cuadrícula de 15×10 se

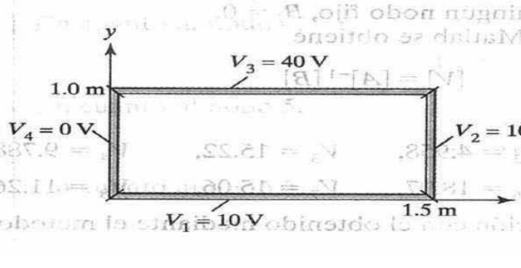


Figura 15.14. Para el ejemplo 15.4.

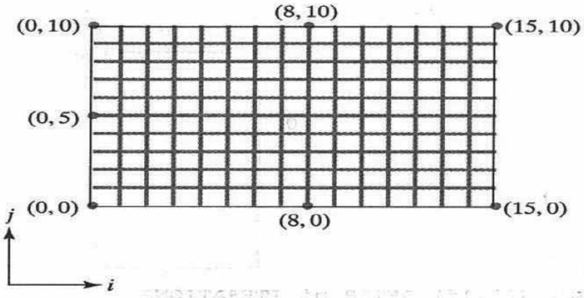


Figura 15.15. Para el ejemplo 15.4; cuadrícula de 15×10.

muestra en la figura 15.15. Los puntos de la cuadrícula se han numerado (i, j) a partir del extremo inferior izquierdo del tanque. Teniendo en cuenta la aplicación de la ecuación (15.15) y del método de iteración, el programa de computación que se refiere en la figura 15.16 se elaboró para determinar el potencial en los nodos libres. En la tabla 15.1 se presentan los valores del potencial en los puntos $(x, y) = (0.5, 0.5), (0.8, 0.8), (1.0, 0.5)$ y $(0.8, 0.2)$, correspondientes a $(i, j) = (5, 5), (8, 8), (10, 5)$ y $(8, 2)$, respectivamente, luego de 50, 100 y 200 iteraciones. Se presentan asimismo los valores exactos [véase el inciso *c)* del problema 6.18], obtenidos con el método de separación de variables y un programa similar al contenido en la figura 6.11. Valga insistir en que el grado de precisión depende del tamaño de malla h. Siempre es conveniente que h sea lo más pequeño posible. Adviértase también que los valores del potencial en los nodos fijos se mantuvieron constantes durante la realización de todos los cálculos.

```
% USING FINITE DIFFERENCE (INTERATION) METHOD
% THIS PROGRAM SOLVES THE TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE
% PROBLEM (LAPLACE´S EQUATION) SHOWN IN FIG. 15.14.
% ni = NO. OF INTERATIONS
% nx = NO. OF X GRID POINTS
% ny = NO. OF Y GRID POINTS
% v(i,j) = POTENTIAL AT GRID POINT (i,j) OR (x,y) WITH
% NODE NUMBERING STARTING FROM THE LOWER LEFT-HAND
% CORNER OF THE TROUGH

v1 = 10.0;
v2 = 100.0;
v3 = 40.0;
v4 = 0.0;
ni = 200;
nx = 16;
ny = 11;
% SET INITIAL VALUES EQUAL TO ZEROES
v = zeros(nx,ny);
% FIX POTENTIALS ARE FIXED NODES
```

Figura 15.16. Programa de computación para el ejemplo 15.4.

```
for i=2 :nx-1
   v(i,1) = v1;
   v(i,ny) = v3;
end
for j=2:ny-1
   v(1,j)= v4;
   v(nx,j) = v2;
end
v(1,1) = 0.5*(v1 + v4);
v(nx,1) = 0.5*(v1 + v2);
v(1,ny) = 0.5*(v3 + v4);
v(nx,ny) = 0.5*(v2 + v3);
% NOW FIND v(i,j) USING EQ. (15.15) AFTER ni ITERATIONS
for k=1:ni
  for i=2:nx-1
     for j=2:ny-1
          v(i,j) = 0.25*(v(i+1,j) + v(i,j+1) + v(i,j+1) + v(1,j-1) );
     end
  end
end
diary a:test1.out
[v(6,6), v(9,9), v(11,6), v(9,3)]
[ [1:nx, 1:ny] v(i,j) ]
diary off
```

Figura 15.16. *(Continuación).*

Tabla 15.1. Solución del ejemplo 15.4 (por el método de iteración) en puntos selectos.

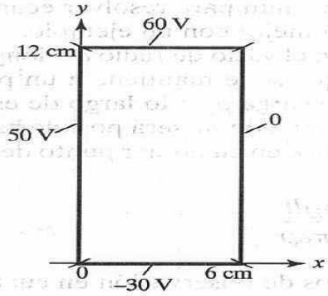
Coordenadas (x,y)	Número de iteraciones 50	100	200	Valor exacto
(0.5, 0.5)	20.91	22.44	22.49	22.44
(0.8, 0.8)	37.7	38.56	38.59	38.55
(1.0, 0.5)	41.83	43.18	43.2	43.22
(0.8, 0.2)	19.87	20.94	20.97	20.89

Ejercicio 15.4

Considere el tanque de la figura 15.17. Aplique un sistema de diferencias finitas de cinco nodos para hallar el potencial en el centro del tanque utilizando una cuadrícula de *a)* 4×8 y *b)* 12×24.

Respuestas: *a)* 23.8 V y *b)* 23.89 V.

Figura 15.17. Para el ejercicio 15.4.



15.4. Método de momentos

Como el método de las diferencias finitas, el método de momentos(MM)[2] tiene la ventaja de la sencillez conceptual. En tanto que el primero se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales, con el segundo se resuelven ecuaciones integrales.

Supongamos que se desea aplicar el método de momentos a la ecuación de Poisson (15.9*a*). Es posible demostrar que una solución integral a esa ecuación es

$$V = \int \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon r} \tag{15.26}$$

Como se recordará, en el capítulo 4 se explicó que una ecuación como la (15.26) puede deducirse de la ley de Coulomb. Recuérdese también que, dada la distribución de carga $\rho_v(x, y, z)$, es posible hallar el potencial $V(x, y, z)$, el campo eléctrico $\mathbf{E}(x, y, z)$ y la carga total Q. Pero si se conoce el potencial V y la distribución de carga se desconoce, ¿cómo determinar ρ_v a partir de la ecuación (15.26)? Convirtiendo a ésta en *ecuación integral.*

Una **ecuación integral** es aquella en la que la función desconocida está dentro del signo de integral.

Su forma general es

$$V(x) = \int_a^b K(x, t)\, \rho(t)\, dt \tag{15.27}$$

donde las funciones $K(x, t)$ y $V(t)$ y los límites a y b se conocen, la función desconocida $\rho(t)$ está por determinarse y la función $K(x, t)$ es el *núcleo* o *kernel* de la ecuación. El

[2] Harrington fue el primero en usar el término *método de momentos* en la bibliografía occidental. Para mayores detalles sobre este método, véase R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Krieger, Malabar, FL, 1968.

método de momentos es una técnica numérica común para resolver ecuaciones integrales como la ecuación (15.27). Se le comprenderá mejor con un ejemplo.

Considérese el alambre conductor delgado en el vacío de radio a y longitud $L(L \gg a)$ que se muestra en la figura 15.18. Supóngase que se le mantiene a un potencial de V_o. Nuestro propósito es determinar la densidad de carga ρ_L a lo largo de ese alambre mediante el método de momentos. Habiendo determinado ρ_L será posible hallar cantidades de campos asociadas. La ecuación (15.26) se reduce en cualquier punto del alambre a una ecuación integral de la forma

$$V_o = \int_0^L \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon_o r} \tag{15.28}$$

Puesto que la ecuación (15.28) se aplica a puntos de observación en cualquier parte del alambre, en un punto fijo y_k llamado *punto de acoplamiento*

$$V_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^L \frac{\rho_L(y)\, dy}{|y_k - y|} \tag{15.29}$$

Recuérdese que la integración es en esencia la determinación del área que se encuentra debajo de una curva. Si Δy es reducida, la integración de $f(y)$ sobre $0 < y < L$ está dada por

$$\begin{aligned}\int_0^L f(y)\, dy &\simeq f(y_1)\,\Delta y + f(y_2)\,\Delta y + \cdots + f(y_N)\,\Delta y \\ &= \sum_{k=1}^{N} f(y_k)\,\Delta y\end{aligned} \tag{15.30}$$

donde el intervalo L se ha dividido en N unidades de longitud Δy. Dividiendo el alambre en N segmentos de igual longitud Δ como se muestra en la figura 15.19, la ecuación (15.29) se convierte en

$$4\pi\varepsilon_o V_o \simeq \frac{\rho_1\,\Delta}{|y_k - y_1|} + \frac{\rho_2\,\Delta}{|y_k - y_2|} + \cdots + \frac{\rho_N\,\Delta}{|y_k - y_N|} \tag{15.31}$$

donde $\Delta = L/N = \Delta y$. El supuesto de la ecuación (15.31) es que la densidad de carga desconocida ρ_k en el segmento de orden k es constante. Así, en la ecuación (15.31) se tienen

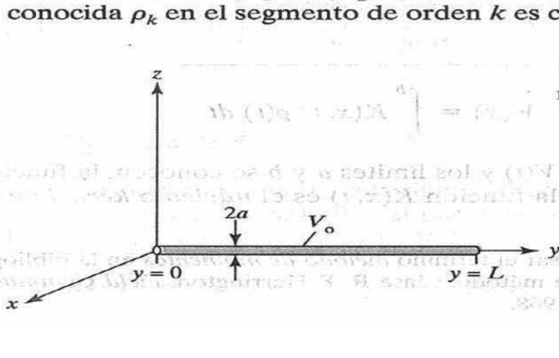


Figura 15.18. Alambre conductor delgado mantenido en un potencial constante.

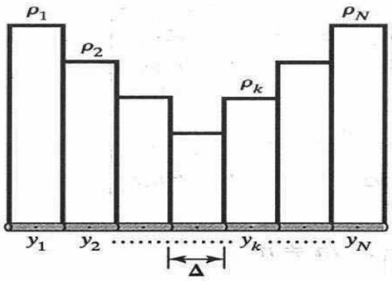


Figura 15.19. División del alambre en N segmentos.

constantes desconocidas $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$. En virtud de que la ecuación (15.31) debe sostenerse en todos los puntos del alambre, se obtienen N ecuaciones similares seleccionando N puntos de acoplamiento en $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots y_N$ en el alambre. Así se obtiene

$$4\pi\varepsilon_o V_o = \frac{\rho_1 \Delta}{|y_1 - y_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_1 - y_2|} + \cdots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_1 - y_N|} \qquad (15.32a)$$

$$4\pi\varepsilon_o V_o = \frac{\rho_1 \Delta}{|y_2 - y_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_2 - y_2|} + \cdots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_2 - y_N|} \qquad (15.32b)$$

$$\vdots$$

$$4\pi\varepsilon_o V_o = \frac{\rho_1 \Delta}{|y_N - y_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_N - y_2|} + \cdots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_N - y_N|} \qquad (15.32c)$$

La idea de acoplar el miembro izquierdo de la ecuación (15.29) con el derecho en los puntos de acoplamiento es semejante al concepto de obtención de momentos de la mecánica, lo que explica el nombre del método que se está exponiendo. Obsérvese en la figura 15.19 que los puntos de acoplamiento $y_1, y_2, \ldots, y_N$ se sitúan en el centro de cada segmento. La ecuación (15.32) puede expresarse en forma matricial como

$$[B] = [A][\rho] \qquad (15.33)$$

donde

$$[B] = 4\pi\varepsilon_o V_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (15.34)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{2N} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{NN} \end{bmatrix} \tag{15.35a}$$

$$A_{mn} = \frac{\Delta}{|y_m - y_n|}, \quad m \neq n \tag{15.35b}$$

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_N \end{bmatrix} \tag{15.36}$$

En la ecuación (15.33), $[\rho]$ es la matriz cuyos elementos se desconocen. Puede determinarse $[\rho]$ mediante la ecuación (15.33) aplicando la regla de Cramer, la inversión matricial o la técnica de eliminación gaussiana. Por inversión matricial,

$$\boxed{[\rho] = [A]^{-1}[B]} \tag{15.37}$$

donde $[A]^{-1}$ es la inversa de la matriz $[A]$. Se deben tomar precauciones al evaluar los elementos (o autotérminos) de la diagonal de la matriz $[A]$ de la ecuación (15.32) o (15.35). Puesto que el alambre es conductor, en su superficie es de suponer una densidad de carga superficial ρ_S. De ahí que en el centro de cada segmento,

$$V(\text{centro}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\rho_S a\, d\phi\, dy}{[a^2 + y^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{2\pi a\rho_S}{4\pi\varepsilon_o} \ln\left\{\frac{\Delta/2 + [(\Delta/2)^2 + a^2]^{1/2}}{-\Delta/2 + [(\Delta/2)^2 + a^2]^{1/2}}\right\}$$

Suponiendo $\Delta \gg a$,

$$V(\text{centro}) = \frac{2\pi a\rho_S}{4\pi\varepsilon_o} 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \tag{15.38}$$

$$= \frac{2\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{\Delta}{a}\right)$$

donde $\rho_L = 2\pi a\rho_S$. Así, los autotérminos ($m = n$) son

$$A_{nn} = 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \tag{15.39}$$

La ecuación (15.33) se convierte entonces en

$$\begin{bmatrix} 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) & \frac{\Delta}{|y_1 - y_2|} & \cdots & \frac{\Delta}{|y_1 - y_N|} \\ \frac{\Delta}{|y_2 - y_1|} & 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) & \cdots & \frac{\Delta}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\Delta}{|y_N - y_1|} & \frac{\Delta}{|y_N - y_2|} & \cdots & 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} = 4\pi\varepsilon_o V_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15.40}$$

Si se emplea la ecuación (15.37) con la (15.40) y se concede que $V_o = 1\ V$, $L = 1$ m, $a = 1$ mm y $N = 10$ ($\Delta = L/N$), puede elaborarse un programa de Matlab como el que se presenta en la figura 15.20, el cual se explica por sí solo. En él se invierte la matriz $[A]$ y se traza ρ_L contra y. El diagrama resultante se muestra en la figura 15.21. Este programa determina asimismo la carga total en el alambre mediante

$$Q = \int \rho_L\, dl \tag{15.41}$$

ecuación que puede expresarse en forma discreta como

$$Q = \sum_{k=1}^{N} \rho_k\, \Delta \tag{15.42}$$

Con los parámetros seleccionados, el valor de la carga total fue de $Q = 8.536$ pC. Si se desea, el campo eléctrico en cualquier punto puede calcularse mediante

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L\, dl}{4\pi\varepsilon_o R^2}\, \mathbf{a}_R \tag{15.43}$$

la cual puede expresarse como

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\rho_k\, \Delta\, \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_o R^3} \tag{15.44}$$

donde $R = |\mathbf{R}|$ y

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_k = (x - x_k)\mathbf{a}_x + (y - y_k)\mathbf{a}_y + (z - z_k)\mathbf{a}_z$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición del punto de observación y $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ el del punto fuente.

Para obtener la distribución de carga de la figura 15.21 se adoptó $N = 10$. Cabe suponer que un valor menor habría producido un resultado menos exacto, y un valor mayor un resultado más exacto. Sin embargo, un valor excesivo de N puede dar origen al problema de tener que calcular la inversión de la matriz cuadrada $[A]$. Así, la capacidad de los recursos de cálculo que se tengan al alcance limita la exactitud del experimento numérico.

```
%  THIS PROGRAM DETERMINES THE CHARGE DISTRIBUTION
%  ON A CONDUCTING THIN WIRE, OF RADIUS AA AND
%  LENGTH L, MAINTAINED AT VO VOLT
%  THE WIRE IS LOCATED AT 0 < Y < L
%  ALL DIMENSIONS ARE IN S.I. UNITS

%  MOMENT METHOD IS USED
%  N IS THE NO. OF SEGMENTS INTO WHICH THE WIRE IS DIVIDED
%  RHO IS THE LINE CHARGE DENSITY, RHO = INV(A)*B

% FIRST, SPECIFY PROBLEM PARAMETERS
ER = 1.0;
EO = 8.8541e-12;
VO = 1.0;
AA = 0.001;
L = 1.0;
N = 20;
DELTA = L/N;
%  SECOND, CALCULATE THE ELEMENTS OF THE COEFFICIENT
%  MATRIX A
I=1:N;
Y=DELTA*(I-0.5);
for i=1:N
   for j=1:N
      if(i ~=j)
         A(i,j)=DELTA/abs(Y(i)-Y(j));
      else
         A(i,j)=2.0*log(DELTA/AA);
      end
   end
end
%  NOW DETERMINE THE MATRIX OF CONSTANT VECTOR B
%  AND FIND Q
B = 4.0*pi*EO*ER*VO*ones(N,1);
C = inv(A);
RHO = C*B;
SUM = 0.0;
for I=1:N
   SUM = SUM + RHO(I);
end
Q=SUM*DELTA;
diary  a:exam145a.out
[EO,Q]
[ [1:N]' Y' RHO ]
diary off
%  FINALLY PLOT RHO AGAINST Y
plot(Y, RHO)
xlabel('y (cm)'), ylabel('rho_L (pC/m)')
```

Figura 15.20. Programa de Matlab para calcular la distribución de carga en el alambre de la figura 15.18.

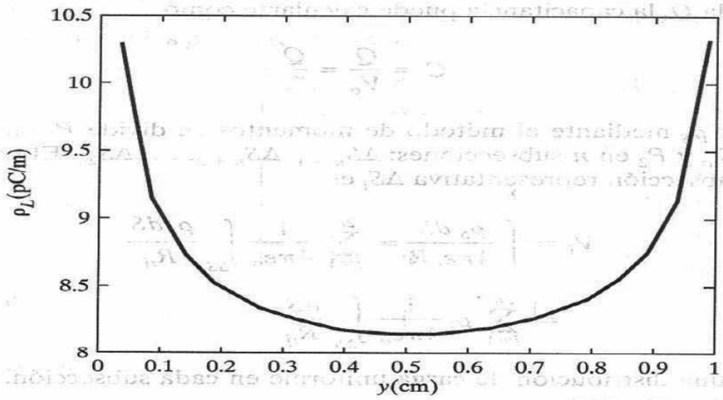


Figura 15.21. Diagrama de ρ_L contra y.

Ejemplo 15.5

Emplee el método de momentos para hallar la capacitancia del capacitor de placas paralelas que aparece en la figura 15.22. Adopte $a = 1$ m, $b = 1$ m, $d = 1$ m y $\varepsilon_r = 1.0$.

Solución:

Sea la diferencia de potencial entre las placas $V_o = 2$ V, de manera que la placa superior P_1 se mantiene en $+1$ V y la placa inferior P_2 en -1 V. Se desea determinar la densidad de carga superficial ρ_S en las placas con objeto de hallar la carga total en cada una como

$$Q = \int \rho_S \, dS$$

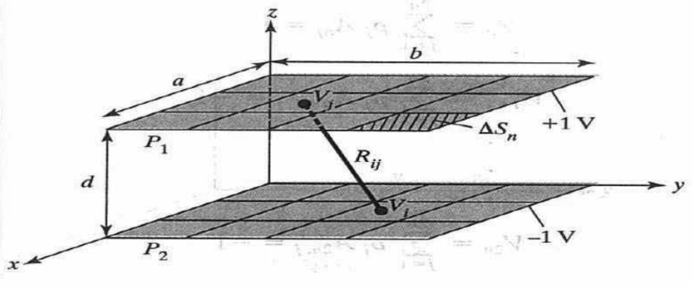


Figura 15.22. Capacitor de placas paralelas para el ejemplo 15.5.

Una vez conocida Q, la capacitancia puede calcularse como

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{Q}{2}$$

Para determinar ρ_S mediante el método de momentos, se divide P_1 en n subsecciones: $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$, y P_2 en n subsecciones: $\Delta S_{n+1}, \Delta S_{n+2}, \ldots, \Delta S_{2n}$. El potencial V_i en el centro de una subsección representativa ΔS_i es

$$V_i = \int_S \frac{\rho_S \, dS}{4\pi\varepsilon_o R} \simeq \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Delta S_i} \frac{\rho_j \, dS}{R_{ij}}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \rho_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Delta S_i} \frac{dS}{R_{ij}}$$

Se ha supuesto una distribución de carga uniforme en cada subsección. La última ecuación puede expresarse como

$$V_i = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{ij}$$

donde

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Delta S_i} \frac{dS}{R_{ij}}$$

En consecuencia,

$$V_1 = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{1j} = 1$$

$$V_2 = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{2j} = 1$$

$$\vdots$$

$$V_n = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{nj} = 1$$

$$V_{n+1} = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{n+1,j} = -1$$

$$\vdots$$

$$V_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{2n,j} = -1$$

lo cual produce un conjunto de $2n$ ecuaciones simultáneas con $2n$ densidades de carga desconocidas ρ_j. En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1,2n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{2,2n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ A_{2n,1} & A_{2n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

o

$$[A][\rho] = [B]$$

Por tanto,

$$[\rho] = [A]^{-1}[B]$$

donde $[B]$ es la matriz en columna que define los potenciales y $[A]$ la matriz cuadrada que contiene a los elementos A_{ij}. Para determinar A_{ij}, considérense las dos subsecciones i y j de la figura 15.23, las cuales podrían encontrarse en diferentes placas o en una misma.

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{y=y_1}^{y_2}\int_{x=x_1}^{x_2}\frac{dx\,dy}{R_{ij}}$$

donde

$$R_{ij} = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}$$

Si, simplificando, suponemos que las subsecciones son cuadradas,

$$x_2 - x_1 = \Delta\ell = y_2 - y_1$$

es posible demostrar que

$$A_{ij} = \frac{\Delta S_i}{4\pi\varepsilon_o R_{ij}} = \frac{(\Delta\ell)^2}{4\pi\varepsilon_o R_{ij}} \qquad i \neq j$$

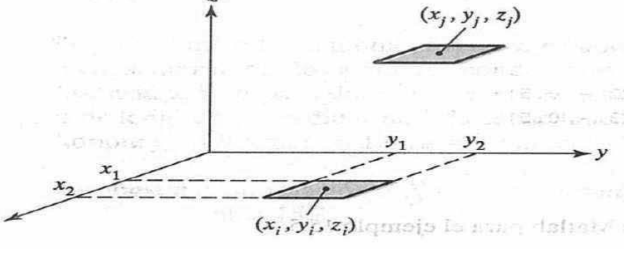


Figura 15.23. Subsecciones i y j para el ejemplo 15.5.

y

$$A_{ii} = \frac{\Delta \ell}{\pi \varepsilon_o} \ln(1 + \sqrt{2}) = \frac{\Delta \ell}{\pi \varepsilon_o} (0.8814)$$

El programa de Matlab incluido en la figura 15.24 se elaboró con estas fórmulas. Con $n = 9$, $C = 26.51$ pF; con $n = 16$, $C = 27.27$ pF, y con $n = 25$, $C = 27.74$ pF.

```
%    USING THE METHOD OF MOMENT,
%    THIS PROGRAM DETERMINES THE CAPACITANCE OF A
%    PARALLEL-PLATE CAPACITOR CONSISTING OF TWO CONDUCTING
%    PLATES, EACH OF DIMENSION AA x BB, SEPARATED BY A
%    DISTANCE D, AND MAINTAINED AT 1 VOLT AND -1 VOLT

%    ONE PLATE IS LOCATED ON THE Z=0 PLANE WHILE THE OTHER
%    IS LOCATED ON THE Z=D PLANE

%    ALL DIMENSIONS ARE IN S.I. UNITS
%    N IS THE NUMBER IS SUBSECTIONS INTO WHICH EACH PLATE IS
DIVIDED
%    FIRST, SPECIFY THE PARAMETERS

ER = 1.0;
EO = 8.8541e-12;
AA = 1.0;
BB = 1.0;
D = 1.0;
N = 9;
NT = 2*N;
M = sqrt(N);
DX = AA/M;
DY = BB/M;
DL = DX;
%    SECOND, CALCULATE THE ELEMENTS OF THE COEFFICIENT
%    MATRIX A
K = 0;
for K1=1:2
    for K2=1:M
        for K3=1:M
            K = K + 1;
            X(K) = DX*(K2 - 0.5);
            Y(k) = DY*(K3 - 0.5);
        end
    end
end
```

Figura 15.24. Programa de Matlab para el ejemplo 15.5.

```
for K1=1:N
    Z(K1) = 0.0;
    Z(K1+N) = D;
end
for I=1:NT
    for J=1:NT
        if(I==J)
            A(I,J) = DL*0.8814/(pi*EO);
        else
        R = sqrt( (X(I)-X(J))^2 = (Y(I)-Y(J))^2 + (Z(I)-Z(J))^2 );
            A(I,J) = DL^2/(4.*pi*EO*R);
        end
    end
end
% NOW DETERMINE THE MATRIX OF CONSTANT VECTOR B
for K=1:N
    B(K) = 1.0;
    B(K+N) = -1.0;
end
% INVERT A AND CALCULATE RHO CONSISTING
% THE UNKNOWN ELEMENTS
% ALSO CALCULATE THE TOTAL CHARGE Q AND CAPACITANCE C
F = inv(A);
RHO = F*B';
SUM = 0.0;
for I=1:N
    SUM = SUM + RHO(I);
end
Q = SUM*(DL^2);
VO = 2.0;
C = abs(Q)/VO;
diary a:exam145b.out
[C]
[ [1:INT]'  X  Y'  Z'  RHO]
diary off
```

Figura 15.24. *(Continuación.)*

Ejercicio 15.5

Emplee el método de momentos en la elaboración de un programa para determinar la capacitancia de dos alambres conductores paralelos idénticos, separados por una distancia y_o y desplazados por x_o, como se muestra en la figura 15.25. Si cada alambre es de longitud L y radio a, halle la capacitancia en los casos $x_o = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 1.0$ m. Adopte $y_o = 0.5$ m, $L = 1$ m, $a = 1$ mm, $\varepsilon_r = 1$.

Respuesta: Con relación a $N = 10$ = número de segmentos por alambre, véase la tabla 15.2.

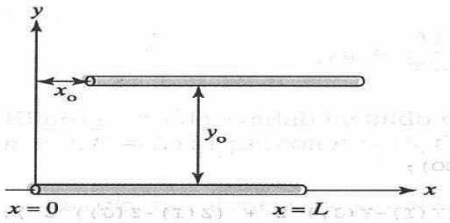


Figura 15.25. Alambres conductores paralelos para el ejercicio 15.5.

Tabla 15.2. Capacitancia para el ejercicio 15.5.

x_o (m)	C (pF)
0.0	4.91
0.2	4.891
0.4	4.853
0.6	4.789
0.8	4.71
1.0	4.643

5.5. Método del elemento finito

El método del elemento finito (MEF) tiene su origen en el campo del análisis estructural. No fue aplicado a problemas de electromagnetismo hasta 1968.[3] Como el de las diferencias finitas, el método del elemento finito es útil para resolver ecuaciones diferenciales. Tal como se señaló en la sección 15.3, el método de las diferencias finitas representa la región de solución con una red de puntos de cuadrícula, de modo que su aplicación se dificulta en problemas con fronteras de forma irregular. Estos problemas pueden manejarse más fácilmente con el método del elemento finito.

El análisis del elemento finito de un problema implica básicamente cuatro pasos: *a)* discretización de la región de solución en un número finito de subregiones o *elementos*, *b)* deducción de las ecuaciones que rigen a un elemento representativo, *c)* reunión de todos los elementos en la región de solución, *d)* resolución del sistema de ecuaciones obtenido.

A. Discretización de los elementos finitos

La región de solución se divide en cierto número de *elementos finitos*, como se ilustra en la figura 15.26, donde la región se ha subdividido en cuatro elementos no empalmados entre sí (dos de ellos triangulares y dos cuadriláteros) y siete nodos. Se busca entonces

[3] Véase P. P. Silvester y R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

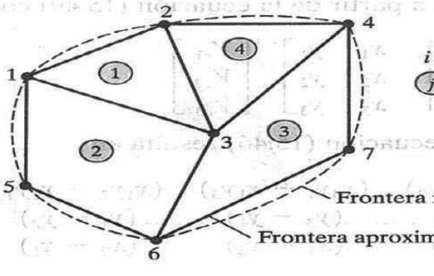


Figura 15.26. Subdivisión del elemento finito representativo de un dominio irregular.

una aproximación del potencial V_e dentro de un elemento e y después se interrelacionan las distribuciones de potencial en los diversos elementos de tal forma que el potencial sea continuo a uno y otro lados de la frontera entre los elementos. La solución aproximada de la región entera es

$$V(x, y) \simeq \sum_{e=1}^{N} V_e(x, y) \tag{15.45}$$

donde N es el número de elementos triangulares en los que se ha dividido la región de solución.

La forma más común de aproximación de V_e dentro de un elemento es la aproximación polinomial:

$$V_e(x, y) = a + bx + cy \tag{15.46}$$

en el caso de un elemento triangular y

$$V_e(x, y) = a + bx + cy + dxy \tag{15.47}$$

en el de un elemento cuadrilátero. El potencial V_e es en general de no cero dentro del elemento e, pero de cero fuera de e. Es difícil aproximar la frontera de la región de solución con elementos cuadriláteros, útiles en problemas con fronteras suficientemente regulares. En vista de ello, en el análisis de esta sección usaremos elementos triangulares. Nótese que nuestro supuesto de variación lineal del potencial dentro del elemento triangular, incluido en la ecuación (15.46), equivale a suponer que el campo eléctrico es uniforme dentro del elemento; es decir,

$$\mathbf{E}_e = -\nabla V_e = -(b\mathbf{a}_x + c\mathbf{a}_y) \tag{15.48}$$

B. Ecuaciones que rigen a los elementos

Considérese el elemento triangular representativo que aparece en la figura 15.27. El potencial V_{e1}, V_{e2} y V_{e3} en los nodos 1, 2 y 3, respectivamente, se obtiene mediante la ecuación (15.46); es decir,

$$\begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{15.49}$$

Los coeficientes a, b y c se determinan a partir de la ecuación (15.49) como

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \tag{15.50}$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación (15.46) resulta en

$$V_e = [1 \quad x \quad y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

o

$$\boxed{V_e = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x, y)\, V_{ei}} \tag{15.51}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \tag{15.52a}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \tag{15.52b}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \tag{15.52c}$$

y A es el área del elemento e; esto es,

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)$$

o

$$A = 1/2\,[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \tag{15.53}$$

El valor de A es positivo si los nodos se numeran en dirección opuesta a la de las manecillas del reloj (comenzando por cualquiera de ellos), como lo indica la flecha de la figura 15.27. Cabe hacer notar que de la ecuación (15.51) resulta el potencial en cualquier punto (x, y) dentro del elemento siempre que se conozca el potencial en los vértices. Esto contrasta con el análisis de diferencias finitas, en el que sólo se conoce el potencial en los puntos de la cuadrícula. Repárese asimismo en que α_i son funciones de interpolación lineal. Se les llama *funciones de forma del elemento* y poseen las propiedades siguientes:

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{15.54a}$$

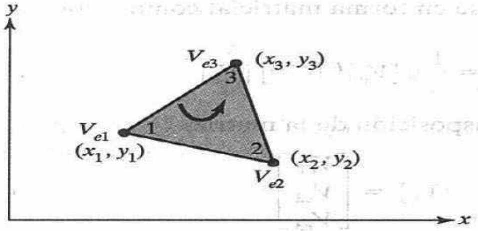


Figura 15.27. Elemento triangular representativo; la numeración local de nodos 1-2-3 debe seguir la dirección contraria a la de las manecillas del reloj, como lo indica la flecha.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x, y) = 1 \tag{15.54b}$$

En la figura 15.28 se ilustran, por ejemplo, las funciones de forma α_1 y α_2.

La energía por unidad de longitud asociada con el elemento e está dada por la ecuación (4.96); es decir,

$$W_e = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\mathbf{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \int \varepsilon | \nabla V_e|^2 \, dS \tag{15.55}$$

donde se ha supuesto una región de solución bidimensional sin carga ($\rho_S = 0$). De acuerdo con la ecuación (15.51), sin embargo,

$$\nabla V_e = \sum_{i=1}^{3} V_{ei} \, \nabla \alpha_i \tag{15.56}$$

La sustitución de la ecuación (15.56) en la ecuación (15.55) da como resultado

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon V_{ei} \left[\int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j \, dS \right] V_{ej} \tag{15.57}$$

Si el término entre corchetes se define como

$$C_{ij}^{(e)} = \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j \, dS \tag{15.58}$$

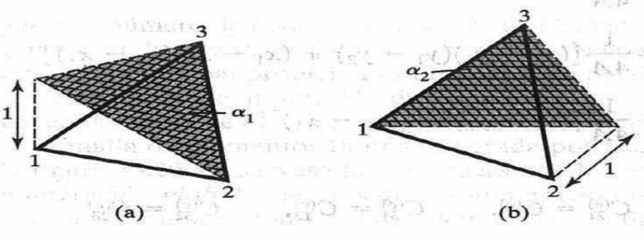


Figura 15.28. Funciones de forma α_1 y α_2 de un elemento triangular.

la ecuación (15.57) puede expresarse en forma matricial como

$$W_e = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,[V_e]^T\,[C^{(e)}]\,[V_e] \tag{15.59}$$

donde el exponente T denota la trasposición de la matriz,

$$[V_e] = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \tag{15.60a}$$

y

$$[C^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{15.60b}$$

La matriz $[C^{(e)}]$ es la *matriz de coeficientes de los elementos*. El elemento matricial $C^{(e)}{}_{ij}$ de la matriz de coeficientes puede considerarse como el acoplador entre los nodos i y j; su valor se obtiene de las ecuaciones (15.52) y (15.58). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} C_{12}^{(e)} &= \int \nabla\alpha_1 \cdot \nabla\alpha_2 \, dS \\ &= \frac{1}{4A^2}\left[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\right]\int dS \\ &= \frac{1}{4A}\left[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\right] \end{aligned} \tag{15.61a}$$

De igual manera,

$$C_{11}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2\right] \tag{15.61b}$$

$$C_{13}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)\right] \tag{15.61c}$$

$$C_{22}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2\right] \tag{15.61d}$$

$$C_{23}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)\right] \tag{15.61e}$$

$$C_{33}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2\right] \tag{15.61f}$$

Asimismo,

$$C_{21}^{(e)} = C_{12}^{(e)}, \qquad C_{31}^{(e)} = C_{13}^{(e)}, \qquad C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \tag{15.61g}$$

No obstante, nuestros cálculos se facilitarían si definimos

$$P_1 = (y_2 - y_3), \qquad P_2 = (y_3 - y_1), \qquad P_3 = (y_1 - y_2) \tag{15.62a}$$
$$Q_1 = (x_3 - x_2), \qquad Q_2 = (x_1 - x_3), \qquad Q_3 = (x_2 - x_1)$$

Dados P_i y Q_i ($i = 1, 2, 3$ son los números locales de nodos), cada término de la matriz de coeficientes de los elementos se determina de esta manera:

$$\boxed{C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A}[P_iP_j + Q_iQ_j]} \tag{15.62b}$$

donde

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(P_2Q_3 - P_3Q_2)} \tag{15.62c}$$

Nótese que $P_1 + P_2 + P_3 = 0 = Q_1 + Q_2 + Q_3$ y, por tanto, $\sum_{i=1}^{3} C_{ij}^{(e)} = 0 = \sum_{j=1}^{3} C_{ij}^{(e)}$. Esto puede servirnos para comprobar nuestros cálculos.

C. Reunión de todos los elementos

Habiendo considerado un elemento representativo, el paso siguiente es reunir todos los elementos en la región de solución. La energía asociada con la reunión de todos los elementos en la malla es

$$W = \sum_{e=1}^{N} W_e = \frac{1}{2}\varepsilon [V]^T[C][V] \tag{15.63}$$

donde

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} \tag{15.64}$$

y n es el número de nodos, N el número de elementos y $[C]$ la *matriz de coeficientes global* o *general*, en la que se conjuntan las matrices de coeficientes de los elementos particulares. Ahora el principal problema es obtener $[C]$ a partir de $[C^{(e)}]$.

El proceso de agrupación de las matrices de coeficientes de los elementos particulares en la matriz de coeficientes global se comprenderá mejor con un ejemplo. Considérese la malla de elementos finitos integrada por tres elementos finitos que se presenta en la figura 15.29. Obsérvese la numeración de los nodos. La numeración 1, 2, 3, 4 y 5 es la numeración *global*, mientras que la numeración *i-j-k* es la numeración *local*, correspondiente a la numeración 1-2-3 del elemento de la figura 15.27. Con referencia al elemento

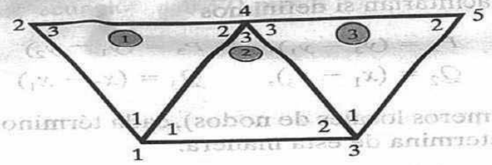


Figura 15.29. Reunión de tres elementos: *i-j-k* corresponde a la numeración local 1-2-3 del elemento de la figura 15.27.

3 de la figura 15.29, por ejemplo, la numeración global 3-5-4 corresponde a la numeración local 1-2-3 del elemento de la figura 15.27. Adviértase que la numeración local debe seguir una secuencia de dirección contraria a la de las manecillas del reloj a partir de cualquier nodo del elemento. En cuanto al elemento 3, por ejemplo, podría elegirse 4-3-5 o 5-4-3 en lugar de 3-5-4 en correspondencia con 1-2-3 del elemento de la figura 15.27. Así, la numeración de la figura 15.29 no es única, y cualquier numeración que se emplee derivará siempre en la misma $[C]$. Si se adopta la numeración de la figura 15.29, es de suponer que la matriz de coeficientes global será de la forma

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \qquad (15.65)$$

matriz de 5 × 5 puesto que están implicados cinco nodos ($n = 5$). También esta vez C_{ij} es el acoplador entre los nodos i y j. C_{ij} se obtiene con base en que la distribución de potencial debe ser continua a uno y otro lado de la frontera entre los elementos. La contribución a la posición i, j en $[C]$ procede de todos los elementos que contienen nodos i y j. Para hallar C_{11}, por ejemplo, se observa en la figura 15.29 que el nodo global 1 pertenece a los elementos 1 y 2 y es el nodo local 1 en ambos; por tanto,

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} \qquad (15.66a)$$

En cuanto a C_{22}, el nodo global 2 sólo pertenece al elemento 1 y es igual al nodo local 3; por tanto,

$$C_{22} = C_{33}^{(1)} \qquad (15.66b)$$

En cuanto a C_{44}, el nodo global 4 equivale a los nodos locales 2, 3 y 3 de los elementos 1, 2 y 3, respectivamente; así,

$$C_{44} = C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} \qquad (15.66c)$$

En cuanto a C_{14}, el vínculo global 14 equivale a los vínculos locales 12 y 13 de los elementos 1 y 2, respectivamente; en consecuencia,

$$C_{14} = C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} \qquad (15.66d)$$

Puesto que no hay acoplamiento (o vinculación directa) entre los nodos 2 y 3,

$$C_{23} = C_{32} = 0 \qquad (15.66e)$$

Siguiendo este procedimiento mediante la inspección de la figura 15.29, se obtienen todos los términos de la matriz de coeficientes global, en esta forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & C_{32}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & 0 & C_{22}^{(2)} + C_{11}^{(33)} & C_{23}^{(2)} + C_{13}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{32}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} & C_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{23}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{15.67}$$

Obsérvese que en nodos compartidos se empalman matrices de coeficientes y que la matriz de coeficientes global $[C]$ contiene 27 términos (nueve por cada elemento). Vale destacar asimismo las propiedades siguientes de la matriz $[C]$:

1. Es simétrica ($C_{ij} = C_{ji}$), al igual que la matriz de coeficientes de los elementos.
2. Puesto que $C_{ij} = 0$ si no existe acoplador entre los nodos i y j, es evidente que, con relación a gran número de elementos, $[C]$ se convierte en una matriz escasa en banda.
3. Es singular. Aunque esto no es del todo obvio, puede demostrarse mediante la matriz de coeficientes de los elementos de la ecuación (15.60*b*).

D. Resolución de las ecuaciones resultantes

Sabemos por el cálculo de variaciones que la ecuación de Laplace (o la de Poisson) se satisface cuando la energía total en la región de solución es mínima. Es preciso entonces que las derivadas parciales de W respecto de cada valor nodal del potencial sean de cero; es decir,

$$\frac{\partial W}{\partial V_1} = \frac{\partial W}{\partial V_2} = \cdots = \frac{\partial W}{\partial V_n} = 0$$

o

$$\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{15.68}$$

Para obtener $\partial W/\partial V_1 = 0$ en la malla de elementos finitos de la figura 15.29, por ejemplo, la ecuación (15.65) se sustituye en la ecuación (15.63) y se obtiene la derivada parcial de W respecto de V_1. Así se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial W}{\partial V_1} &= 2V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} \\ &\quad + V_2C_{21} + V_3C_{31} + V_4C_{41} + V_5C_{51} \end{aligned}$$

o

$$0 = V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} \tag{15.69}$$

En general, $\partial W/\partial V_k = 0$ conduce a

$$0 = \sum_{i=1}^{n} V_i C_{ik} \qquad (15.70)$$

donde n es el número de nodos en la malla. Al expresar la ecuación (15.70) para todos los nodos $k = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene un conjunto de ecuaciones simultáneas a partir de las cuales es posible hallar la solución de $[V]^T = [V_1, V_2, \ldots, V_n]$. Esto puede hacerse de dos maneras, similares a las empleadas para resolver ecuaciones de diferencias finitas obtenidas de la ecuación de Laplace (o de Poisson).

MÉTODO DE ITERACIÓN

Este método es semejante al que se utilizó en el MDF. Supongamos que el nodo 1 de la figura 15.29 es un nodo libre. El potencial en ese nodo puede obtenerse de la ecuación (15.69) como

$$V_1 = -\frac{1}{C_{11}} \sum_{i=2}^{5} V_i C_{1i} \qquad (15.71)$$

En general, el potencial en un nodo libre k se obtiene de la ecuación (15.70) como

$$\boxed{V_k = -\frac{1}{C_{kk}} \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} V_i C_{ik}} \qquad (15.72)$$

Esto se aplica iterativamente a todos los nodos libres de la malla de n nodos. Puesto que $C_{ki} = 0$ si el nodo k no está directamente conectado con el nodo i, sólo los nodos directamente vinculados con el nodo k contribuyen a V_k en la ecuación (15.72).

Así, si se conoce el potencial en los nodos vinculados con el nodo k, es posible determinar V_k mediante la ecuación (15.72). El proceso de iteración comienza asignando al potencial en los nodos libres un valor de cero o el valor del potencial promedio.

$$V_{\text{prom}} = 1/2\ (V_{\text{mín}} + V_{\text{máx}}) \qquad (15.73)$$

donde $V_{\text{mín}}$ y $V_{\text{máx}}$ son los valores mínimo y máximo del potencial prescrito en los nodos fijos. El potencial en los nodos libres se calcula mediante la ecuación (15.72) a partir de tales valores iniciales. Habiendo calculado el nuevo valor de todos los nodos libres al final de la primera iteración, ese valor se convierte en el valor inicial de la segunda iteración. El procedimiento se repite hasta que el cambio entre iteraciones subsecuentes se vuelve insignificante.

MÉTODO DE LA MATRIZ EN BANDA

Si se numeran primero todos los nodos libres y después los nodos fijos, la ecuación (15.63) puede expresarse como

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon [V_f \ \ V_p] \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \\ C_{pf} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} \qquad (15.74)$$

donde los subíndices f y p se refieren a nodos con potencial libre y fijo (o prescrito), respectivamente. Puesto que V_p es constante (consta de valores fijos conocidos), sólo se diferencia respecto de V_f, de modo que la aplicación de la ecuación (15.68) a la ecuación (15.74) produce

$$C_{ff}V_p + C_{fp}V_p = 0$$

o

$$[C_{ff}][V_f] = -[C_{fp}][V_p] \tag{15.75}$$

Esta ecuación puede expresarse como

$$[A][V] = [B] \tag{15.76a}$$

o

$$\boxed{[V] = [A]^{-1}[B]} \tag{15.76b}$$

donde $[V] = [V_f]$, $[A] = [C_{ff}]$ y $[B] = -[C_{fp}][V_p]$. Puesto que, en general, $[A]$ no es singular, el potencial en los nodos libres puede hallarse mediante la ecuación (15.75). $[V]$ puede despejarse en la ecuación (15.76a) con la técnica de eliminación gaussiana o en la ecuación (15.76b) mediante la inversión matricial si la matriz por invertir no es muy grande.

Nótese que de la ecuación (15.55) en adelante nuestra solución se ha restringido a un problema bidimensional que implica a la ecuación de Laplace, $\nabla^2 V = 0$. Sin embargo, los conceptos básicos desarrollados en esta sección pueden prolongarse al análisis de elementos finitos de problemas que impliquen la ecuación de Poisson ($\nabla^2 V = -\rho_v/\varepsilon$, $\nabla^2 A = -\mu \mathbf{J}$) o la ecuación de onda ($\nabla^2\phi - \gamma^2\phi = 0$). El análisis de elementos finitos entraña el uso de gran cantidad de memoria de una computadora para almacenar los elementos de la matriz, así como la dedicación de mucho tiempo a esa tarea. No obstante, se dispone ya de varios algoritmos que aligeran en cierta medida este inconveniente.

El MEF tiene varias ventajas sobre el MDF y el MM. Primero, es apto para regiones de solución complejas. Segundo, su generalidad permite elaborar un programa multiusos para la resolución de una extensa gama de problemas. Un solo programa puede servir para resolver distintos problemas (descritos por las mismas ecuaciones diferenciales parciales) con diferentes regiones de solución y condiciones en la frontera; así, lo único que varía son los datos de entrada. Sin embargo, el MEF no está libre de contratiempos. Es más difícil de comprender y programar que el MDF y el MM. Impone asimismo el a veces tedioso proceso de preparación de los datos de entrada.

Ejemplo 15.6 Considere la malla de dos elementos que aparece en la figura 15.30(a). Con base en el método del elemento finito, determine el potencial dentro de la malla.

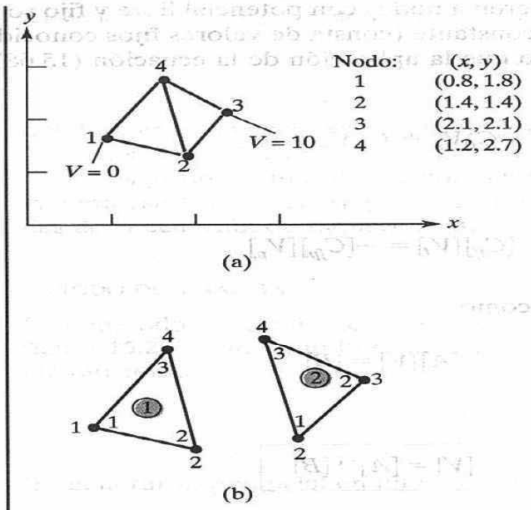


Figura 15.30. Para el ejemplo 15.6: **(a)** malla de dos elementos, **(b)** numeración local y global de los elementos.

Solución:

Las matrices de coeficientes de los elementos pueden calcularse mediante la ecuación (15.62). En cuanto al elemento 1, compuesto por nodos 1-2-4 correspondientes a la numeración local 1-2-3, como se indica en la figura 15.30*(b)*,

$$P_1 = -1.3, \qquad P_2 = 0.9, \qquad P_3 = 0.4$$

$$Q_1 = -0.2, \qquad Q_2 = -0.4, \qquad Q_3 = 0.6$$

$$A = 1/2\,(0.54 + 0.16) = 0.35$$

La sustitución de estos valores en la ecuación (15.62*b*) da como resultado

$$[C^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1.236 & -0.7786 & -0.4571 \\ -0.7786 & 0.6929 & 0.0857 \\ -0.4571 & 0.0857 & 0.3714 \end{bmatrix} \tag{15.6.1}$$

En cuanto al elemento 2, de igual manera, integrado por nodos 2-3-4 correspondientes a la numeración local 1-2-3, como se indica en la figura 15.30*(b)*,

$$P_1 = -0.6, \qquad P_2 = 1.3, \qquad P_3 = -0.7$$

$$Q_1 = -0.9, \qquad Q_2 = 0.2, \qquad Q_3 = 0.7$$

$$A = 1/2\,(0.91 + 0.14) = 0.525$$

Por tanto,

$$[C^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0.5571 & -0.4571 & -0.1 \\ -0.4571 & 0.8238 & -0.3667 \\ -0.1 & -0.3667 & 0.4667 \end{bmatrix} \tag{15.6.2}$$

La aplicación de la ecuación (15.75) resulta en

$$\begin{bmatrix} C_{22} & C_{24} \\ C_{42} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{21} & C_{23} \\ C_{41} & C_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{15.6.3}$$

Esto puede expresarse en forma más conveniente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C_{24} & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_{21} & -C_{23} \\ 0 & 1 \\ -C_{41} & -C_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{15.6.4a}$$

o

$$[C][V] = [B] \tag{15.6.4b}$$

Los términos de la matriz de coeficientes global se obtienen de la manera siguiente:

$$C_{22} = C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} = 0.6929 + 0.5571 = 1.25$$

$$C_{42} = C_{24} = C_{23}^{(1)} + C_{13}^{(2)} = 0.0857 - 0.1 = -0.0143$$

$$C_{44} = C_{33}^{(1)} + C_{33}^{(2)} = 0.3714 + 0.4667 = 0.8381$$

$$C_{21} = C_{21}^{(1)} = -0.7786$$

$$C_{23} = C_{12}^{(2)} = -0.4571$$

$$C_{41} = C_{31}^{(1)} = -0.4571$$

$$C_{43} = C_{32}^{(2)} = -0.3667$$

Nótese que en la matriz de coeficientes de los elementos seguimos la numeración local, y en la matriz de coeficientes global la numeración global. Así, la matriz cuadrada $[C]$ se obtiene como

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & -0.0143 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0143 & 0 & 0.8381 \end{bmatrix} \tag{15.6.5}$$

y la matriz $[B]$ del miembro derecho de la ecuación (15.6.4*a*) como

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.571 \\ 10.0 \\ 3.667 \end{bmatrix} \tag{15.6.6}$$

La inversión de la matriz $[C]$ de la ecuación (15.6.5) produce

$$[V] = [C]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.708 \\ 10.0 \\ 4.438 \end{bmatrix}$$

Así, $V_1 = 0$, $V_2 = 3.708$, $V_3 = 10$ y $V_4 = 4.438$. Una vez conocidos los valores del potencial en los nodos, mediante la ecuación (15.51) puede determinarse el potencial en cualquier punto dentro de la malla.

Ejercicio 15.6

Calcule la matriz de coeficientes global de la malla de dos elementos que aparece en la figura 15.31 cuando: *a)* el nodo 1 está vinculado con el nodo 3 y la numeración local $(i - j - k)$ es como se indica en la figura 15.31*(a)*, *b)* el nodo 2 está vinculado con el nodo 4 con numeración local como se indica en la figura 15.31*(b)*.

Respuestas: *a)*
$$\begin{bmatrix} 0.9964 & 0.05 & -0.2464 & -0.8 \\ 0.05 & 0.7 & -0.75 & 0.0 \\ -0.2464 & -0.75 & 1.5964 & -0.6 \\ -0.8 & 0.0 & -0.6 & 1.4 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1.333 & -0.7777 & 0.0 & -1.056 \\ -0.0777 & 0.8192 & -0.98 & 0.2386 \\ 0.0 & -0.98 & 2.04 & -0.06 \\ -1.056 & 0.2386 & -1.06 & 1.877 \end{bmatrix}$$

Nodo 1: (2, 1) Nodo 3: (2, 2.4)
Nodo 2: (3, 2.5) Nodo 4: (1.5, 1.6)

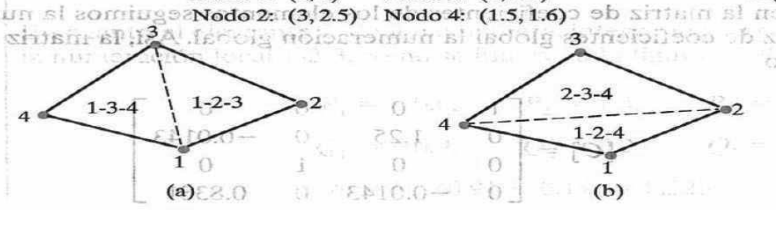


Figura 15.31. Para el ejercicio 15.6.

Ejemplo 15.7

Escriba un programa para resolver la ecuación de Laplace mediante el método del elemento finito. Aplique el programa al problema bidimensional que se presenta en la figura 15.32*(a)*.

Solución:

La región de solución se divide en 25 elementos triangulares de tres nodos, de lo que resulta un número total de 21 nodos, como se indica en la figura 15.32*(b)*. Éste es un paso necesario para disponer de datos de entrada que definan la geometría del problema. Con fundamento en lo expuesto en la sección 15.5, en la figura 15.33 se presenta un programa general de Matlab para la resolución de problemas que impliquen la ecuación de Laplace

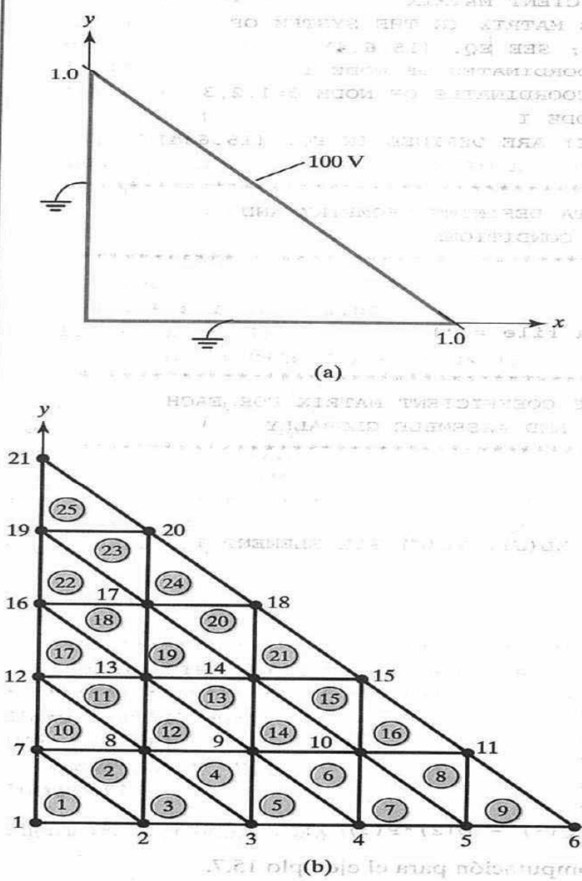


Figura 15.32. Para el ejemplo 15.7: **(a)** problema electrostático bidimensional, **(b)** región de solución dividida en 25 elementos triangulares.

```
% FINITE ELEMENT SOLUTION OF LAPLACE'S EQUATION FOR
% TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS
% TRIANGULAR ELEMENTS ARE USED
% ND = NO. OF NODES
% NE = NO. OF ELEMENTS
% NP = NO. OF FIXED NODES (WHERE POTENTIAL IS PRESCRIBED)
% NDP(I) = NODE NO. OF PRESCRIBED POTENTIAL, I=1,2, ..., NP
% VAL(I) = VALUE OF PRESCRIBED POTENTIAL AT NODE NDP(I)
% NL(I,J) = LIST OF NODES FOR EACH ELEMENT I, WERE
%          J=1,2,3 REFERS TO THE LOCAL NODE NUMBER
% CE(I,J) = ELEMENT COEFFICIENT MATRIX
% C(I,J) = GLOBAL COEFFICIENT MATRIX
% B(I) = RIGHT-HAND SIDE MATRIX IN THE SYSTEM OF
% SIMULTANEOUS EQUATIONS; SEE EQ. (15.6.4)
% X(I), Y(I) = GLOBAL COORDINATES OF NODE I
% XL(J), YL(J) = LOCAL COORDINATES OF NODE J=1,2,3
% V(I) = POTENTIAL AT NODE I
% MATRICES P(I) AND Q (I) ARE DEFINED IN EQ. (15.62a)

% *****************************************************
% FIRST STEP - INPUT DATA DEFINING GEOMETRY AND
%              BOUNDARY CONDITIONS
% *****************************************************

clear
input('Name of input data file = ')

% *******************************************************
% SECOND STEP - EVALUATE COEFFICIENT MATRIX FOR EACH
%               ELEMENT AND ASSEMBLE GLOBALLY
% *******************************************************
B = zeros(ND,1);
C = zeros(ND,ND);
for I=1:NE
% FIND LOCAL COORDINATES XL(J), YL(J) FOR ELEMENT I
   K = NL(I,[1:3]);
   XL = X(K);
   YL = Y(K);
P=zeros(3,1);
Q=zeros(3,1);
   P(1) = YL(2) - YL(3);
   P(2) = YL(3) - YL(1);
   P(3) = YL(1) - YL(2);
   Q(1) = XL(3) - XL(2);
   Q(2) = XL(1) - XL(3);
   Q(3) = XL(2) - XL(1);
   AREA = 0.5*abs( P(2)*Q(3) - Q(2)*P(3) );
```

Figura 15.33. Programa de computación para el ejemplo 15.7.

```
%  DETERMINE COEFFICIENT MATRIX FOR ELEMENT I
   CE=(P*P' + Q*Q')/(4.0*AREA);
%  ASSEMBLE GLOBALLY - FIND C(I,J) AND B(I)
   for J=1:3
      IR = NL(I,J);
      IFLAG1=0;
%  CHECK IF ROW CORRESPONDS TO A FIXED NODE
   for K = 1:NP
      if (IR == NDP(K))
         C(IR,IR) = 1.0;
         B(IR) = VAL(K);
         IFLAG1=1;
      end
   end % end for K = 1:NP
   if(IFLAG1 == 0)
   for L = 1:3
     IC = NL(I,L);
     IFLAG2=0;
%  CHECK IF COLUMN CORRESPONDS TO A FIXED NODE
     for K=1:NP
        if ( IC == NDP(K) ),
         B(IR) = B(IR) - CE(J,L)*VAL(K);
         IFLAG2=1;
       end
     end % end for K=1:NP
   if(IFLAG2 == 0)
     C(IR,IC) = C(IR,IC) + CE(J,L);
     end
   end  % end for L=1:3
 end   %end if(iflag1 == 0)
end  % end for J=1:3
end % end for I=1:NE
% ***********************************************************
%   THIRD STEP - SOLVE THE SYSTEM OF EQUATIONS
% ***********************************************************

V = INV (C)*B;
V=V';
% ***********************************************************
%   FOURTH STEP - OUTPUT THE RESULTS
% ***********************************************************
diary exam147.out
[ND, NE, NP]
[ [1:ND]' X' Y' V']
diary off
```

Figura 15.33. (*Continuación.*)

con elementos triangulares de tres nodos. La elaboración de este programa implicó básicamente los cuatro pasos indicados en la figura, los que se detallan a continuación.

Paso 1. Se introducen los datos que definen el problema. Éste es el único paso que depende de la geometría del problema. Mediante un archivo de datos, se introduce el número de elementos, el número de nodos, el número de nodos fijos, los valores prescritos del potencial en los nodos fijos, las coordenadas x y y de todos los nodos y una lista de identificación de los nodos pertenecientes a cada elemento en el orden de la numeración local 1-2-3. En el caso del problema de la figura 15.32, en las tablas 15.3, 15.4 y 15.5 se presentan los tres conjuntos de datos de coordenadas, relación elementos-nodos y potencial prescrito en los nodos fijos, respectivamente.

Tabla 15.3. Coordenadas nodales de la malla de elementos finitos de la figura 15.32.

Nodo	*x*	*y*	*Nodo*	*x*	*y*
1	0.0	0.0	12	0.0	0.4
2	0.2	0.0	13	0.2	0.4
3	0.4	0.0	14	0.4	0.4
4	0.6	0.0	15	0.6	0.4
5	0.8	0.0	16	0.0	0.6
6	1.0	0.0	17	0.2	0.6
7	0.0	0.2	18	0.4	0.6
8	0.2	0.2	19	0.0	0.8
9	0.4	0.2	20	0.2	0.8
10	0.6	0.2	21	0.0	1.0
11	0.8	0.2			

Tabla 15.4. Identificación elementos-nodos.

	Nodo local núm.				*Nodo local núm.*		
Elemento núm.	*1*	*2*	*3*	*Elemento núm.*	*1*	*2*	*3*
1	1	2	7	14	9	10	14
2	2	8	7	15	10	15	14
3	2	3	8	16	10	11	15
4	3	9	8	17	12	13	16
5	3	4	9	18	13	17	16
6	4	10	9	19	13	14	17
7	4	5	10	20	14	18	17
8	5	11	10	21	14	15	18
9	5	6	11	22	16	17	19
10	7	8	12	23	17	20	19
11	8	13	12	24	17	18	20
12	8	9	13	25	19	20	21
13	9	14	13				

Tabla 15.5. Potencial prescrito en nodos fijos.

Nodo núm.	*Potencial prescrito*	*Nodo núm.*	*Potencial prescrito*
1	0.0	18	100.0
2	0.0	20	100.0
3	0.0	21	50.0
4	0.0	19	0.0
5	0.0	16	0.0
6	50.0	12	0.0
11	100.0	7	0.0
15	100.0		

Tabla 15.6. Datos de entrada para el programa de elementos finitos de la figura 15.33.

```
NE = 25;
ND = 21;
NP = 15;
NL = [ 1 2 7
  2 8 7
  2 3 8
      3 9 8
      3 4 9
      4 10 9
      4 5 10
      5 11 10
      5 6 11
      7 8 12
    8 13 12
      8 9 13
      9 14 13
      9 10 14
      10 15 14
      10 11 15
      12 13 16
      13 17 16
      13 14 17
      14 18 17
      14 15 18
      16 17 19
      17 20 19
      17 18 20
      19 20 21];
X = [0.0   0.2   0.4   0.6   0.8   1.0   0.0 ...
     0.2   0.4   0.6   0.8   0.0   0.2   0.4 ...
     0.6   0.0   0.2   0.4   0.0   0.2   0.0];
Y = [0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.2 ...
     0.2   0.2   0.2   0.2   0.4   0.4   0.4 ...
     0.4   0.6   0.6   0.6   0.8   0.8   1.0];
NDP = [ 1  2  3  4  5  6  11  15  18  20  21  19  16  12  7];
VAL = [ 0.0   0.0   0.0   0.0  0.0 ...
      50.0  100.0  100.0  100.0  100.0
      50.0  0.0   0.0   0.0   0.0];
```

Paso 2. Este paso entraña la determinación de la matriz de coeficientes de los elementos $[C^{(e)}]$ de cada elemento y de la matriz de coeficientes global $[C]$. Se aplica el procedimiento que se explicó en el ejemplo anterior. La ecuación (15.6.4) puede expresarse en forma general como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_P \\ V_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -C_{fp} \end{bmatrix} [V_p]$$

o

$$[C][V] = [B]$$

En esta etapa se calculan tanto la matriz "global" $[C]$ como la matriz $[B]$.

Paso 3. Se invierte la matriz global obtenida en el paso anterior. Los valores del potencial en todos los nodos se obtienen mediante multiplicación de matrices, como se indica en la ecuación (15.76*b*). En lugar de invertir la matriz global es posible despejar el potencial en los nodos con la técnica de eliminación gaussiana.

Paso 4. Se extrae el resultado de los cálculos.

Los datos de entrada y salida se presentan en las tablas 15.6 y 15.7, respectivamente.

Tabla 15.7. Datos de salida del programa de la figura 15.33.

Nodo	*x*	*y*	*Potencial*
1	0.00	0.00	0.000
2	0.20	0.00	0.000
3	0.40	0.00	0.000
4	0.60	0.00	0.000
5	0.80	0.00	0.000
6	1.00	0.00	50.000
7	0.00	0.20	0.000
8	0.20	0.20	18.182
9	0.40	0.20	36.364
10	0.60	0.20	59.091
11	0.80	0.20	100.000
12	0.00	0.40	0.000
13	0.20	0.40	36.364
14	0.40	0.40	68.182
15	0.60	0.40	100.000
16	0.00	0.60	0.000
17	0.20	0.60	59.091
18	0.40	0.60	100.000
19	0.00	0.80	0.000
20	0.20	0.80	100.000
21	0.00	1.00	50.000

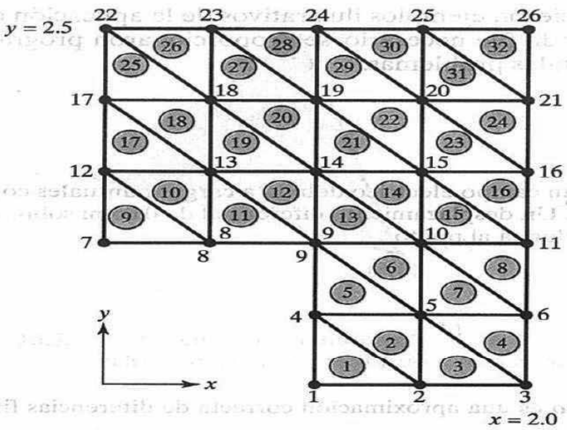


Figura 15.34. Para el ejercicio 15.7.

Ejercicio 15.7

Repita el ejemplo 15.3 aplicando el método del elemento finito. Divida la región de solución en elementos triangulares, como se muestra en la figura 15.34. Compare la solución con la obtenida en el ejemplo 15.3 mediante el método de las diferencias finitas.

Respuesta: Véase el ejemplo 15.3.

Resumen

1. Líneas de campos eléctricos y líneas equipotenciales debidas a fuentes de puntos coplanares pueden trazarse siguiendo la técnica numérica que se presentó en este capítulo. El concepto básico puede prolongarse al trazado de líneas de campo magnético.
2. Un problema electromagnético en forma de ecuación diferencial parcial puede resolverse mediante el método de las diferencias finitas. La ecuación de diferencias finitas que aproxima la ecuación diferencial se aplica en puntos de cuadrícula espaciados de modo ordenado sobre la región de solución entera. La cantidad de campos en los puntos libres se determina empleando el método más apropiado.
3. Un problema electromagnético en forma de ecuación integral se resuelve fácilmente mediante el método de momentos. La cantidad desconocida dentro del signo de integral se determina igualando ambos miembros de la ecuación integral en un número finito de puntos en el dominio de la cantidad.
4. Mientras que el método de las diferencias finitas se restringe a problemas con regiones de solución de forma regular, el método del elemento finito es apto para problemas de geometría compleja. Este método implica dividir la región de solución en elementos finitos, deducir las ecuaciones para un elemento representativo, reunir todos los elementos en la región y resolver el sistema de ecuaciones resultante.

En este capítulo se expusieron ejemplos ilustrativos de la aplicación de cada método a problemas prácticos y, cuando fue necesario, se proporcionaron programas de computación para la resolución de tales problemas.

Preguntas de repaso

15.1. En el punto $(1, 2, 0)$ de un campo eléctrico debido a cargas puntuales coplanares, se tiene $\mathbf{E} = 0.3\ \mathbf{a}_x - 0.4\ \mathbf{a}_y$ V/m. Un desplazamiento diferencial de 0.05 m sobre una línea equipotencial en ese punto conducirá al punto

a) $(1.04, 2.03, 0)$
b) $(0.96, 1.97, 0)$
c) $(1.04, 1.97, 0)$
d) $(0.96, 2.03, 0)$

15.2. ¿Cuál de las siguientes *no* es una aproximación correcta de diferencias finitas de dV/dx en x_o si $h = \Delta x$?

a) $\dfrac{V(x_o + h) - V(x_o)}{h}$

b) $\dfrac{V(x_o) - V(x_o - h)}{h}$

c) $\dfrac{V(x_o + h) - V(x_o - h)}{h}$

d) $\dfrac{V(x_o + h) - V(x_o - h)}{2h}$

e) $\dfrac{V(x_o + h/2) - V(x_o - h/2)}{h}$

15.3. El elemento triangular que aparece en la figura 15.35 se encuentra en el vacío. El valor aproximado del potencial en el centro del triángulo es

a) 10 V
b) 7.5 V
c) 5 V
d) 0 V

15.4. Para efectos de análisis de diferencias finitas, una placa rectangular de 10 por 20 cm se divide en ocho subregiones mediante líneas paralelas a los extremos de la placa separadas 5 cm entre sí. ¿Cuántos nodos libres hay si los extremos están conectados a alguna fuente?

a) 15
b) 12
c) 9
d) 6
e) 3

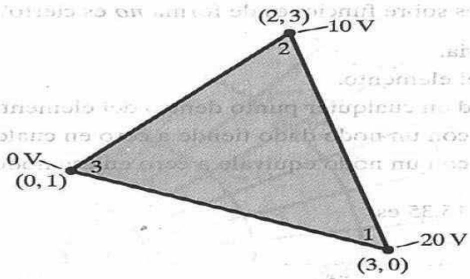


Figura 15.35. Para las preguntas de repaso 15.3 y 15.10.

15.5. En la ecuación de diferencias $V_n = V_{n-1} + V_{n+1}$ con $V_o = V_5 = 1$ y comenzando con los valores iniciales $V_n = 0$ para $1 \leq n \leq 4$, el valor de V_2 después de la tercera iteración es

a) 1
b) 3
c) 9
d) 15
e) 25

15.6. La matriz de coeficientes $[A]$ obtenida en el método de momentos *no* posee una de estas propiedades:

a) Es densa (es decir, contiene muchos términos diferentes de cero).
b) Está en banda.
c) Es cuadrada y simétrica.
d) Depende de la geometría del problema dado.

15.7. Una divergencia importante entre los métodos de las diferencias finitas y del elemento finito es que

a) La solución en uno de ellos resulta en una matriz escasa.
b) La solución en uno de ellos es conocida en todos los puntos del dominio.
c) Uno de ellos se aplica a la resolución de ecuaciones diferenciales parciales.
d) Uno de ellos se limita a problemas sin variación en el tiempo.

15.8. Si la placa de la pregunta de repaso 15.4 se discretiza para el análisis del elemento finito de manera que se tenga el mismo número de puntos de cuadrícula, ¿cuántos elementos triangulares resultan?

a) 32
b) 16
c) 12
d) 9

15.9. ¿Cuál de los enunciados siguientes sobre funciones de forma *no* es cierto?

a) Son de naturaleza interpolatoria.
b) Deben ser continuas en todo el elemento.
c) Su suma es idéntica a la unidad en cualquier punto dentro del elemento.
d) La función de forma asociada con un nodo dado tiende a cero en cualquier otro nodo.
e) La función de forma asociada con un nodo equivale a cero en ese nodo.

15.10. El área del elemento de la figura 15.35 es

a) 14
b) 8
c) 7
d) 4

Respuestas: 15.1*a*, 15.2*c*,[4] 15.3*a*, 15.4*e*, 15.5*c*, 15.6*b*, 15.7*a*, 15.8*b*, 15.9*e*, 15.10*d*.

Problemas

15.1. Con base ya sea en el programa descrito en el ejemplo 15.1 o en un código equivalente elaborado por usted, trace las líneas de campo eléctrico y líneas equipotenciales de los casos siguientes:

a) Tres cargas puntuales de -1, 2 y 1 C ubicadas en $(-1, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 0)$, respectivamente.
b) Cinco cargas puntuales idénticas de 1 C situadas en $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ y $(0, 0)$, respectivamente.

15.2. Dada la ecuación diferencial unidimensional

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

sujeta a $y(0) = 0$, $y(1) = 10$, use el método (iterativo) de las diferencias finitas para hallar $y(0.25)$. Adopte $\Delta = 0.25$ y realice cinco iteraciones.

15.3. *a)* Obtenga de la siguiente tabla $\frac{dV}{dx}$ y $\frac{d^2V}{dx^2}$ en $x = 0.15$.

x	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
V	1.0017	1.5056	2.0134	2.5261	3.0452

b) Los datos de la tabla anterior se han obtenido de $V = 10$ senh x. Compare el resultado que obtuvo en el inciso *a)* con los valores exactos.

[4] La fórmula del inciso *a)* es una fórmula de diferencias hacia delante, la del inciso *b)* una fórmula de diferencias hacia atrás y las de los incisos *d)* y *e)* fórmulas de diferencias centrales.

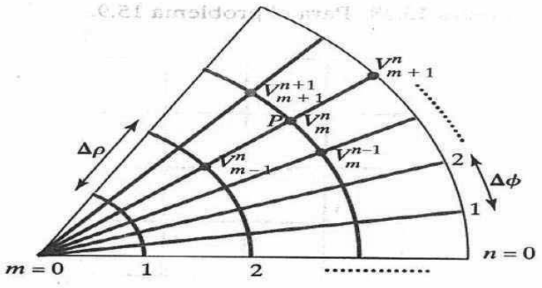


Figura 15.36. Cuadrícula de diferencias finitas en coordenadas cilíndricas; para el problema 15.5.

15.4. Demuestre que la ecuación de diferencias finitas para la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, $V = V(\rho, z)$, es

$$V(\rho_o, z_o) = \frac{1}{4}\left[V(\rho_o, z_o + h) + V(\rho_o, z_o - h) + \left(1 + \frac{h}{2\rho_o}\right) V(\rho_o + h, z_o) + \left(1 - \frac{h}{2\rho_o}\right) V(\rho_o - h, z_o)\right]$$

donde $h = \Delta z = \Delta \rho$.

15.5. Con base en la representación de diferencias finitas en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ) en un punto de cuadrícula P que se muestra en la figura 15.36 y concediendo que $\rho = m\,\Delta\rho$ y $\phi = n\,\Delta\phi$ de manera que $V(\rho, \phi)|_P = V(m\Delta\rho, n\Delta\phi) = V^n_m$, demuestre que

$$\nabla^2 V|_{m,n} = \frac{1}{\Delta\rho^2}\left[\left(1 - \frac{1}{2m}\right) V^n_{m-1} - 2V^n_m + \left(1 + \frac{1}{2m}\right) V^n_{m+1} + \frac{1}{(m\,\Delta\phi)^2}\left(V^{n-1}_m - 2\,V^n_m + V^{n+1}_m\right)\right]$$

15.6. El potencial de los cuatro lados de un tanque conductor cuadrado se mantiene en –10, 0, 30 y 60 V. Determine el potencial en el centro del tanque.

15.7. Siga el MDF para calcular el potencial en los nodos 1 y 2 del sistema de potencial que aparece en el figura 15.37.

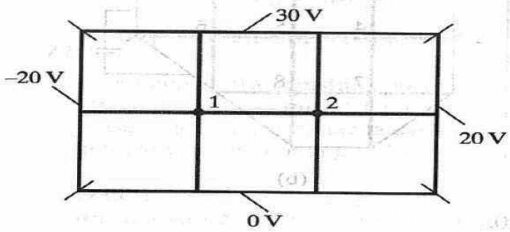


Figura 15.37. Para el problema 15.7.

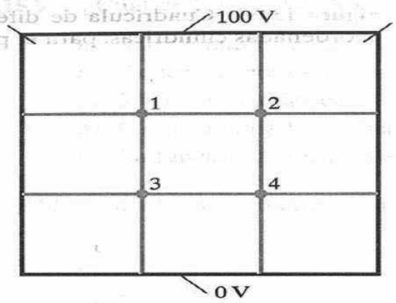


Figura 15.38. Para el problema 15.9.

15.8. Repita el problema 15.7 si $\rho s = \dfrac{100}{\pi}$ nC/m², $h = 0.1$ m y $\varepsilon = \varepsilon_o$, donde h es el tamaño de la malla.

15.9. Considere el sistema de potencial que se presenta en la figura 15.38. *a)* Asigne a los nodos libres un valor de cero y calcule el potencial en ellos en cinco iteraciones. *b)* Resuelva este mismo problema con el método de la matriz en banda y compare el nuevo resultado con el que obtuvo en el inciso *a)*.

15.10. Aplique la técnica de matriz en banda para establecer un sistema de ecuaciones simultáneas de diferencias para cada uno de los problemas representados en la figura 15.39. Obtenga las matrices $[A]$ y $[B]$.

15.11. *a)* ¿Qué modificaciones haría a las matrices $[A]$ y $[B]$ del ejemplo 15.3 si la región de solución tuviera una densidad de carga ρ_S?

b) Escriba un programa para despejar el potencial en los puntos de cuadrícula que se ilustran en la figura 15.40 suponiendo una densidad de carga $\rho_S = x(y-1)$ nC/m². Use el método iterativo de las diferencias finitas y adopte $\varepsilon_r = 1.0$.

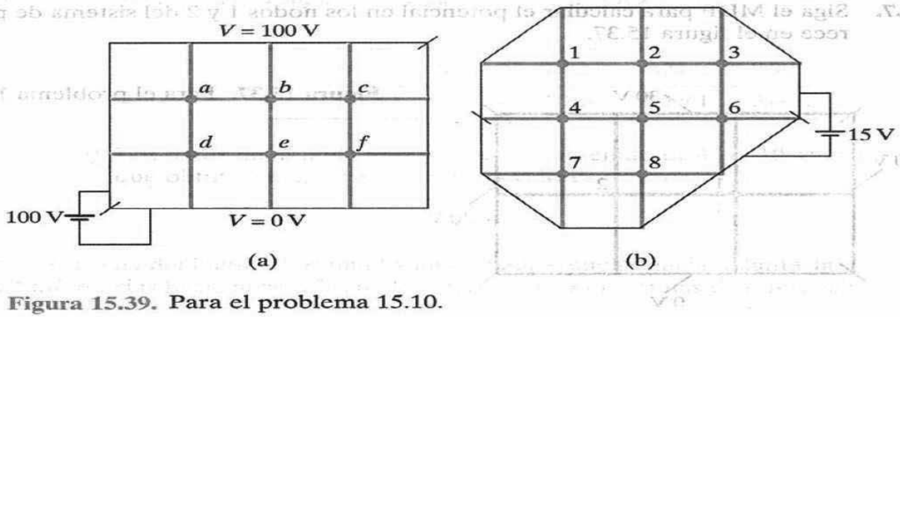


Figura 15.39. Para el problema 15.10.

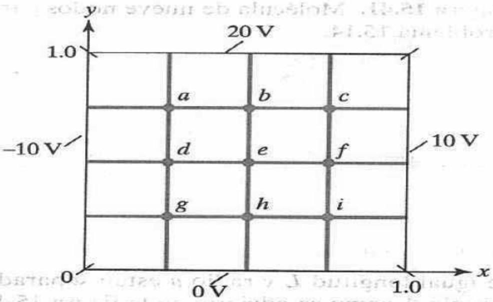


Figura 15.40. Para el problema 15.11.

15.12. La ecuación de onda bidimensional está dada por

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Concediendo que $\Phi^j_{m,n}$ denota la aproximación de diferencias finitas de $\Phi(x_m, z_n, t_j)$, demuestre que el sistema de diferencias finitas para la ecuación de onda es

$$\Phi^{j+1}_{m,n} = 2\Phi^j_{m,n} - \Phi^{j-1}_{m,n} + \alpha\,(\Phi^j_{m+1,n} + \Phi^j_{m-1,n} - 2\,\Phi^j_{m,n}) + \alpha\,(\Phi^j_{m,n+1} + \Phi^j_{m,n-1} - 2\,\Phi^j_{m,n})$$

donde $h = \Delta x = \Delta z$ y $\alpha = (c\Delta t/h)^2$.

15.13. Escriba un programa en el que se emplee el sistema de diferencias finitas para resolver la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t > 0$$

dadas las condiciones en la frontera $V(0, t) = 0$, $V(1, t) = 0$, $t > 0$ y la condición inicial $\partial V/\partial t\ (x, 0) = 0$, $V(x, 0) = \text{sen}\ \pi x$, $0 < x < 1$. Adopte $\Delta x = \Delta t = 0.1$. Compare su solución con la solución exacta $V(x, t) = \text{sen}\ \pi x \cos \pi t$ respecto de $0 < t < 4$.

15.14. *a)* Demuestre que la representación de diferencias finitas de la ecuación de Laplace con base en la molécula de nueve nodos de la figura 15.41 es

$$V_o = 1/8\,(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8)$$

b) Repita el ejemplo 15.4 utilizando este sistema.

15.15. Una línea de transmisión consta de dos alambres idénticos de radio a separados por una distancia d, como se muestra en la figura 15.42. Mantenga un alambre en 1 V y el otro en −1 V y use el MM para hallar la capacitancia por unidad de longitud. Compare su resultado con la fórmula exacta para C referida en la tabla 11.1. Adopte $a = 5$ mm, $d =$ cm, $\ell = 5$ m y $\epsilon = \epsilon_o$.

15.16. Determine el potencial y campo eléctrico en el punto (−1, 4, 5) debido al alambre conductor delgado de la figura 15.19. Adopte $V_o = 1$ V, $L = 1$ m, $a = 1$ mm.

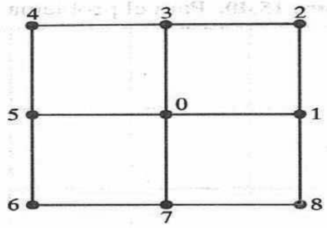


Figura 15.41. Molécula de nueve nodos para el problema 15.14.

15.17. Dos alambres conductores de igual longitud L y radio a están separados por un espacio reducido e inclinados en un ángulo θ, como se advierte en la figura 15.43. Halle la capacitancia entre ellos mediante el método de momentos en los casos $\theta = 10°, 20°, \ldots, 180°$. Asigne al espacio un valor de 2 mm, $a = 1$ mm, $L = 2$ m, $\varepsilon_r = 1$.

15.18. Determine con el método de momentos la impedancia característica de la línea de transmisión de cintas delgadas de longitud infinita que se muestra en la figura 15.44*(a)*. Divida cada cinta en N subáreas, como se indica en la figura 15.44*(b)*, de manera que en la subárea i,

$$V_i = \sum_{j=1}^{2N} A_{ij}\,\rho_j$$

donde

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-\Delta \ell}{2\pi\varepsilon_o} \ln R_{ij}, & i \neq j \\[2ex] \dfrac{-\Delta \ell}{2\pi\varepsilon_o} [\ln \Delta \ell - 1.5], & i = j \end{cases}$$

R_{ij} es la distancia entre las subáreas de orden i y j y $V_i = 1$ o -1 dependiendo de si la subárea de orden i se encuentra en la cinta 1 o 2, respectivamente. Escriba un programa para hallar la impedancia característica de la línea con base en el hecho de que

$$Z_o = \frac{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}{C}$$

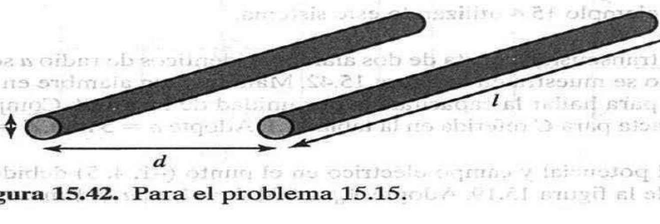


Figura 15.42. Para el problema 15.15.

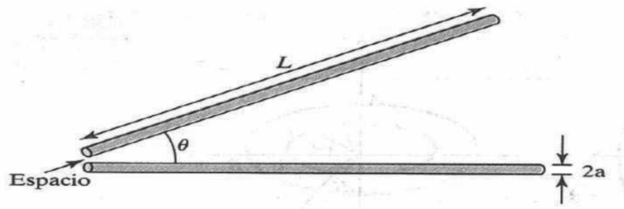


Figura 15.43. Para el problema 15.17.

donde C es la capacitancia por unidad de longitud y

$$C = \frac{Q}{V_d} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_i \, \Delta \ell}{V_d}$$

y $V_d = 2$ V es la diferencia de potencial entre las cintas. Adopte $H = 2$ m, $W = 5$ m y $N = 20$.

15.19. Considere la línea coaxial de sección transversal arbitraria que se muestra en la figura 15.45*(a)*. Usar el método de momentos para hallar la capacitancia C por longitud implica dividir cada conductor en N cintas de manera que el potencial en la cinta de orden j esté dado por

$$V_j = \sum_{i=1}^{2N} \rho_i A_{ij}$$

donde

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-\Delta \ell}{2\pi\varepsilon} \ln \dfrac{R_{ij}}{r_o}, & i \neq j \\[2ex] \dfrac{-\Delta \ell}{2\pi\varepsilon} \left[\ln \dfrac{\Delta \ell_i}{r_o} - 1.5 \right], & i = j \end{cases}$$

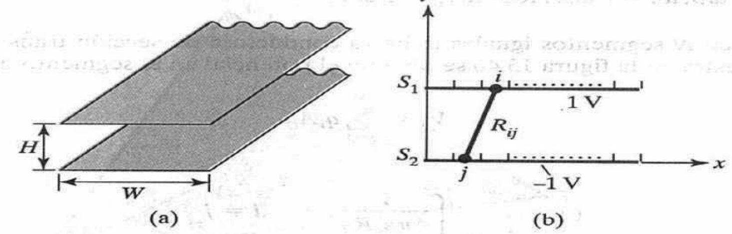


Figura 15.44. Análisis de línea de transmisión de cintas mediante el método de momentos; para el problema 15.18.

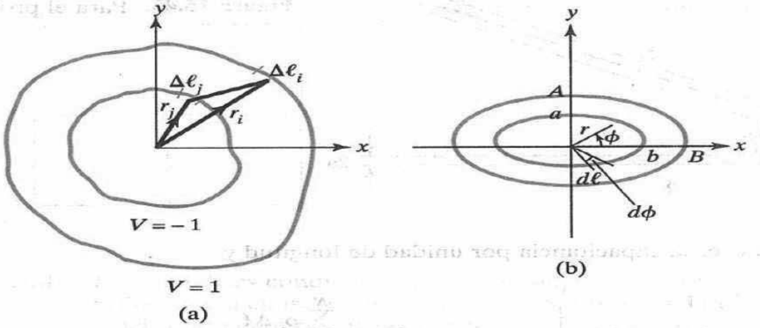


Figura 15.45. Para el problema 15.19; línea coaxial de **(a)** sección transversal arbitraria y **(b)** sección transversal cilíndrica elíptica.

y $V_j = 1$ o -1 dependiendo de si $\Delta\ell_i$ se sitúa en el conductor interno o externo, respectivamente. Escriba un programa de Matlab para determinar la carga total por longitud en el cable coaxial de sección transversal cilíndrica elíptica que aparece en la figura 15.45*(b)* con base en

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$$

y la capacitancia por unidad de longitud con base en $C = Q/2$.

a) Para comprobar su programa, adopte $A = B = 2$ cm y $a = b = 1$ cm (línea coaxial de sección transversal circular) y compare su resultado con el valor exacto de $C = 2\pi\varepsilon/\ln(A/a)$.

b) Adopte $A = 2$ cm, $B = 4$ cm, $a = 1$ cm y $b = 2$ cm.

[*Pista*: En el caso de la elipse interna de la figura 15.45*(b)*, por ejemplo,

$$r = \frac{a}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \phi + \nu^2 \cos^2 \phi}}$$

donde $\nu = a/b$, $d\ell = r\, d\phi$. Adopte $r_o = 1$ cm.]

15.20. Al dividir en N segmentos iguales la barra conductora de sección transversal rectangular que se muestra en la figura 15.46 se obtiene el potencial en el segmento de orden j como

$$V_j = \sum_{i=1}^{N} q_i A_{ij}$$

donde

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o R_{ij}}, & i \neq j \\[2ex] \dfrac{1}{2\varepsilon_o \sqrt{\pi h \Delta}}, & i = j \end{cases}$$

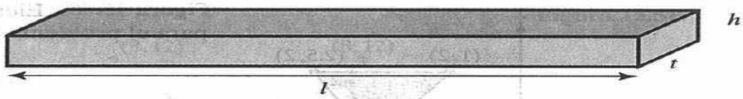


Figura 15.46. Para el problema 15.20.

y Δ es la longitud del segmento. Si se mantiene la barra en 10 V se obtiene

$$[A][q] = 10[I]$$

donde $[I] = [1\ 1\ 1\ \ldots\ 1]^T$ y $q_i = \rho_v th\Delta$.

a) Escriba un programa para hallar la distribución de carga ρ_v en la barra y adopte $\ell = 2$ m, $h = 2$ cm, $t = 1$ cm y $N = 20$.

b) Calcule la capacitancia del conductor aislado con base en

$$C = Q/V = (q_1 + q_2 + \ . \ . \ . \ + q_N)/10$$

15.21. Otra manera de definir las funciones de forma en un punto arbitrario (x, y) de un elemento finito consiste en usar las áreas A_1, A_2 y A_3 que aparecen en la figura 15.47. Demuestre que

$$\alpha_k = \frac{A_k}{A}, \qquad k = 1, 2, 3$$

donde $A = A_1 + A_2 + A_3$ es el área total del elemento triangular.

15.22. Con relación a cada uno de los elementos triangulares que se presentan en la figura 15.48:

a) Calcule las funciones de forma.

b) Determine la matriz de coeficientes.

15.23. Los valores del potencial nodal del elemento triangular que se muestra en la figura 15.49 son $V_1 = 100$ V, $V_2 = 50$ V y $V_3 = 30$ V. *a)* Determine el punto en el que la línea equipotencial de 80 V interseca con las fronteras del elemento. *b)* Calcule el potencial de $(2, 1)$.

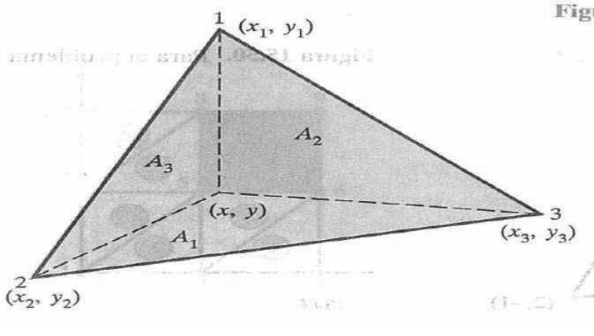


Figura 15.47. Para el problema 15.21.

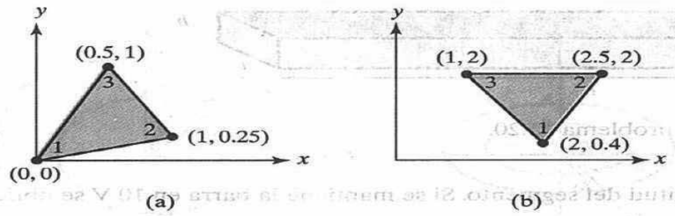


Figura 15.48. Elementos triangulares para el problema 15.22.

15.24. El elemento triangular que aparece en la figura 15.50 forma parte de una malla de elementos finitos. Si $V_1 = 8$ V, $V_2 = 12$ V y $V_3 = 10$ V, halle el potencial en *a)* (1, 2) y *b)* el centro del elemento.

15.25. Determine la matriz de coeficientes global de la región de dos elementos que aparece en la figura 15.51.

15.26. Halle la matriz de coeficientes global de la malla de dos elementos de la figura 15.52.

15.27. Con relación a la malla de dos elementos de la figura 15.52, conceda que $V_1 = 10$ V y $V_3 = 30$ V. Halle V_2 y V_4.

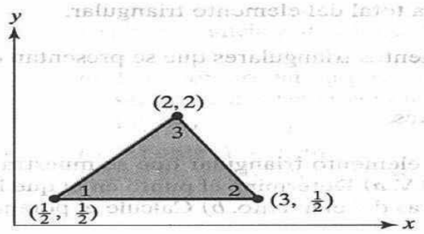


Figura 15.49. Para el problema 15.23.

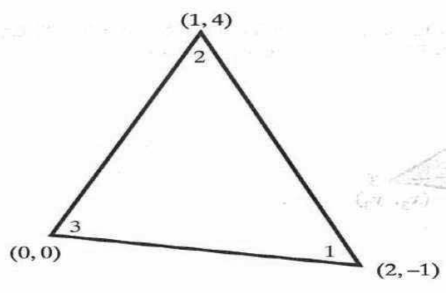


Figura 15.50. Para el problema 15.24.

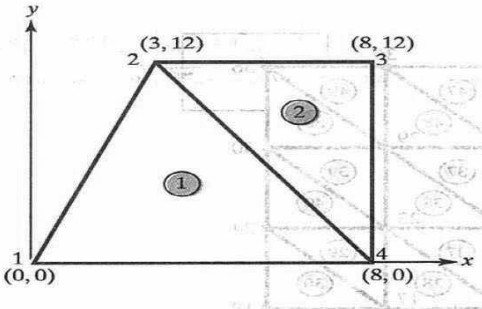


Figura 15.51. Para el problema 15.25.

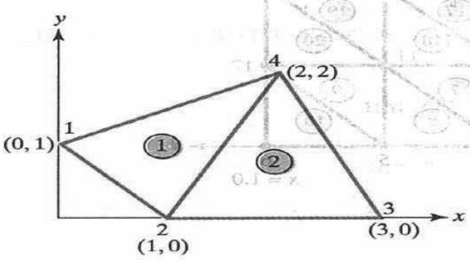


Figura 15.52. Para los problemas 15.26 y 15.27.

15.28. La malla de la figura 15.53 forma parte de una malla mayor. La región sombreada es conductora y no tiene elementos. Halle $C_{5,5}$ y $C_{5,1}$.

15.29. Use el programa contenido en la figura 15.33 para resolver la ecuación de Laplace del problema representado en la figura 15.54, donde $V_o = 100$ V. Compare la solución de elemento finito con la solución exacta referida en el ejemplo 6.5; es decir,

$$V(x, y) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} n\pi y}{n \operatorname{senh} n\pi}, \qquad n = 2k + 1$$

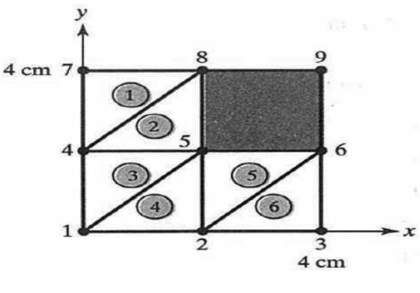


Figura 15.53. Para el problema 15.28.

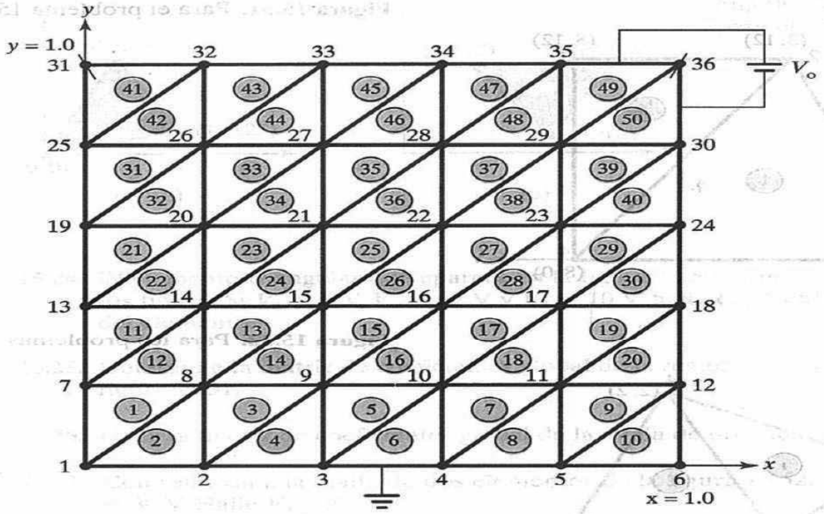


Figura 15.54. Para el problema 15.29.

15.30. Repita el problema anterior con $V_o = 100$ sen πx. Compare la solución de elemento finito con la solución teórica [similar al inciso *a)* del ejemplo 6.6]; es decir,

$$V(x, y) = \frac{100 \text{ sen } \pi x \text{ senh } \pi y}{\text{senh } \pi}$$

15.31. Demuestre que al aplicar el MDF a una malla cuadrada se obtiene el mismo resultado que con el MEF si los cuadrados se cortan en triángulos.

Apéndice A
Fórmulas matemáticas

A.1. Identidades trigonométricas

$$\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}, \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}, \qquad \csc A = \frac{1}{\text{sen } A}$$

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1, \qquad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

$$\text{sen } (A \pm B) = \text{sen } A \cos B \pm \cos A \text{ sen } B$$

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen } A \text{ sen } B$$

$$2 \text{ sen } A \text{ sen } B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$$

$$2 \text{ sen } A \cos B = \text{sen } (A + B) + \text{sen } (A - B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$$

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \text{ sen } \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \text{ sen } \frac{A + B}{2} \text{ sen } \frac{A - B}{2}$$

$$\cos (A \pm 90°) = \mp \text{sen } A$$

$$\text{sen } (A \pm 90°) = \pm \cos A$$

$$\tan (A \pm 90°) = -\cot A$$

$$\cos (A \pm 180°) = -\cos A$$

$$\text{sen } (A \pm 180°) = -\text{sen } A$$

$$\tan(A \pm 180°) = \tan A$$

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{e^{jA} - e^{-jA}}{2j}, \qquad \cos A = \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2}$$

$$e^{jA} = \cos A + j \operatorname{sen} A \qquad \text{(identidad de Euler)}$$

$$\pi = 3.1416$$

$$1 \text{ rad} = 57.296°$$

..2. Variables complejas

Un número complejo puede representarse como

$$z = x + jy = r\angle\theta = re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$$

$$\text{donde} \quad x = \operatorname{Re} z = r\cos\theta, \qquad y = \operatorname{Im} z = r\operatorname{sen}\theta$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$j = \sqrt{-1}, \qquad \frac{1}{j} = -j, \qquad j^2 = -1$$

El conjugado complejo de $z = z^* = x - jy = r\angle{-\theta} = re^{-j\theta}$

$$= r(\cos\theta - j\operatorname{sen}\theta)$$

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos n\theta + j\operatorname{sen} n\theta \quad \text{(teorema de De Moivre)}$$

Si $z_1 = x_1 + jy_1$ y $z_2 = x_2 + jy_2$, entonces $z_1 = z_2$ sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

o

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2\angle\theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} \cdot \frac{(x_2 - jy_2)}{(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

o

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + jy} = \sqrt{r}\, e^{j\theta/2} = \sqrt{r}\, \underline{/\theta/2}$$

$$z^n = (x + jy)^n = r^n\, e^{jn\theta} = r^n\, \underline{/n\theta} \qquad (n = \text{entero})$$

$$z^{1/n} = (x + jy)^{1/n} = r^{1/n}\, e^{j\theta/n} = r^{1/n}\, \underline{/\theta/n + 2\pi k/n}\; (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

$$\ln (re^{j\theta}) = \ln r + \ln e^{j\theta} = \ln r + j\theta + j2k\pi \qquad (k = \text{entero})$$

A.3. Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{sen} jx = j \operatorname{senh} x, \qquad \cos jx = \cosh x$$

$$\operatorname{senh} jx = j \operatorname{sen} x, \qquad \cosh jx = \cos x$$

$$\operatorname{senh} (x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh (x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh} (x \pm jy) = \operatorname{senh} x \cos y \pm j \cosh x \operatorname{sen} y$$

$$\cosh (x \pm jy) = \cosh x \cos y \pm j \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$$

$$\tanh (x \pm jy) = \frac{\operatorname{senh} 2x}{\cosh 2x + \cos 2y} \pm j\, \frac{\operatorname{sen} 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen} (x \pm jy) = \operatorname{sen} x \cosh y \pm j \cos x \operatorname{senh} y$$

$$\cos (x \pm jy) = \cos x \cosh y \mp j \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

.4. Identidades logarítmicas

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^n = n \log x$$

$$\log_{10} x = \log x \text{ (logaritmos comunes)}$$

$$\log_e x = \ln x \text{ (logaritmos naturales)}$$

Si $|x| \ll 1$, $\ln(1 + x) \simeq x$

.5. Identidades exponenciales

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

donde $e \simeq 2.7182$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$[e^x]^n = e^{nx}$$

$$\ln e^x = x$$

.6. Aproximaciones de cantidades pequeñas

Si $|x| \ll 1$,

$$(1 \pm x)^n \simeq 1 \pm nx$$

$$e^x \simeq 1 + x$$

$$\ln(1 + x) \simeq x$$

$$\operatorname{sen} x \simeq x \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\cos x \simeq 1$$

$$\tan x \simeq x$$

A.7. Derivadas

Si $U = U(x)$, $V = V(x)$ y $a =$ constante,

$$\frac{d}{dx}(aU) = a\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(UV) = U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{U}{V}\right] = \frac{V\dfrac{dU}{dx} - U\dfrac{dV}{dx}}{V^2}$$

$$\frac{d}{dx}(aU^n) = naU^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a U = \frac{\log_a e}{U}\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln U = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}a^U = d^U \ln a\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}e^U = e^U\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}U^V = VU^{\nu-1}\frac{dU}{dx} + U^V \ln U\frac{dV}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} U = \cos U\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos U = -\operatorname{sen} U\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan U = \sec^2 U\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} U = \cosh U\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh U = \operatorname{senh} U\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh U = \operatorname{sech}^2 U\frac{dU}{dx}$$

B. Integrales indefinidas

Si $U = U(x)$, $V = V(x)$ y a = constante,

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int U\,dV = UV - \int V\,dU \quad \text{(integración por partes)}$$

$$\int U^n\,dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dU}{U} = \ln U + C$$

$$\int a^U\,dU = \frac{a^U}{\ln a} + C, \qquad a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int e^U\,dU = e^U + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$$

$$\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) + C$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$$

$$\int \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sec ax + C = -\frac{1}{a}\ln\cos ax + C$$

$$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

$$\int x \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\operatorname{sen} ax - ax \cos ax) + C$$

$$\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \operatorname{sen} ax) + C$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C$$

$$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{senh} ax\, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$$

$$\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{senh} ax + C$$

$$\int \tanh ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{x^2 + a^2} = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x - a}{x + a} + C, & x^2 > a^2 \\ \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a - x}{a + x} + C, & x^2 < a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x/a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}\right) + C$$

. Integrales definidas

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m + n = \text{par} \\ \dfrac{2m}{m^2 - n^2}, & m + n = \text{impar} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \begin{cases} \pi/2, & a > 0, \\ 0, & a = 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{2x}}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2\, ax}{x^2}\, dx = |a|\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{(b^2-4ac)/4a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \,\text{sen}\, bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

A.10. Identidades vectoriales

Si **A** y **B** son campos vectoriales mientras que U y V son campos escalares,

$$\nabla (U + V) = \nabla U + \nabla V$$

$$\nabla (UV) = U\,\nabla V + V\,\nabla U$$

$$\nabla\left[\frac{U}{V}\right] = \frac{V(\nabla U) - U(\nabla V)}{V^2}$$

$$\nabla V^n = n\,V^{n-1}\,\nabla V \qquad (n = \text{entero})$$

$$\nabla (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot(V\mathbf{A}) = V\,\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V$$

$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\,(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(V\mathbf{A}) = \nabla V\times\mathbf{A} + V(\nabla\times\mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$
$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$
$$\oint_L V d\mathbf{l} = -\int_S \nabla V \times d\mathbf{S}$$
$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv$$
$$\oint_S V d\mathbf{S} = \int_v \nabla V\, dv$$
$$\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = -\int_v \nabla \times \mathbf{A}\, dv$$

Apéndice B
Constantes de los materiales

Tabla B.1. Conductividad aproximada* de algunos materiales comunes a 20°C.

Material	*Conductividad (siemens/metro)*
Conductores	
Plata	6.1×10^{7}
Cobre (recocido normal)	5.8×10^{7}
Oro	4.1×10^{7}
Aluminio	3.5×10^{7}
Tungsteno	1.8×10^{7}
Cinc	1.7×10^{7}
Cobre	1.1×10^{7}
Hierro (puro)	10^{7}
Plomo	5×10^{6}
Mercurio	10^{6}
Carbón	3×10^{4}
Agua (de mar)	4
Semiconductores	
Germanio (puro)	2.2
Silicio (puro)	4.4×10^{-4}
Aisladores	
Agua (destilada)	10^{-4}
Tierra (seca)	10^{-5}
Baquelita	10^{-10}
Papel	10^{-11}
Vidrio	10^{-12}
Porcelana	10^{-12}
Mica	10^{-15}
Parafina	10^{-15}
Hule (duro)	10^{-15}
Vidrio (de cuarzo)	10^{-17}
Cera	10^{-17}

*Los valores varían según la fuente a causa de las numerosas variedades de la mayoría de los materiales y de que la conductividad es sensible a la temperatura, humedad, contenido, impurezas y otros factores.

Tabla B.2. Constante dieléctrica o permitividad relativa (ϵ_r) y resistencia aproximadas de algunos materiales comunes.*

Material	*Constante dieléctrica* ϵ_r *(adimensional)*	*Resistencia dieléctrica* E*(V/m)*
Titanato de bario	1200	7.5×10^6
Agua (de mar)	80	
Agua (destilada)	81	
Nailon	8	
Papel	7	12×10^6
Vidrio	5—10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelana	6	
Baquelita	5	20×10^6
Vidrio (de cuarzo)	5	30×10^6
Hule (duro)	3.1	25×10^6
Madera	2.5—8.0	
Poliestireno	2.55	
Polipropileno	2.25	
Parafina	2.2	30×10^6
Aceite de petróleo	2.1	12×10^6
Aire (1 atm.)	1	3×10^6

*Los valores aquí referidos son únicamente representativos; varían según la fuente a causa de las variedades de la mayoría de los materiales y de la dependencia de ϵ_r respecto de la temperatura, la humedad y otros factores.

Tabla B.3. Permeabilidad relativa (μ_r) de algunos materiales.*

Material	μ_r	*Material*	μ_r	*Material*	μ_r
Diamagnéticos		*Paramagnéticos*		*Ferromagnéticos*	
Bismuto	0.999833	Oxígeno (a temperatura y presión estándar)	0.999998	Cobalto	250
Mercurio	0.999968	Aire	1.00000037	Níquel	600
Plata	0.9999736	Aluminio	1.000021	Hierro dulce	5000
Plomo	0.9999831	Tungsteno	1.00008	Hierro al silicio	7000
Cobre	0.9999906	Platino	1.0003		
Agua	0.9999912	Manganeso	1.001		
Hidrógeno (a temperatura y presión estándar)	$\simeq 1.0$				

*Los valores aquí referidos son únicamente representativos; varían según la fuente a causa de las variedades de la mayoría de los materiales.

Apéndice C
Soluciones de los problemas de número impar

Capítulo 1

1.1. $-0.8703\mathbf{a}_x - 0.3483\mathbf{a}_y - 0.3482\mathbf{a}_z$

1.3. *a)* $5\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$
b) $-5\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_y + 23\mathbf{a}_z$
c) $0.439\mathbf{a}_x - 0.11\mathbf{a}_y - 0.3293\mathbf{a}_z$
d) $1.1667\mathbf{a}_x - 0.7084\mathbf{a}_y - 0.7084\mathbf{a}_z$

1.5. $\alpha = \dfrac{-12}{7}, \beta = \dfrac{-4}{7}$

1.7. Comprobación

1.9. *a)* -2.8577
b) $-2.8577\mathbf{a}_x + 0.8571\mathbf{a}_y - 0.4286\mathbf{a}_z$
c) $65.91°$

1.11. $72.36°, 59.66°, 143.91°$

1.13. *a)* $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}$
b) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\times\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

1.15. 25.72

1.17. *a)* 7.681
b) $-2\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$
c) $137.43°$
d) 11.022
e) 17.309

1.19. *a)* Comprobación
b) $\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2, \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2$
c) $\left|\operatorname{sen}\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right|$

1.21. *a)* 10.3
b) $-2.175\mathbf{a}_x + 1.631\mathbf{a}_y - 4.893\mathbf{a}_z$
c) $-0.175\mathbf{a}_x + 0.631\mathbf{a}_y - 1.893\mathbf{a}_z$

Capítulo 2

2.1. *a)* $P(0.5, 0.866, 2)$
b) $Q(0, 1, -4)$
c) $R(-1,837, -1.061, 2.121)$
d) $T(3.464, 2, 0)$

2.3. *a)* $\rho z \cos\phi - \rho^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi + \rho z \operatorname{sen}\phi$
b) $r^2(1 + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \cos\theta)$

2.5. *a)* $\dfrac{1}{\rho^2 + z^2}(\rho\mathbf{a}_\rho + 4\mathbf{a}_z), \left(\operatorname{sen}^2\theta + \dfrac{4 \operatorname{sen}\theta}{r}\right)\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta - \dfrac{4}{r}\right)\mathbf{a}_\theta$
b) $\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}(\rho\mathbf{a}_\rho + z\mathbf{a}_z), r \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{a}_r$

2.7. *a)* $\left(\dfrac{xyz}{x^2 + y^2} + \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\mathbf{a}_x + \left(\dfrac{y^2 z}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\mathbf{a}_y + 2z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{a}_z$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$

2.9. Comprobación

2.11. *a)* $\dfrac{1}{x^2 + y^2}(x^2\mathbf{a}_x + xy\mathbf{a}_y + yz^2\mathbf{a}_z), 3$
b) $r(\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi + r\cos^3\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{a}_r + r \operatorname{sen}\theta\cos\theta(\cos\phi - r\cos\theta \operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{a}_\theta, 3$

2.13. *a)* $r \operatorname{sen}\theta\,[\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,(r \operatorname{sen}\theta + \cos\phi)\,\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\phi\,(r\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\phi)$
$\mathbf{a}_\theta + 3\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi], 5\mathbf{a}_\theta - 21.21\mathbf{a}_\phi$
b) $\sqrt{\rho^2 + z^2}\left(\rho\mathbf{a}_\rho + \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z\right), 4.472\mathbf{a}_\rho + 0.8944\mathbf{a}_\phi + 2.236\mathbf{a}_z$

2.15. *a)* Una línea infinita paralela al eje z
b) Punto $(2, -1, 10)$
c) Un círculo de radio $r \operatorname{sen}\theta = 5$, es decir, la intersección de un cono y una esfera
d) Una línea infinita paralela al eje z
e) Una línea semiinfinita paralela al plano x-y
f) Un semicírculo de radio 5 en el plano x-y

2.17. *a)* $\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 7\mathbf{a}_z$
b) $143.26°$
c) -8.789

2.19. *a)* $-\mathbf{a}_\theta$
b) $0.6931\mathbf{a}_\theta$
c) $-\mathbf{a}_\theta + 0.6931\mathbf{a}_\phi$
d) $0.6931\mathbf{a}_\phi$

2.21. *a)* $3\mathbf{a}_\phi + 25\mathbf{a}_z, -15.6\mathbf{a}_r + 10\mathbf{a}_\phi$
b) $2.071\mathbf{a}_\rho - 1.354\mathbf{a}_\phi + 0.4141\mathbf{a}_z$
c) $\pm(0.5365\mathbf{a}_r - 0.1073\mathbf{a}_\theta + 0.8371\mathbf{a}_\phi)$

2.23. $(\operatorname{sen}\theta\cos^3\phi + 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi)\,\mathbf{a}_r + (\cos\theta\cos^3\phi + 2\tan\theta\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi -$
$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi)\,\mathbf{a}_\theta + \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,(\operatorname{sen}\phi - \cos\phi)\mathbf{a}_\phi$

Capítulo 3

3.1. *a)* 2.356
b) 0.5236
c) 4.189
3.3. *a)* 6
b) 110
c) 4.538
3.5. 0.6667
3.7. *a)* -50
b) -39.5
3.9. $4\mathbf{a}_\rho + 1.333\mathbf{a}_z$
3.11. *a)* $(-2, 0, 6.2)$
b) $-2\mathbf{a}_x + (2.4t + 5)\mathbf{a}_z$ m/s
3.13. *a)* $-0.5578\mathbf{a}_x - 0.8367\mathbf{a}_y - 3.047\mathbf{a}_z$
b) $2.5\mathbf{a}_\rho + 2.5\mathbf{a}_\phi - 17.32\mathbf{a}_z$
c) $-\mathbf{a}_r + 0.866\mathbf{a}_\theta$
3.15. A lo largo de $2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$
3.17. *a)* $-y^2\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y - x^2\mathbf{a}_z, 0$
b) $(\rho^2 - 3z^2)\mathbf{a}_\phi + 4\rho^2\mathbf{a}_z, 0$
c) $-\dfrac{1}{r}\cot\theta\cos\phi + \dfrac{1}{r^3}\left(\dfrac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta} + \cos\theta\right)\mathbf{a}_\theta, 0$
3.19. *a)* Comprobación
b) $2xyz$
3.21. $2(z^2 - y^2 - y)$
3.23. Comprobación
3.25. *a)* $6yz\mathbf{a}_x + 3xy^2\mathbf{a}_y + 3x^2yz\mathbf{a}_z$
b) $4yz\mathbf{a}_x + 3xy^2\mathbf{a}_y + 4x^2yz\mathbf{a}_z$
c) $6xyz + 3xy^3 + 3x^2yz$
d) $2(x^2 + y^2 + z^2)$
3.27. Comprobación
3.29. *a)* $(6xy^2 + 2x^2 + x^5y^2)e^{xz}, 24.46$
b) $3z(\cos\phi + \operatorname{sen}\phi), -8.1961$
c) $e^{-r}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\left(1 - \dfrac{4}{r}\right), 0.8277$
3.31. *a)* $\dfrac{7}{6}$
b) $\dfrac{7}{6}$
c) Sí
3.33. 50.265
3.35. *a)* Comprobación, ambos miembros iguales a 1.667
b) Comprobación, ambos miembros iguales a 131.57
c) Comprobación, ambos miembros iguales a 136.23

3.37. *a)* $4\pi - 2$
b) 7π
3.39. 0
3.41. Comprobación
3.43. Comprobación
3.45. $\alpha = 1 = \beta = \gamma, -1$

Capítulo 4

4.1. $-5.746\mathbf{a}_x - 1.642\mathbf{a}_y + 4.104\mathbf{a}_z$ mN
4.3. *a)* -3.463 nC
b) -18.7 nC
4.5. *a)* 0.5 C
b) 1.206 μC
c) 157.9 nC
4.7. $-2.545\mathbf{a}_x + 1.054\mathbf{a}_y$ MV/m
4.9. $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}$
4.11. *a)* Comprobación
b) 0.4 mC, $31.61\mathbf{a}_z$ μV/m
4.13. $-0.591\mathbf{a}_x - 0.18\mathbf{a}_z$ N
4.15. Deducción
4.17. *a)* $8.84xy\mathbf{a}_x + 8.84x^2\mathbf{a}_y$ pC/m²
b) $8.84y$ pC/m³
4.19. 5.357 kJ
4.21. Comprobación
4.23. $D_\rho = \begin{cases} 0, & \rho < 1 \\ \dfrac{8(\rho^3 - 1)}{2\rho}, & 1 < \rho < 2 \\ \dfrac{28}{\rho} & \end{cases}$
4.25. 1050 J
4.27. *a)* -1250 J
b) -3750 nJ
c) 0 J
d) -8750 nJ
4.29. *a)* $-2x\mathbf{a}_x - 4y\mathbf{a}_y - 8z\mathbf{a}_z$
b) $-(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)\cos(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
c) $-2\rho(z+1)\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\rho - \rho(z+1)\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi - \rho^2\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_z$
d) $e^{-r}\operatorname{sen}\theta\cos 2\phi\,\mathbf{a}_r - \frac{e^{-r}}{r}\cos\theta\cos 2\phi\,\mathbf{a}_\theta + \frac{2e^{-r}}{r}\operatorname{sen} 2\phi\,\mathbf{a}_\phi$
4.31. *a)* $72\mathbf{a}_x + 27\mathbf{a}_y - 36\mathbf{a}_z$ V/m
b) -30.95 pC
4.33. Comprobación

4.35. *a)* $\dfrac{2\rho_o}{15\varepsilon_o r^2}\,\mathbf{a}_r, \dfrac{2\rho_o}{15\varepsilon_o r}$

b) $\dfrac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\dfrac{a^2 r}{3} - \dfrac{r^3}{5}\right)\mathbf{a}_r, \dfrac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\dfrac{r^4}{20} - \dfrac{a^2 r^2}{6}\right) + \dfrac{2\,\rho_o}{15\varepsilon_o} + \dfrac{7\,\rho_o a^4}{60\varepsilon_o}$

c) $\dfrac{8\pi\,\rho_o}{15}$

d) Comprobación

4.37. *a)* $-1.136\,\mathbf{a}_y$ kV/m

b) $(\mathbf{a}_x + 0.2\mathbf{a}_y) \times 10^7$ m/s

4.39. Comprobación, $\dfrac{Qd}{4\pi\varepsilon_o r^3}$ $(2 \text{ sen }\theta \text{ sen }\phi\,\mathbf{a}_r - \cos\theta \text{ sen }\phi\,\mathbf{a}_\theta - \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi)$ V/m

4.41. $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o a}$

4.43. 6.612 nJ

Capítulo 5

5.1. -6.283 *A*

5.3. 5.026 A

5.5. *a)* $-16xyz\,\varepsilon_o$, *b)* -1.131 mA

5.7. *a)* 3.5×10^7 S/m, aluminio

b) 5.66×10^6 A/m^2

5.9. *a)* 0.27 mΩ

b) 50.3 A (cobre), 9.7 A (acero)

c) 0.322 mΩ

5.11. 1.000182

5.13. *a)* $12.73z\mathbf{a}_z$ nC/m^2, 12.73 nC/m^3

b) $7.427z\mathbf{a}_z$ nC/m^2, -7.472 nC/m^3

5.15. *a)* $\dfrac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)$

b) 0

c) $-\dfrac{Q}{4\pi a^2}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right), \dfrac{Q}{4\pi b^2}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)$

5.17. $-24.72\mathbf{a}_x - 32.95\mathbf{a}_y + 98.86\mathbf{a}_z$ V/m

5.19. *a)* Comprobación

b) $\dfrac{\rho_o a^2}{3\varepsilon_o}$

5.21. *a)* $0.442\mathbf{a}_x + 0.442\mathbf{a}_y + 0.1768\mathbf{a}_z$ nC/m^2

b) $0.2653\mathbf{a}_x + 0.5305\mathbf{a}_y + 0.7958\mathbf{a}_z$

5.23. *a)* 46.23 A

b) 45.98 μC/m^3

5.25. *a)* 18.2 μs

b) 20.58

c) 19.23%

5.27. *a)* $-1.061\mathbf{a}_x + 1.768\mathbf{a}_y + 1.547\mathbf{a}_z$ nC/m^2
b) $-0.7958\mathbf{a}_x + 1.326\mathbf{a}_y + 1.161\mathbf{a}_z$ nC/m^2
c) 39.79°
5.29. *a)* $387.8\mathbf{a}_\rho - 452.4\mathbf{a}_\phi + 678.6\mathbf{a}_z$ V/m, $12\mathbf{a}_\rho - 14\mathbf{a}_\phi + 21\mathbf{a}_z$ nC/m^2
b) $4\mathbf{a}_\rho - 2\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$ nC/m^2, 0
c) 12.62 mJ/m^3 para la región 1 y 9.839 mJ/m^3 para la región 2
5.31. *a)* 705.9 V/m, 0° (vidrio), 6000 V/m, 0° (aire)
b) 1940.5 V/m, 84.6° (vidrio), 2478.6 V/m, 51.2° (aire)
5.33. *a)* 381.97 nC/m^2
b) $\dfrac{0.955\mathbf{a}_r}{r^2}$ nC/m^2
c) 12.96 μJ

apítulo 6

6.1. $120\mathbf{a}_x + 120\mathbf{a}_y - 12\mathbf{a}_z$, 530.52 pC/m^3
6.3. *a)* $-\dfrac{\rho_o x^3}{6d\varepsilon_o} + \dfrac{\rho_o x^2}{2\varepsilon_o} + \left(\dfrac{V_o}{d} - \dfrac{\rho_o d}{3\varepsilon_o}\right)x, \left(\dfrac{\rho_o x^2}{2d\varepsilon_o} - \dfrac{\rho_o x}{\varepsilon_o} - \dfrac{V_o}{d} + \dfrac{\rho_o d}{3\varepsilon_o}\right)\mathbf{a}_x$
b) $\dfrac{\rho_o d}{3} - \dfrac{\varepsilon_o V_o}{d}, \dfrac{\varepsilon_o V_o}{d} + \dfrac{\rho_o d}{6}$
6.5. $157.08y^4 - 942.5y^2 + 30.374$ kV
6.7. Comprobación
6.9. Comprobación
6.11. $25z$ kV, $-25\mathbf{a}_z$ kV/m, $-332\mathbf{a}_z$ nC/m^2, $\pm\, 332\mathbf{a}_z$ nC/m^2
6.13. 9.52 V, $18.205\mathbf{a}_\rho$ V/m, $0.161\mathbf{a}_\rho$ nC/m^2
6.15. 11.7 V, $-17.86\mathbf{a}_\theta$ V/m
6.17. Deducción
6.19. *a)* $-\dfrac{4V_o}{\pi}\displaystyle\sum_{n=\text{impar}}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{b}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi}{b}(a-y)}{n\operatorname{senh}\dfrac{n\pi a}{b}}$

b) $\dfrac{4V_o}{\pi}\displaystyle\sum_{n=\text{impar}}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi x}{a}}{n\operatorname{senh}\dfrac{n\pi b}{a}}$

c) $\dfrac{4V_o}{\pi}\displaystyle\sum_{n=\text{impar}}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi}{b}(a-x)}{n\operatorname{senh}\dfrac{n\pi a}{b}}$

6.21. Comprobación
6.23. Comprobación
6.25. Comprobación

6.27. 0.5655 cm^2
6.29. Comprobación
6.31. *a)* 100 V
b) 99.5 nC/m^2, −99.5 nC/m^2
6.33. *a)* 25 pF
b) 63.662 nC/m^2
6.35. $$\frac{4\pi}{\dfrac{\varepsilon_1}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}}+\dfrac{\varepsilon_2}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}}+\dfrac{\varepsilon_3}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}}$$
6.37. 21.85 pF
6.39. 693.1 s
6.41. Comprobación
6.43. Comprobación
6.45. 0.7078 mF
6.47. *a)* 1 nC
b) 5.25 nN
6.49. $-0.1891(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ N
6.51. *a)* $-138.24\mathbf{a}_x - 184.32\mathbf{a}_z$ V/m
b) −1.018 nC/m^2

Capítulo 7

7.1. *b)* $0.2753\mathbf{a}_x + 0.382\mathbf{a}_y + 0.1404\mathbf{a}_z$ A/m
7.3. $0.9549\mathbf{a}_z$ A/m
7.5. *a)* $28.47\mathbf{a}_y$ mA/m
b) $-13\mathbf{a}_x + 13\mathbf{a}_y$ mA/m
c) $-5.1\mathbf{a}_x + 1.7\mathbf{a}_y$ mA/m
d) $5.1\mathbf{a}_x + 1.7\mathbf{a}_y$ mA/m
7.7. *a)* $-0.6792\mathbf{a}_z$ A/m
b) $0.1989\mathbf{a}_z$ mA/m
c) $0.1989\mathbf{a}_x + 0.1989\mathbf{a}_y$ A/m
7.9. *a)* $1.964\mathbf{a}_z$ A/m
b) $1.78\mathbf{a}_z$ A/m
c) $-0.1178\mathbf{a}_z$ A/m
d) $-0.3457\mathbf{a}_x - 0.3165\mathbf{a}_y + 0.1798\mathbf{a}_z$ A/m
7.11. *a)* Comprobación
b) 1.78 A/m, 1.125 A/m
c) Comprobación
7.13. *a)* $1.36\mathbf{a}_z$ A/m
b) $0.884\mathbf{a}_z$ A/m
7.15. *a)* 69.63 A/m
b) 36.77 A/m

7.17. *b)* $H_\phi = \begin{cases} 0, & \rho < a \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}\left(\dfrac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right), & a < \rho < b \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}, & \rho > b \end{cases}$

7.19. *a)* $-2\mathbf{a}_z$ A/m^2
b) Comprobación, ambos miembros iguales a -30 A

7.21. *a)* $80\mathbf{a}_\phi$ nWb/m^2
b) 1.756 μWb

7.23. *a)* $31.43\mathbf{a}_y$ A/m
b) $12.79\mathbf{a}_x + 6.366\mathbf{a}_y$ A/m

7.25. 13.7 nWb

7.27. *a)* Campo magnético
b) Campo magnético
c) Campo magnético

7.29. $(14\mathbf{a}_\rho + 42\mathbf{a}_\phi) \times 10^4$ A/m, -1.011 Wb

7.31. $\dfrac{I_o\rho}{2\pi a^2}\,\mathbf{a}_\phi$

7.33. $-\dfrac{40}{\mu_o\rho^4}\,\mathbf{a}_z$ A/m^2

7.35. $\dfrac{\mu_o I}{28\pi}\left(\dfrac{\rho^2}{a^2} - 9\right) - \dfrac{8\mu_o I}{7\pi}\ln\dfrac{\rho}{3a}$

7.37. *a)* 50 A
b) -250 A

7.39. Comprobación

pítulo 8

8.1. $-4.4\mathbf{a}_x + 1.3\mathbf{a}_y + 11.4\mathbf{a}_z$ kV/m

8.3. *a)* $(2, 1.933, -3.156)$
b) 1.177 J

8.5. *a)* Comprobación
b) $\dfrac{2mu_o}{B_o e}$

8.7. $-86.4\mathbf{a}_z$ pN

8.9. -15.59 mJ

8.11. $1.949\mathbf{a}_x$ mN/m

8.13. $2.133\mathbf{a}_x - 0.2667\mathbf{a}_y$ Wb/m^2

8.15. *a)* $-18.52\mathbf{a}_z$ mWb/m^2
b) $-4\mathbf{a}_z$ mWb/m^2
c) $-111\mathbf{a}_r + 78.6\mathbf{a}_\theta$ mWb/m^2

8.17. *a)* 5.5
b) $81.68\mathbf{a}_x + 204.2\mathbf{a}_y - 326.7\mathbf{a}_z$ μWb/m^2
c) $-220\mathbf{a}_z$ A/m
d) 9.5 mJ/m^2
8.19. 476.68 kA/m
8.21. $2\dfrac{k_o}{a}\mathbf{a}_z$
8.23. *a)* $25\mathbf{a}_\rho + 15\mathbf{a}_\phi - 50\mathbf{a}_z$ mWb/m^2
b) 666.5 J/m^3, 57.7 J/m^3
8.25. $26.83\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_y + 33.96\mathbf{a}_z$ A/m
8.27. *a)* $-5\mathbf{a}_y$ A/m , $-6.283\mathbf{a}_y$ μWb/m^2
b) $-35\mathbf{a}_y$ A/m, $-110\mathbf{a}_y$ μWb/m^2
c) $5\mathbf{a}_y$ A/m, $6.283\mathbf{a}_y$ μWb/m^2
8.29. *a)* 167.4
b) 6181 kJ/m^3
8.31. 11.58 mm
8.33. 5103 vueltas
8.35. Comprobación
8.37. 190.8 A · t, 19,080 A/m
8.39. 88.5 mWb/m^2
8.41. *a)* 6.66 mN
b) 1.885 mN
8.43. Comprobación

Capítulo 9

9.1. 0.4738 sen $377t$
9.3. -54 V
9.5. *a)* $-0.4t$ V
b) $-2t^2$
9.7. 9.888 μV, el punto A está en mayor potencial
9.9. 0.97 mV
9.11. 6A, en dirección contraria a las manecillas del reloj
9.13. 277.8 A/m^2, 77.78 A
9.15. 36 GHz
9.17. *a)* $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \rho_{vs}/\varepsilon$, $\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$, $\nabla \times \mathbf{E}_s = j\omega\mu\mathbf{H}_s$, $\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma - j\omega\varepsilon)\mathbf{E}_s$

b) $$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_v$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}$$

9.19. Comprobación
9.21. $-0.3z^2 \text{ sen } 10^4 t \text{ mC/m}^3$
9.23. 0.833 rad/m, $100.5 \text{ sen } \beta x \text{ sen } \omega t \, \mathbf{a}_y$ V/m
9.25. *a)* Sí
b) Sí
c) No
d) No
9.27. $3 \cos \phi \cos (4 \times 10^6 t)\mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$, $84.82 \cos \phi \text{ sen } (4 \times 10^6 t)\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$
9.29. $(2-\rho)(1+t)e^{-\rho-t}\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$, $\dfrac{(1+t)(3-\rho)}{4\pi} 10^7 e^{-\rho-t}\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}^2$
9.31. *a)* $6.39 \angle 242.4°$
b) $0.2272 \angle -202.14°$
c) $1.387 \angle 176.8°$
d) $0.0349 \angle -68°$
9.33. *a)* $5 \cos (\omega t - \beta x - 36.37°)\mathbf{a}_y$
b) $\dfrac{20}{\rho} \cos (\omega t - 2z)\mathbf{a}_\rho$
c) $\dfrac{22.36}{r^2} \cos (\omega t - \phi + 63.43°) \text{ sen } \theta \, \mathbf{a}_\phi$
9.35. Comprobación

apítulo 10

10.1. *a)* A lo largo de $\mathbf{a}_x$
b) 1 μs, 1.047 m, 1.047×10^6 m/s
c) Veáse la figura C.1
10.3. *a)* $5.4105 + j6.129$ /m
b) 1.025 m
c) 5.125×10^7 m/s
d) $101.41 \angle 41.44°$ Ω
e) $-59.16e^{-j41.44°} e^{-\gamma z}\mathbf{a}_y$ mA/m

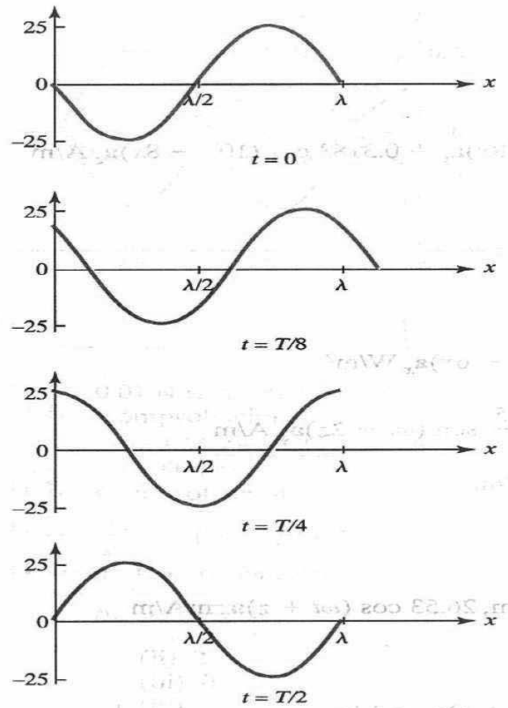


Figura C.1. Para el problema 10.1.

10.5. *a)* 1.732
b) 1.234
c) $(1.091 - j1.89) \times 10^{-11}$ F/m
d) 0.0164 Np/m

10.7. *a)* 5×10^5 m/s
b) 5 m
c) 0.796 m
d) $14.05 \underline{/45^\circ}\ \Omega$

10.9. *a)* $0.05 + j2$/m
b) 3.142 m
c) 10^8 m/s
d) 20 m

10.11. *a)* A lo largo de la dirección x
b) 7.162×10^{-10} F/m
c) $1.074 \text{ sen } (2 \times 10^8 + 6x)\mathbf{a}_z$ V/m

10.13. *a)* Sin pérdidas
b) 12.83 rad/m, 0.49 m
c) 25.66 rad
d) 4617 Ω

10.15. Comprobación

10.17. 5.76, -0.2546 sen $(10^9t - 8x)\mathbf{a}_y + 0.3183$ cos $(10^9t - 8x)\mathbf{a}_z$ A/m

10.19. *a)* No
b) No
c) Sí

10.21. 2.183 m, 3.927×10^7 m/s

10.23. 0.1203 mm, 0.126 Ω

10.25. 2.94×10^{-6} m

10.27. *a)* 131.6 Ω
b) $0.1184 \cos^2 (2\pi \times 10^8t - 6x)\mathbf{a}_x$ W/m^2
c) 0.3535 W

10.29. *a)* 2.828×10^8 rad/s, $\dfrac{0.225}{\rho}$ sen $(\omega t - 2z)\mathbf{a}_\phi$ A/m
b) $\dfrac{9}{\rho^2}$ sen^2 $(\omega t - 2z)\mathbf{a}_z$ W/m^2
c) 11.46 W

10.31. *a)* $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 2$
b) $-10 \cos (\omega t + z)\mathbf{a}_x$ V/m, $26.53 \cos (\omega t + z)\mathbf{a}_y$ mA/m

10.33. 26.038×10^{-6} H/m

10.35. *a)* 0.5×10^8 rad/m
b) 2
c) $-26.53 \cos (0.5 \times 10^8t + z)\mathbf{a}_x$ mA/m
d) $1.061\mathbf{a}_z$ W/m^2

10.37. *a)* 6.283 m, 3×10^8 rad/s, $7.32 \cos (\omega t - z)\mathbf{a}_y$ V/m
b) $-0.0265 \cos (\omega t - z)\mathbf{a}_x$ A/m
c) -0.268, 0.732
d) $\mathbf{E}_1 = 10 \cos (\omega t - z)\mathbf{a}_y - 2.68 \cos (\omega t + z)\mathbf{a}_y$ V/m,
$\mathbf{E}_2 = 7.32 \cos (\omega t - z)\mathbf{a}_y$ V/m, $P_{1\text{prom}} = 0.1231\mathbf{a}_z$ W/m^2,
$P_{2\text{prom}} = 0.1231\mathbf{a}_z$ W/m^2

10.39. Veáse la figura C.2

10.41. Comprobación, $\mathbf{H}_s = \dfrac{-j20}{\omega\mu_o}[k_y \text{ sen } (k_x x) \text{ sen } (k_y y)\mathbf{a}_x + k_x \cos(k_x x)\cos (k_y y)\mathbf{a}_y]$

10.43. *a)* 36.87°
b) $79.58\mathbf{a}_y + 106.1\mathbf{a}_z$ mW/m^2
c) $(-1.518\mathbf{a}_y + 2.024\mathbf{a}_z)$ sen $(\omega t + 4y - 3z)$ V/m, $(1.877\mathbf{a}_y - 5.968\mathbf{a}_y)$
sen $(\omega t - 9.539y - 3z)$ V/m

10.45. *a)* 15×10^8 rad/s
b) $(-8\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z)$ sen $(15 \times 10^8t + 3x + 4y)$ V/m

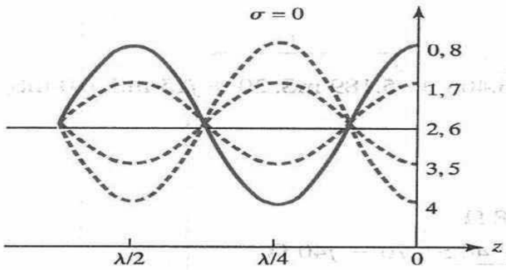


Figura C.2. Para el problema 10.39; curva n corresponde a $t = nT/8$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Capítulo 11

11.1. 0.0104 Ω/m, 50.26 nH/m, 221 pF/m, 0 S/m

11.3. Comprobación

11.5. *a)* $13.34 \angle -36.24^\circ$, 2.148×10^7 m/s
b) 1.606 m

11.7. Comprobación

11.9. $\frac{V_o}{Z_o} \text{sen}\,(\omega t - \beta z)$ A

11.11. *a)* Comprobación
b) (i) $\frac{2n}{n+1}$
(ii) 2
(iii) 0
(iv) 1

11.13. 798.3 rad/m, 3.542×10^7 m/s

11.15. Comprobación

11.17. *a)* 0.4112, 2.397
b) $34.63 \angle -40.65^\circ$ Ω

11.19. $0.2 \angle 40^\circ$ A

11.21. *a)* 46.87 Ω
b) 48.39 V

11.23. Comprobación

11.25. $10.2 + j13.8\Omega$, $0.7222 \angle 154^\circ$, 6.2

11.27. *a)* $j300\Omega$
b) $15 + j0.75\ \Omega$

11.29. $0.35 + j0.24$

11.31. *a)* 125 MHz
b) $72 + j72\ \Omega$
c) $0.444 \angle 120^\circ$

11.33. *a)* $35 + j34\ \Omega$
b) 0.375λ

11.35. *a)* 24.5 Ω
b) 55.33 Ω, 67.74 Ω
11.37. 10.25 W
11.39. $20 + j15$ mS, $-j10$ mS, $-6.408 + j5.189$ mS, $20 + j15$ mS, $j10$ mS, $2.461 + j5.691$ mS
11.41. *a)* $34.2 + j41.4\ \Omega$
b) 0.38λ, 0.473λ
c) 2.65
11.43. 4, $0.6 \underline{/-90°}$, $27.6 - j52.8\ \Omega$
11.45. 2.11, 1.764 GHz, $0.357 \underline{/-44.5°}$, $70 - j40\ \Omega$
11.47. Véase la figura C.3
11.49. Véase la figura C.4
11.51. *a)* 77.77 Ω, 1.8
b) 0.223 dB/m, 4.974 dB/m
c) 3.848 m
11.53. $9.112\ \Omega < Z_o < 21.03\ \Omega$

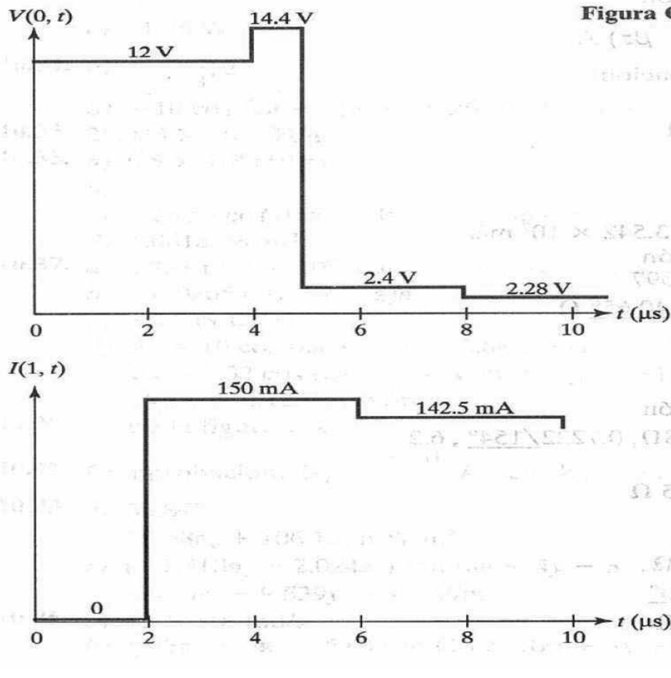


Figura C.3. Para el problema 11.47.

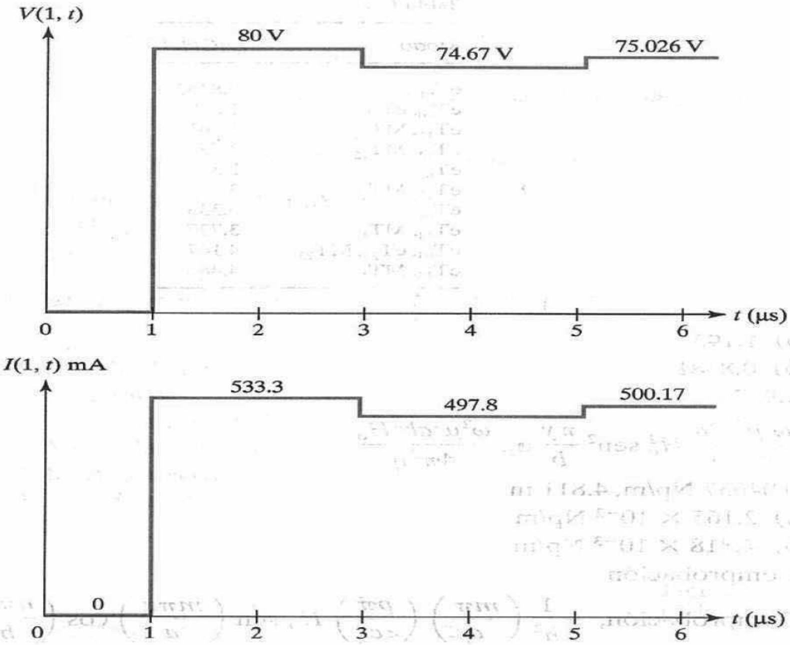


Figura C.4. Para el problema 11.49.

Capítulo 12

12.1. Comprobación
12.3. *a)* Véase la tabla C.1
b) $\eta_{eT13} = 573.83\ \Omega$, $\eta_{MT15} = 3.058\ \Omega$
c) 3.096×10^7 m/s
12.5. *a)* No
b) Sí
12.7. 430 ns
12.9. 375.1 Ω, 0.8347 W
12.11. *a)* eT_{23}
b) $j400.7$/m
c) 985.3 Ω
12.13. *a)* Comprobación
b) 4.06×10^8 m/s, 2.023 cm, 5.669×10^8 m/s, 2.834 cm

Tabla C.1.

Modo	f_c *(GHz)*
eT_{01}	0.8333
eT_{10}, eT_{02}	1.667
eT_{11}, MT_{11}	1.863
eT_{12}, MT_{12}	2.357
eT_{03}	2.5
eT_{13}, MT_{13}	3
eT_{04}	3.333
eT_{14}, MT_{14}	3.727
eT_{05}, eT_{23}, MT_{23}	4.167
eT_{15}, MT_{15}	4.488

12.15. *a)* 1.193
b) 0.8381
12.17. 4.917
12.19. $\dfrac{\omega^2\mu^2 b^3 a}{4\pi^2\eta} H_o^2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi y}{b} \mathbf{a}_z, \dfrac{\omega^2\mu^2 a b^3 H_o}{4\pi^2\eta}$
12.21. 0.04637 Np/m, 4.811 m
12.23. *a)* 2.165×10^{-2} Np/m
b) 4.818×10^{-3} Np/m
12.25. Comprobación
12.27. Comprobación, $-\dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)\left(\dfrac{p\pi}{c}\right) H_o \operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\dfrac{p\pi z}{c}\right)$
12.29. *a)* eT_{011}
b) MT_{110}
c) eT_{101}
12.31. Véase la tabla C.2

Tabla C.2.

Modo	f_r *(GHz)*
011	1.9
110	3.535
101	3.333
102	3.8
120	4.472
022	3.8

12.33. *a)* 6.629 GHz
b) 6.387
12.35. $2.5\,(-\operatorname{sen} 30\pi x \cos 30\pi y \mathbf{a}_x + \cos 30\pi x \operatorname{sen} 30\pi y \mathbf{a}_y) \operatorname{sen} 6 \times 10^9$

Capítulo 13

13.1. $-\dfrac{50\eta\beta}{\mu r}\,\text{sen}\,(\omega t - \beta r)\,(-\text{sen}\,\phi\mathbf{a}_\phi + \cos\theta\cos\phi\mathbf{a}_\theta)$ V/m

$-\dfrac{50\beta}{\mu r}\,\text{sen}\,(\omega t - \beta r)\,(\text{sen}\,\phi\mathbf{a}_\theta + \cos\theta\cos\phi\mathbf{a}_\phi)$ A/m

13.3. 94.25 mV/m, j0.25 mA/m

13.5. 1.974 Ω

13.7. 28.47 A

13.9. *a)* $E_{\theta s} = \dfrac{j\eta I_o\beta\ell e^{-j\beta r}\,\text{sen}\,\theta}{8\pi r}$, $H_{\phi s} = \eta E_{\theta s}$

b) 1.5

13.11. *a)* 0.9071 μA

b) 25 nW

13.13. Véase la figura C.5

13.15. Véase la figura C.6

13.17. 8 sen θ cos ϕ, 8

13.19. *a)* 1.5 sen θ

b) 1.5

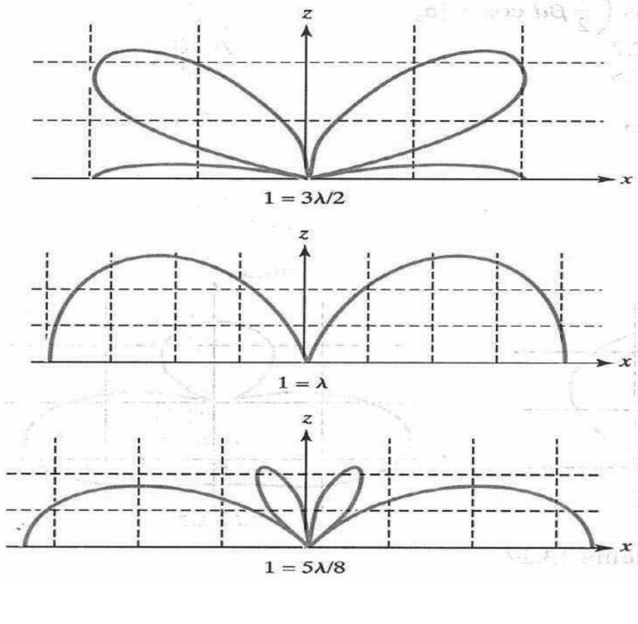


Figura C.5. Para el problema 13.13.

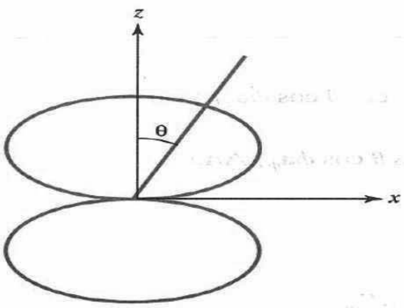


Figura C.6. Para el problema 13.15.

c) $\dfrac{1.5\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{4\pi}$

d) $3.084\ \Omega$

13.21. 99.97%
13.23. *a)* $1.5 \operatorname{sen}^2 \theta, 5$
b) $6 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \phi, 6$
c) $66.05 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi/2, 66.05$
13.25. $\dfrac{j\eta\beta I_o d\ell}{2\pi r} \operatorname{sen} \theta \cos\left(\dfrac{1}{2}\beta d \cos\theta\right)\mathbf{a}_\theta$
13.27. Véase la figura C.7
13.29. Véase la figura C.8
13.31. 0.2686
13.33. *a)* Comprobación
b) $12.8\ \mu\text{W}$
13.35. 21.28 pW
13.37. 19 dB

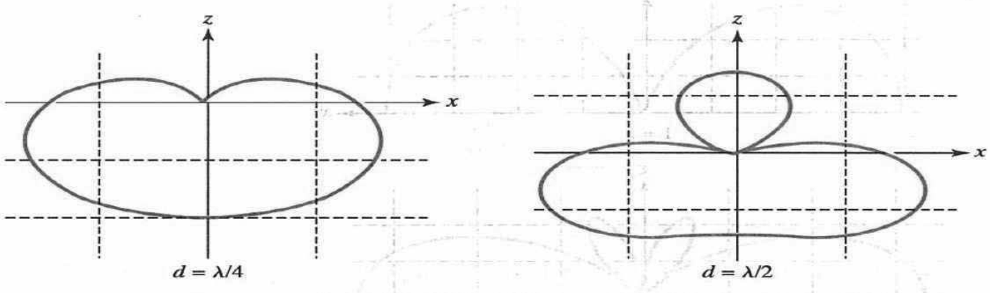


Figura C.7. Para el problema 13.27.

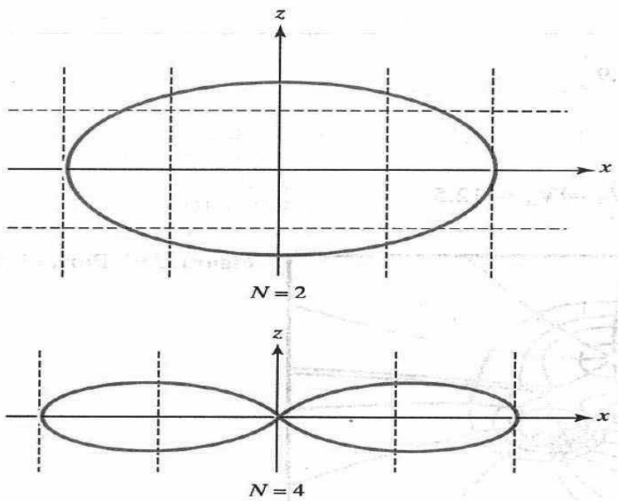


Figura C.8. Para el problema 13.29.

13.39. *a)* 1.708 V/m
b) 11.36 μV/m
c) 30.95 mW
d) 1.91 pW
13.41. 77.52 W

Capítulo 14

14.1. Explicación
14.3. $0.33 - j0.15, 0.5571 - j0.626$
14.5. 3.571
14.7. Comprobación
14.9. 1.428
14.11. *a)* 0.2271
b) 13.13°
c) 376
14.13. *a)* 29.23°
b) 63.1%
14.15. $\alpha_{10} = 8686\alpha_{14}$
14.17. Explicación

Capítulo 15

15.1. Véase la figura C.9

15.3. *a)* 10.117, 1.56

b) 10.113, 1.506

15.5. Comprobación

15.7. 6 V, 14 V

15.9. $V_1 = V_2 = 37.5, V_3 = V_4 = 12.5$

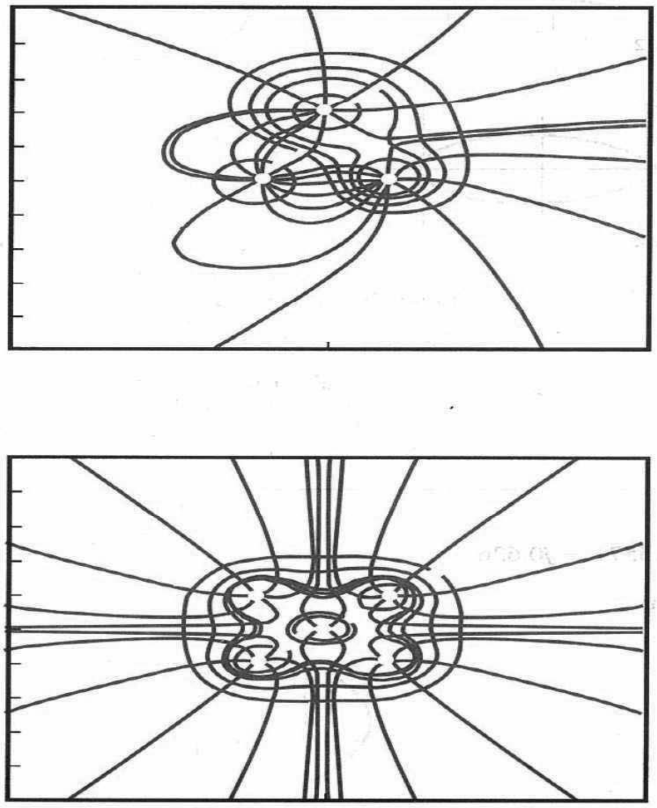


Figura C.9. Para el problema 15.1.

15.11. *a)* La matriz [A] permanece igual, pero a cada término de la matriz [B] se debe añadir $-h^2 ps/\varepsilon$

b) $V_a = 4.276$, $V_b = 9.577$, $V_c = 11.126$
$V_d = -2.013$, $V_e = 2.919$, $V_f = 6.069$
$V_g = -3.424$, $V_h = -0.109$, $V_i = 2.909$

15.13. El resultado numérico coincide por completo con la solución exacta; por ejemplo, respecto de $t = 0$,
$V(0, 0) = 0$, $V(0.1, 0) = 0.3090$, $V(0.2, 0) = 0.5878$, $V(0.3, 0) = 0.809$, $V(0.4, 0) = 0.9511$, $V(0.5, 0) = 1.0$, $V(0.6, 0) = 0.9511$, etc.

15.15. 12.77 pF/m (numérico), 12.12 pF/m (exacto)

15.17. Véase la tabla C.3

Tabla C.3.

θ (grados)	C (pF)
10	8.5483
20	9.0677
30	8.893
40	8.606
⋮	⋮
170	11.32
180	8.6278

15.19. *a)* Exacto: $C = 80.26$ pF/m, $Z_o = 41.56\ \Omega$; en cuanto a la solución numérica, véase la tabla C.4

Tabla C.4.

N	C (pF/m)	Z_o (Ω)
10	82.386	40.486
20	80.966	41.197
40	80.438	41.467
100	80.025	41.562

b) En cuanto a los resultados numéricos, véase la tabla C.5

Tabla C.5.

N	C (pF/m)	Z_o (Ω)
10	109.51	30.458
20	108.71	30.681
40	108.27	30.807
100	107.93	30.905

15.21. Comprobación

15.23. *a)* En (1.5, 0.5) a lo largo de 12 y (0.9286, 0.9286) a lo largo de 13

b) 56.67 V

15.25. $\begin{bmatrix} 0.8788 & -0.208 & 0 & -0.6708 \\ -2.08 & 1.528 & -1.2 & -0.1248 \\ 0 & -1.2 & 1.408 & -0.208 \\ -0.6708 & -0.1248 & -0.208 & 1.0036 \end{bmatrix}$

15.27. 18 V, 20 V

15.29. Véase la tabla C.6

Tabla C.6.

Nodo núm.	*MEF*	*Exacto*
8	4.546	4.366
9	7.197	7.017
10	7.197	7.017
11	4.546	4.366
14	10.98	10.66
15	17.05	16.84
16	17.05	16.84
17	10.98	10.60
20	22.35	21.78
21	32.95	33.16
22	32.95	33.16
23	22.35	21.78
26	45.45	45.63
27	59.49	60.60
28	59.49	60.60
29	45.45	45.63

15.31. Comprobación

Apéndice D

Constantes físicas

Cantidad (unidades)	*Símbolo*	*Valor experimental óptimo*	*Valor aproximado en resolución de problemas*
Permitividad del vacío (F/m)	ε_o	8.854×10^{-12}	$\dfrac{10^{-9}}{36\pi}$
Permeabilidad del vacío (H/m)	μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$	12.6×10^{-7}
Impedancia intrínseca del vacío (Ω)	η_o	376.6	120π
Velocidad de la luz en el vacío (m/s)	c	2.998×10^{8}	3×10^{8}
Carga del electrón (C)	e	-1.6030×10^{-19}	-1.6×10^{-19}
Masa del electrón (kg)	m_e	9.1066×10^{-31}	9.1×10^{-31}
Masa del protón (kg)	m_p	1.67248×10^{-27}	1.67×10^{-27}
Masa del neutrón (kg)	m_n	1.6749×10^{-27}	1.67×10^{-27}
Constante de Boltzmann (J/K)	κ	1.38047×10^{-23}	1.38×10^{-23}
Número de Avogadro (/kg-mol)	N	6.0228×10^{26}	6×10^{26}
Constante de Planck (J · s)	h	6.624×10^{-34}	6.62×10^{-34}
Aceleración por gravedad (m/s²)	g	9.81	9.8
Constante universal de gravitación (m²/kg · s²)	G	6.658×10^{-11}	6.66×10^{-11}
Electrón-volt (J)	eV	1.6030×10^{-19}	1.6×10^{-19}

Potencias de diez

Potencia	*Prefijo*	*Símbolo*
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Alfabeto griego

Mayúscula	*Minúscula*	*Nombre*	*Mayúscula*	*Minúscula*	*Nombre*
A	α	Alfa	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Ómicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Épsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ, s	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ipsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ	Fi
K	κ	Kappa	X	χ	Ji
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

Derivadas vectoriales

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\mathbf{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla\mathbf{V} = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\mathbf{a}_\theta & (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\mathbf{a}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla^2V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\phi^2}$$

Índice analítico